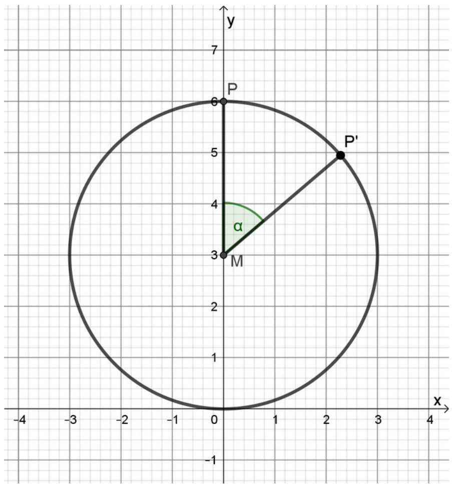
Rollkurven parametrisieren

Die Beschreibung von Rollkurven lässt sich über eine Parametrisierung in x(t) und y(t) deutlich einfacher gestalten, als über analytische Funktionsgleichungen y= f(x) (welche sowieso nur unter den Funktionen der Rollkurven möglich sind). Wir beschränken uns daher ab jetzt immer auf parametrisierte Beschreibungen.

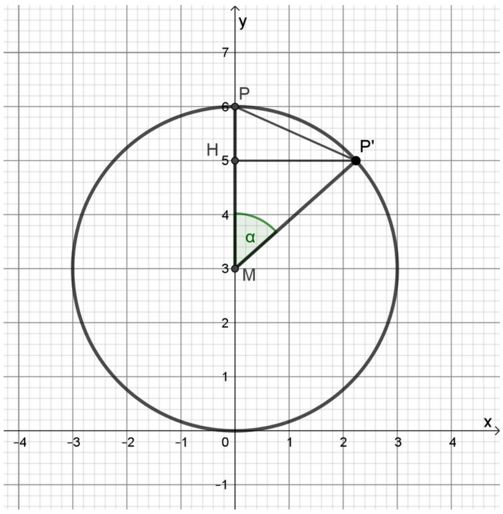
Die Herleitung der Parametrisierung kann meist sinnvoll in mehrere Schritte aufgeteilt werden, wodurch sie leichter nachvollziehbar wird. Dies kann man am folgenden Beispiel sehen. Beobachtet werden soll dabei die Abrollbewegung des Punktes P(0/6) auf dem Kreis um M(0/3) mit Radius r= 3, wenn der Kreis sich nach rechts entlang der x-Achse abrollt.



Schritt 1: Drehbewegung ohne Abrollen

Zunächst dreht man den Kreis bei festgehaltenem Mittelpunkt M(0/3) um den Winkel α, dadurch dreht sich der Punkt P auf den Punkt P´.

Die „neuen“ Koordinaten von P´ erhält man aus den Koordinaten von P mithilfe trigonometrischer Überlegungen.



Dazu führen wir parallel zur x-Achse eine Hilfslinie durch P´ ein, die die y-Achse in H schneidet.

Dabei entsteht unter anderem das rechtwinklige Dreieck MP´H.

In ihm gilt $\overline{HM}=\cos(\alpha)\cdot\overline{MP'}=\cos(\alpha)\cdot r$ (1)

und $\overline{P'H}=\sin(\alpha)\cdot\overline{MP'}=\sin(\alpha)\cdot r$ (2)

Damit kann man die Koordinaten $x_{P'}$ und $y_{P'}$ on P´ in Abhängigkeit der Koordinaten x_P und y_P von P, des Winkels α und des Kreisradius r bestimmen.

Aufgaben:

1. *Erkläre die Gleichungen (1) und (2) mithilfe deines Wissens über Sinus und Kosinus.*
2. *a.) Zeichne den Kreis um M(0/3) mit r= 3 in dein Heft*
   (Verwende die Einheit $1\,\mathrm{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,cm$, zeichne die x-Achse bis 15 LE).

   b.) Stelle die Terme $x_{P'}(\alpha)$ und $y_{P'}(\alpha)$ sowohl allgemein für den Startpunkt P(0/2r) (bei Mittelpunkt M(0/r)) als auch am konkreten Beispiel mit P(0/6) (bei r= 3) auf.

   c.) Bestimme mit den Termen aus b.) die Koordinaten von P´ für $\alpha=$ 30°; 80°; 120°; 150°; 250° und 300° und P(0/6).

   Zeichne die Punkte in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2a) ein und prüfe die Winkelweiten mit dem Geodreieck.

Rollkurven parametrisieren

Schritt 2: Verschiebung des Mittelpunkts und Drehung

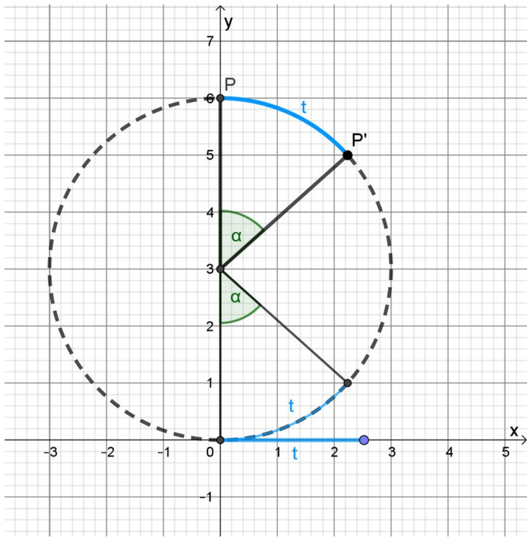
Aus Schritt 1 folgte die Parametrisierung für den Punkt P (Start im obersten Kreispunkt auf der y-Achse) ohne Abrollen in Abhängigkeit des Winkels α zu

$$x_{P'}(\alpha)=r\cdot\sin(\alpha) \quad \text{und} \quad y_{P'}(\alpha)=r+r\cdot\cos(\alpha)$$

Wenn nun der Mittelpunkt parallel zur x-Achse nach rechts um einen Wert t verschoben wird, dann wird auch P um diesen Wert verschoben. Bei gleichzeitiger Drehung um den Winkel α erhält man dadurch für die Koordinaten des (verschobenen und gedrehten) Punktes P´:

$$x_{P'}(\alpha,t)=r\cdot\sin(\alpha)+t \quad \text{und} \quad y_{P'}(\alpha)=r+r\cdot\cos(\alpha)$$

Schritt 3: Verschiebung des Kreises durch Abrollbewegung



Jetzt kommt der wichtigste Schritt: Wir stellen einen Zusammenhang zwischen dem Winkel α und dem Verschiebeparameter t her:

Wird der Kreis um α gedreht, so dreht sich der Punkt P um die Strecke $2\pi\cdot r\cdot\frac{\alpha}{360°}$. Um diese Strecke dreht sich dann aber jeder Punkt auf dem Kreis. Da der Kreis abrollt ohne auf der Unterlage zu rutschen, bewegt sich der Kreis auch auf der x-Achse um genau diese Strecke weiter – der neue Auflagepunkt liegt also um die Strecke $t=2\pi\cdot r\cdot\frac{\alpha}{360°}$ rechts vom Ursprung (s. Abbildung),

oder umgeformt: $\alpha=t\cdot\frac{360°}{2\cdot\pi\cdot r}$.

Dadurch können wir nun die Koordinaten des Punktes P´ in Abhängigkeit der Abrollbewegung um die Strecke t beschreiben:

$$x_{P'}(t)=r\cdot\sin\left(t\cdot\frac{360°}{2\cdot\pi\cdot r}\right)+t \quad \text{und} \quad y_{P'}(t)=r+r\cdot\cos\left(t\cdot\frac{360°}{2\cdot\pi\cdot r}\right)$$

Aufgaben:

3. *Berechne die Position der Punkte aus Aufgabe 2c, nachdem nun noch die Abrollbewegung dazugekommen ist. Zeichne die Punkte – soweit möglich – in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2a) ein.*
4. *a) Erstelle eine Simulation der Abrollbewegung in einer Geogebra-Datei mithilfe eines Schiebereglers für t.*

   b) In Geogebra erzeugt der Befehl „Ortslinie(Q,t)“ die Spurkurve der Punkte Q in Abhängigkeit des Schiebereglers t als durchgehende, feine Linie[1]. Führe dies durch und vergleiche mit deiner ganz zu Beginn des Kapitels selbst gedachten Kurve.

   Falls es gravierende Unterschiede gibt:

   Überlege dir, welche deiner Vorstellungen sich warum als falsch herausgestellt hat.

1 Verwende diesen Befehl auch dann, wenn du bereits den Befehl „Kurve“ in Geogebra kennst.