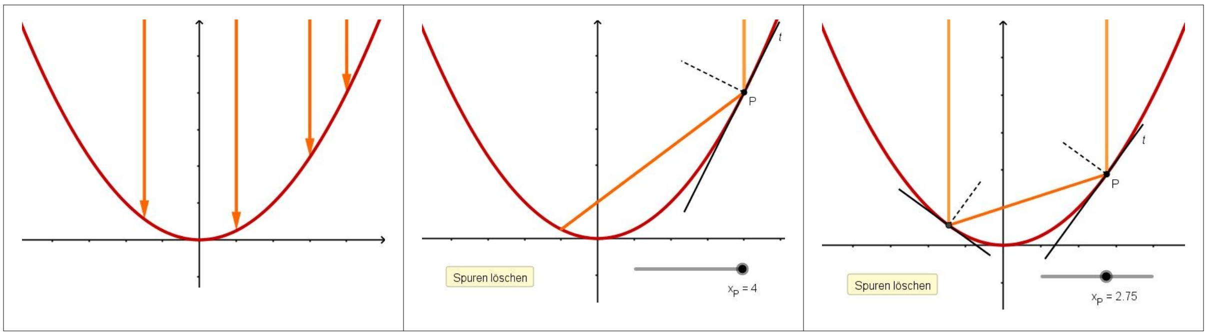
PARABELN ERKUNDEN

1. ***Reflexion an Parabeln*** *(Partnerarbeit)*
Lässt man eine Parabel um ihre Achse rotieren, so entsteht ein Paraboloid, dessen Eigenschaften beispielsweise Parabolscheinwerfern oder Radioteleskopen zugrunde liegen. Eine Rinne mit parabelförmigen Querschnitt wird als parabolischer Zylinder bezeichnet, der unter anderem bei einem Parabolrinnen-Kraftwerk eingesetzt wird.[1]

Um das Funktionsprinzip solcher Anwendungen zu klären, sollen mithilfe einer Simulation in GeoGebra die Reflexionseigenschaften einer Parabel untersucht werden.

a) *Öffnet dazu die Datei* `M10geo02_Nr1_Parabeln_erkunden.ggb`[2]*. Ihr seht achsenparallel einfallende Lichtstrahlen, deren weiterer Weg durch die Reflexion an der Tangente physikalisch sinnvoll fortgeführt wird, das Einfallslot ist gestrichelt eingezeichnet. Erkundet nach Auswahl des Kontrollkästchens "Weg eines Lichtstrahls" dessen weiteren Verlauf.*



Was fiel euch bei der Erkundung auf? Notiert eure Beobachtungen.

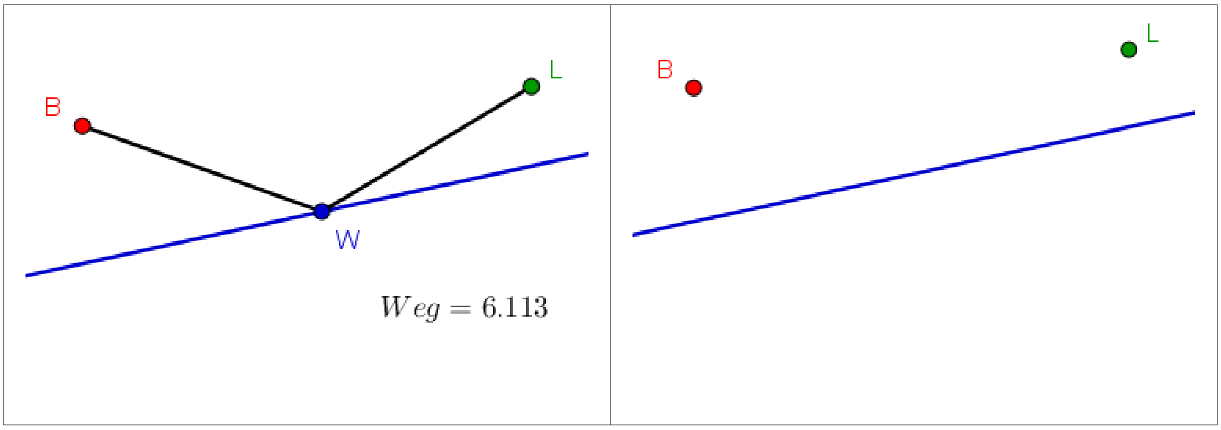
Merke: Reflexion an Parabeln

b) *Erklärt nun das Funktionsprinzip der drei oben abgebildeten Anwendungen.*

1 Parabolscheinwerfer, *Спасимир (Spasimir Pilev), [CC BY-SA (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0)]*
URL: *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parabolic_trough.svg*, abgerufen am 2.2.2020
Parabolrinnenkollektor, Willink [CC BY-SA (*http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/legalcode*)]
URL: *https://wissenwiki.de/Datei:Umwelt_energie_parabolrinnen-kollektor.jpg* , abgerufen: 2.2.2020
Radioteleskop Effelsberg, Dr. Schorsch [CC BY-SA (*http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/*)]
URL: *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Effelsberg_total2.jpg* , abgerufen: 2.2.2020
2 Die Datei kann auch im GeoGebra-Buch IMP10 unter *https://www.geogebra.org/m/qqfbwvmr* abgerufen werden.

2. ***Kürzester Weg*** *(Partnerarbeit)*

Öffnet die Datei `M10geo02_Nr2_Kuerzester_Weg.ggb`. Am vereinfachten Beispiel eines Löschtrupps L, der in einer Steppe einen Brand B mit Wasser aus einem Fluss löschen muss, könnt ihr das "Prinzip des kürzesten Weges" entdecken.



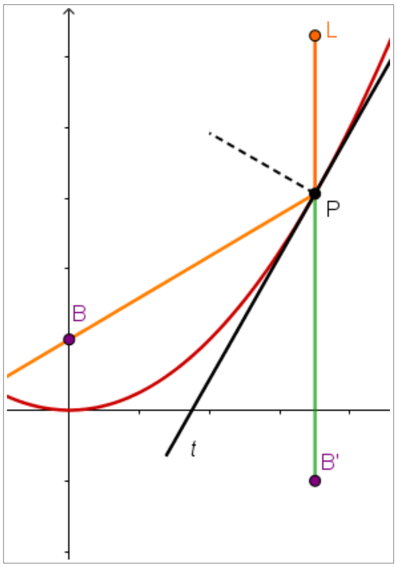
a) Sucht durch Verschieben der Entnahmestelle W die optimale Position, so dass der Weg des Löschtrupps möglichst kurz ist und der Brand schnell gelöscht werden kann.

b) Aus der Physik kennt ihr bereits das "Fermatsche Prinzip" für die Ausbreitung des Lichts. Konstruiert analog hier den optimalen (kürzesten) Weg des Löschtrupps geometrisch. Probiert es in GeoGebra aus und konstruiert dann "von Hand" in der Vorlage oben rechts. Begründet, warum die konstruierte Position optimal ist.

c) Zeichnet an der optimalen Entnahmestelle das "Lot" ein. Was vermutet ihr?*

3. ***Leitgerade einer Parabel*** *(Partnerarbeit)*

Öffnet die Datei `M10geo02_Nr3_Leitgerade.ggb`. Ihr seht einen von L kommenden achsenparallelen Strahl, der nach dem Prinzip des kürzesten Weges zum Brennpunkt verläuft.



a) Spiegelt analog zu Aufgabe 2b) den Brennpunkt B an der Tangente t und zeichnet die Strecke zwischen dem Spiegelpunkt B‘ und dem Parabelpunkt P ein. Zieht am Punkt P und achtet dabei auf den Punkt B‘. Was fällt euch auf? Notiert eure Beobachtung.

b) Für jeden Parabelpunkt P gilt: $\overline{PB}=\overline{PB'}$. Begründet dies und beschreibt den Zusammenhang mit eigenen Worten. Was gilt für den Scheitel der Parabel?

c) Die Gerade, auf der B‘ wandert, hat eine besondere Bedeutung, sie wird als Leitgerade l der Parabel bezeichnet. Zeichnet die Leitgerade der Parabel im Bild ein. Was gilt für jeden Parabelpunkt P bezüglich B und l? Formuliert eine Bedingung, die die Parabel charakterisiert.

Merke: Leitgeraden-Definition einer Parabel

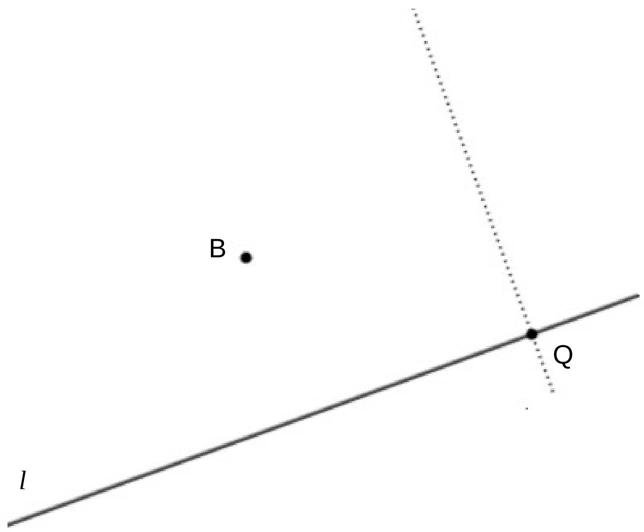
4. ***Parabelpunkte konstruieren***
Zeichne auf dem Blatt eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.
Die Gerade und der Punkt werden als Leitgerade l und Brennpunkt B einer Parabel aufgefasst.

a) Zeichne die Parabelachse durch den Brennpunkt B ein.

b) Konstruiere nun einen Parabelpunkt, indem du die Vorgehensweise aus Aufgabe 3 umkehrst. Wähle dazu einen beliebigen Punkt Q auf der Leitgerade und konstruiere mithilfe der Mittelsenkrechte von $\overline{BQ}$ *den zugehörigen Punkt P der Parabel.*

c) Wiederhole b) für mehrere Punkte der Parabel.

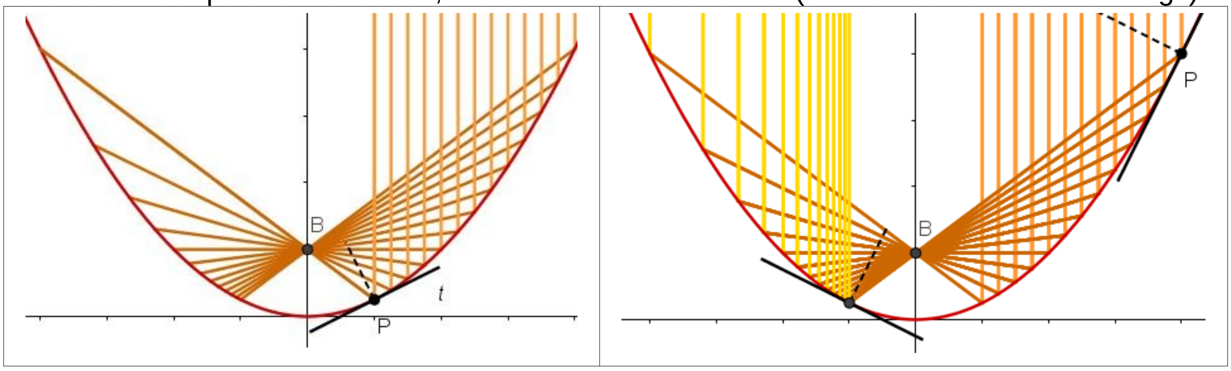
d) Wiederhole die Konstruktion für die unten in der Blattecke abgebildete Leitgerade und den Brennpunkt. Skizziere den Verlauf der Parabel, nachdem du einige Punkte konstruiert hast.



1. **Lösungen**

1. **Reflexion an Parabeln**

a) Zunächst kann wie links zu sehen beobachtet werden, dass achsenparallele Strahlen nach der ersten Reflexion durch einen Punkt auf der Parabel-Achse verlaufen und dort gebündelt werden wie bei einem Brennglas. Dieser besondere Punkt wird Brennpunkt genannt (engl.: Focus) und meist mit B oder F abgekürzt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die einfallenden Strahlen nur in der rechten Parabelhälfte eingezeichnet. Danach kann man weiter entdecken, dass durch den Brennpunkt verlaufende Strahlen nach der zweiten Reflexion die Parabel achsenparallel verlassen, wie es rechts zu sehen ist (Umkehrbarkeit des Lichtwegs).

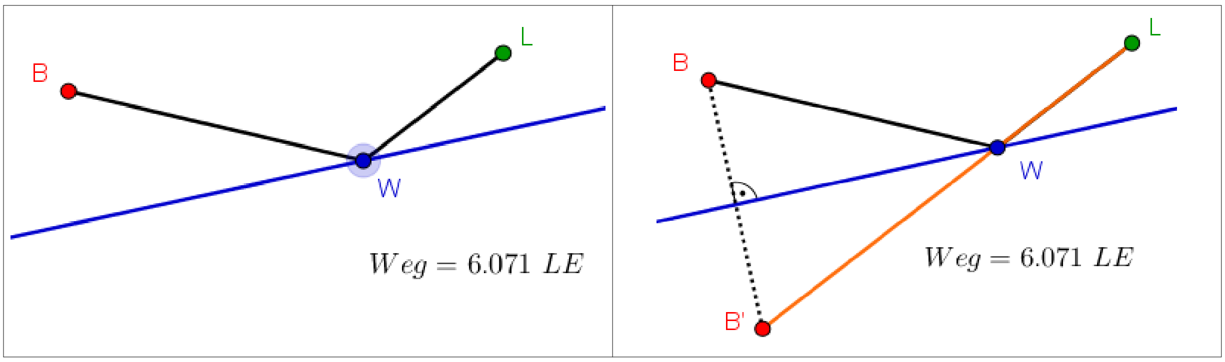


<u>Merke</u>: Reflexion an Parabeln
Bei einer Parabel verlaufen achsenparallel einfallende Strahlen nach der Reflexion durch einen Punkt, den sogenannten Brennpunkt B (engl. "Focus F"). Strahlen durch den Brennpunkt verlassen die Parabel nach der Reflexion achsenparallel.

b) Radioteleskop und Parabolrinnen-Kraftwerk nutzen die Eigenschaft, dass achsenparallele Strahlen nach der Reflexion im Brennpunkt gebündelt werden. Beim *Radioteleskop* sitzt dort der Empfänger. Bei einem *Parabolrinnen-Kraftwerk* liegt in der Brennlinie der Parabolrinne ein sogenanntes Absorber-Rohr. Inn seinem Innern zirkuliert eine Flüssigkeit, die durch die Strahlungsenergie des Sonnenlichts erhitzt wird.
Bei einem *Parabolscheinwerfer* werden die Strahlen einer im Brennpunkt montierten Lichtquelle von einem Spiegel in Paraboloidform reflektiert und verlassen diesen annähernd achsenparallel. Dadurch erhöht sich die Reichweite erheblich, da sich kein Lichtkegel bildet. Dieses Prinzip wurde früher auch bei Autoscheinwerfern oder Taschenlampen genutzt.

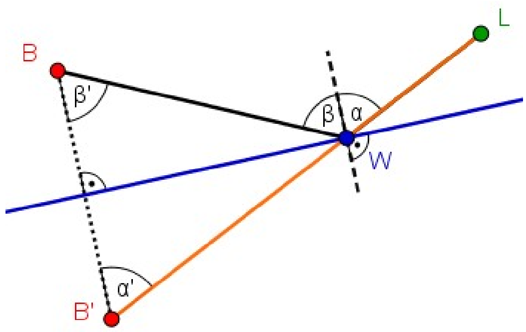
2. **Kürzeste Wege**

a) Durch Verschieben von W sieht man, dass die kürzeste Weglänge ca. 6,071 LE beträgt.



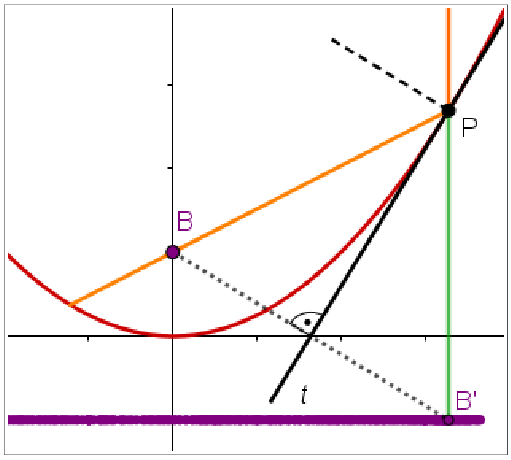
b) Man spiegelt B an der Geraden und verbindet den Spiegelpunkt B‘ mit L. Die Strecke $\overline{LB'}$ schneidet dann die Gerade an der optimalen Entnahmestelle W. Wegen der Symmetrie gilt $\overline{WB}=\overline{WB'}$, also hat auch der Streckenzug LWB‘ die zu fahrende Weglänge. Diese wird wegen der Dreiecksungleichung genau dann minimal, wenn L und B‘ geradlinig verbunden sind.

c) Zeichnet man das Lot ein, so wird deutlich, dass die Winkel zwischen Wegstrecken und Lot gleich weit sind, es gilt offensichtlich α=β.
Nachweis: Aus Symmetriegründen gilt im gleichschenkligen Dreieck BB‘W für die Basiswinkel α‘=β‘. Das Lot in W ist parallel zur Strecke BB‘. Da Stufen - und Wechselwinkel an Parallelen gleich groß sind, folgt daraus α=β.



Anmerkung: Dies ist eine Möglichkeit, auch die Reflexion an einer Oberfläche zu begründen:
Das aus der Physikeinheit "Optik und Bilderfassung" bekannte Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht sich immer so ausbreitet, dass es die kürzeste Zeit benötigt um von einer Lichtquelle L zum Beobachter B zu kommen. Befindet man sich in einem Medium, wie hier z.B. in Luft, so ist der Weg mit der kürzesten Dauer auch gleichzeitig der kürzeste Weg. Hieraus ergibt sich die Bedingung für die Reflexion: Stellt man sich L als Lichtquelle vor, so wird der Lichtstrahl LW an der Geraden durch W so reflektiert, dass der Einfallswinkel α gleich dem Ausfallswinkel β ist.

3. **Leitgerade einer Parabel**



a) Ergänzt man die Vorlagendatei wie beschrieben und zieht am Punkt P, so bewegt sich der Punkt B‘ auf einer Geraden, die senkrecht zur Parabelachse verläuft.
Im Bild ist die Spur von B‘ zu sehen.

b) Es gilt $\overline{PB}=\overline{PB'}$, da B an der Tangente durch P gespiegelt wurde und daher das Dreieck BB‘P gleichschenklig ist. Die Tangente ist gleichzeitig Mittelsenkrechte von BB‘. Die beiden Schenkel $\overline{PB}$ und $\overline{PB'}$ sind daher gleichlang. P hat also vom Brennpunkt B und seinem Spiegelpunkt B‘ bzw. der Geraden, auf der sich B‘ bewegt, den gleichen Abstand.
Diese Eigenschaft gilt für jede Lage von P auf der Parabel, also auch für ihren Scheitelpunkt S. Der Scheitel ist daher gleichweit vom Brennpunkt und von der Geraden entfernt, auf der B‘ wandert, der sogenannten Leitgeraden.

c) Die bei b) beschriebene Eigenschaft kann man nun umgekehrt verwenden, um eine Parabel zu definieren, wenn ihr Brennpunkt und ihre Leitgerade gegeben sind:

> *Merke: Leitgeradendefinition einer Parabel*
>
> *Eine Parabel enthält alle Punkte, die von einer Geraden l (Leitgerade) und einem Punkt B (Brennpunkt), der nicht auf der Leitgeraden liegt, gleich weit entfernt sind.*

4. **Parabelpunkte konstruieren**

a),b),c) individuelle Lösungen auf dem Blatt

d) Rechts ist exemplarisch das Vorgehen zu sehen. Man wählt einen Punkt Q auf der Leitgerade und zeichnet die Senkrechte zur Leitgeraden in Q ein. Die Mittelsenkrechte von B und Q schneidet diese Senkrechte im Parabelpunkt P. Die Konstruktion wird in Aufgabe 2 auf dem Arbeitsblatt "Parabeln" wieder aufgegriffen.