Adäquate Mengen von Junktoren

Bislang haben wir uns vor allem mit den Junktoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ beschäftigt. Dies sind die üblichen Junktoren des Aussagenlogik. Es stellt sich die Frage, ob die Beschränkung auf diese die Ausdrucksstärke beschneidet. Vielleicht könnte man mit anderen zweistelligen Junktoren oder mit drei-, vier- und mehrstelligen Junktoren viel mehr ausdrücken und evtl. sogar Probleme lösen, die bislang offen sind.
Für die zweistelligen Junktoren wissen wir bereits, dass dem nicht so ist. Diese haben wir alle mithilfe von $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ ausgedrückt. Im Folgenden wird gezeigt, dass überhaupt jeder denkbare Junktor mit diesen ausgedrückt werden kann, egal wie viele Stellen er hat.

Definition: Eine Menge von Junktoren heißt **adäquat**, wenn zu jedem Junktor J einen logisch äquivalenten Ausdruck gibt, der nur Junktoren aus der Menge enthält.

Es ist also zu zeigen, dass $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist. Es genügen sogar weniger:

Satz:
(i) $\{\neg, \vee, \wedge\}$ ist eine adäquate Menge von Junktoren,
(ii) $\{\neg, \wedge\}$ ist eine adäquate Menge von Junktoren,
(iii) $\{\neg, \vee\}$ ist eine adäquate Menge von Junktoren,
(iv) $\{\neg, \rightarrow\}$ ist eine adäquate Menge von Junktoren.

Beweis:
(i) Gegeben ist ein beliebiger Junktor J.
Wenn J nicht das Falsum ist, kann man einen zu J logisch äquivalenten Ausdruck in disjunktiver Normalform finden. Dieser enthält nur die Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$.
Wenn J das Falsum ist, so ist J logisch äquivalent zu $A \wedge (\neg A)$.
Damit lässt sich immer ein zu J logisch äquivalenter Ausdruck finden, der nur die Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ enthält. $\square$
(ii) Den Junktor $\vee$ kann man mithilfe von $\neg$ und $\wedge$ ausdrücken, denn $\neg((\neg A) \wedge (\neg B))$ ist nach den DeMorgan`schen Regeln logisch äquivalent zu $(\neg(\neg A)) \vee (\neg(\neg B))$ und dies zu $A \vee B$.
Somit kann man zu jeder Aussage, die $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ enthält eine logisch äquivalente Aussage finden, die nur $\neg$ und $\wedge$ enthält. Da $\{\neg, \vee, \wedge\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist also auch $\{\neg, \wedge\}$ eine. $\square$

a) Arbeiten Sie den Beweis für (i) und (ii) durch.

b) Beweisen Sie (iii) und (iv).

Somit kann man aus der Menge $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ der üblichen Junktoren einzelne weglassen, ohne dass man weniger ausdrücken kann. In der Regel benutzt man in der Aussagenlogik jedoch alle fünf, weil sich so mathematische Aussagen kurz und prägnant formulieren lassen. Man kann aber nicht irgendwelche Junktoren weglassen, denn es gilt der

Satz: $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ ist keine adäquate Menge von Junktoren.

Beweis: Für jeden Ausdruck, der nur die Junktoren $\vee$, $\wedge$ und $\rightarrow$ enthält, gilt, dass in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle der Wahrheitswert w steht. Denn:

____

____

____

____

Damit kann nur mithilfe von $\vee$, $\wedge$ und $\rightarrow$ kein zu ______________ logisch äquivalenter Ausdruck gebildet werden, denn bei diesem ____

____ □

c) Beweisen Sie, dass weder $\{\vee, \wedge\}$ noch $\{\vee, \rightarrow\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist.

Es gibt sogar Junktoren, die alleine adäquat sind:

Definition:

(i) Der **Sheffer'sche Strich** | (nach dem US-amerikanischen Logiker Henry Maurice Sheffer) ist ein zweistelliger Junktor der wie folgt definiert ist:

A	B	A | B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

(ii) Der Peirce'sche Pfeil (nach dem US-amerikanischen Logiker Charles Sanders Peirce) ist ein zweistelliger Junktor $\downarrow$ der wie folgt definiert ist:

A	B	$A \downarrow B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

d) Beweisen Sie, dass $\{|\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist.

e) Beweisen Sie, dass $\{\downarrow\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist.

f) Geben Sie zu den folgenden Ausdrücken jeweils einen logisch äquivalenten Ausdruck an, der nur den Junktor | enthält: (1) $A \rightarrow B$ (2) $(A \wedge B) \rightarrow A$.

g) Der Sheffer'sche Strich wird auch NAND (Not-And) und der Peirce'sche Pfeil auch NOR (Not-Or) genannt. Erklären Sie diese Namen.