Primzahlen und Quadrate

A ⟹ B

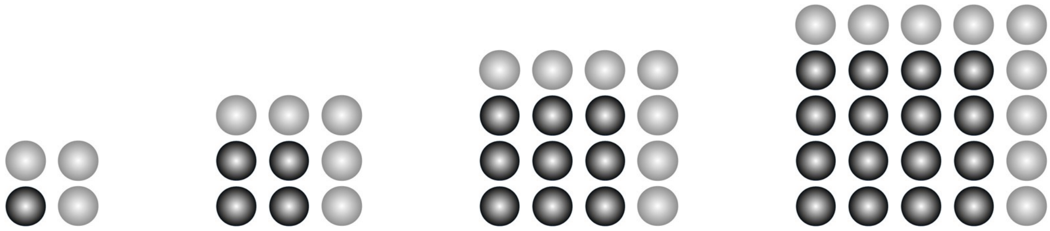
1. *Benachbarte Quadratzahlen*

a) Untersucht man die ersten Primzahlen, die größer als 2 sind, so entdeckt man folgende einfache und gleichzeitig überraschende Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen:

$3=1-1$, $5=9-4$	$13=$	$23=$
$7=16-9$	$17=$	$29=$
$11=36-25$	$19=$	$31=$

Probiere, welche der weiteren Primzahlen sich so darstellen lassen. Was vermutest du?

b) Interpretiere die Punktmuster und erläutere die Zusammenhänge.
Wie viele helle Punkte enthält die 10. Figur, wie viele die n-te Figur der Folge?
Was haben die Primzahlen mit diesem Muster zu tun?



$4=2^2$ *n=1* | *$9=3^2$* *n=2* | *$16=4^2$* *n=3* | *$25=5^2$* *n=4*

c) Beweise den Satz:
"Jede Primzahl p>2 lässt sich als Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen darstellen."

2. *Eindeutige Darstellung*

Nach Aufgabe 1 existiert zu jeder Primzahl die Differenzdarstellung $p=a^2-b^2$.
Dass diese Darstellung sogar eindeutig ist, besagt der folgende Satz:

"Jede ungerade Primzahl lässt sich auf genau eine Art als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen. Dabei sind die Quadratzahlen jeweils unmittelbar benachbart."

Beweise den Satz. Stelle dazu mit der dritten binomischen Formel und der Definition einer Primzahl Bedingungen auf, die für p, a und b gelten müssen. Zeige mithilfe der Bedingungen, dass a und b eindeutig durch p bestimmt und außerdem unmittelbar benachbart sind.

3. *Knapp daneben*

Primzahlen liegen immer knapp neben den Vielfachen von 4 bzw. 6:

a) Jede Primzahl p>2 ist für passendes $n \in \mathbb{N}$ *in der Form* $4 \cdot n+1$ *oder* $4 \cdot n-1$ *darstellbar.*
Notiere einige Beispiele und beweise die Aussage.
Tipp: Teile eine beliebige natürliche Zahl m durch 4 und betrachte die möglichen Reste.

b) Jede Primzahl p>3 ist für passendes $n \in \mathbb{N}$ *in der Form* $6 \cdot n+1$ *oder* $6 \cdot n-1$ *darstellbar.*
Notiere einige Beispiele und beweise die Aussage.
Tipp: Teile eine beliebige natürliche Zahl m durch 6 und betrachte die möglichen Reste.

4. Primzahlen erster und zweiter Art

Wir betrachten zwei disjunkte[1] Folgen aus ungeraden Zahlen:

(1) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, … $(1)=\{a_n \in \mathbb{N} \mid a_n \equiv 1 (mod\, 4)\}$

(2) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, … $(2)=\{a_n \in \mathbb{N} \mid a_n \equiv 3 (mod\, 4)\}$

Jede ungerade Zahl besitzt genau eine der Formen $4\cdot n+1$ oder $4\cdot n-1$ und ist daher in genau einer der beiden Folgen (1) oder (2) enthalten. Jede Primzahl p>2 ist ungerade und kann daher ebenfalls eindeutig einer der beiden Folgen zugeordnet werden.
Wenn eine Primzahl in (1) enthalten ist, kann sie in der Form $4\cdot n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$ dargestellt werden und wird als <u>Primzahl erster Art</u> bezeichnet. Eine <u>Primzahl zweiter Art</u> gehört zu (2) und lässt sich entsprechend in der Form $4\cdot n-1$ darstellen.

a) <u>Primzahlen erster Art</u> haben die besondere Eigenschaft, dass man sie alle auf genau eine Art als Summe zweier Quadratzahlen darstellen kann.
Stelle die Primzahlen erster Art zwischen 20 und 102 als Summe zweier Quadratzahlen dar.

b) <u>Primzahlen zweiter Art</u> lassen sich nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellen.
Dies gilt darüber hinaus für alle Zahlen der Folge (2): "Wenn eine Zahl die Form $4\cdot n-1$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt, dann kann sie <u>nicht</u> Summe von zwei Quadratzahlen sein."
Beweise den Satz durch Kontraposition.

5. Primzahlfreie Fünferserien

Beweise die folgende Aussage: "Es gibt unendlich viele Serien von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, unter denen sich keine Primzahl befindet."

Tipp: Verwende für die Primzahl p die in Aufgabe 3 nachgewiesene Darstellung $p=6\cdot n\pm 1$ und untersuche die fünf Zahlen p^2-1, $p^{2,}$ p^2+1, p^2+2 und p^2+3 auf Teilbarkeit.

6. Zehn Ziffern

a) <u>Beweise</u>: "Eine 10-stellige natürliche Zahl, die jede mögliche Ziffer genau einmal enthält, kann keine Primzahl sein." (Tipp: Denke an die Quersummenregeln.)

b) Nun wird eine Primzahl p mit p>3 und eine natürliche Zahl mit n≥1 betrachtet.
<u>Beweise</u>: "Wenn die Dezimaldarstellung von p^n genau 100 Stellen besitzt, dann kommt eine der zehn möglichen Ziffern mehr als zehnmal vor."
(Tipp: Notiere dir Voraussetzung und Behauptung und beweise durch Widerspruch.)

7. Vierundzwanzig

Auch die "Fast-Vielfachen" von 24 in der Form $24\cdot n+1$ haben interessante Eigenschaften:

a) Beweise: "Wenn p>3 eine Primzahl ist, dann ist p^2-1 durch 24 teilbar."
Tipp: Nutze die 3. binomische Formel und untersuche die Teilbarkeit der Faktoren.

b) Beweise: "Wenn p>3 eine Primzahl ist, dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $p^2=24\cdot n+1$."

c) Nun gelte für $p, n \in \mathbb{N}$ umgekehrt $p^2=24\cdot n+1$. Ist p dann eine Primzahl?
Formuliere eine Vermutung in Wenn-Dann-Form und beweise oder widerlege sie.

8. Quadratzahlen gesucht!

Beweise: "Unter drei beliebig gewählten ganzen Zahlen gibt es stets zwei, deren Produkt eine Differenz von zwei Quadratzahlen ist." Untersuche zuerst Beispiele.

1 Zwei Mengen werden als disjunkt bezeichnet, wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen. Hier kann jede ungerade Zahl <u>entweder</u> in (1) <u>oder</u> in (2) vorkommen, aber nicht in beiden Folgen.