Vertiefungskurs Mathematik

Lösungen: Aufgaben zum Beweis durch vollständige Induktion

AUFGABE 1

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k \cdot (k+1)$ $(*)$

Zu zeigen: $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1) \cdot (k+2)$

Mit $(*)$ folgt: $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k \cdot (k+1) + (k+1)$

$$= \frac{1}{2}k \cdot (k+1) + \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot 2 = \frac{1}{2}(k+1) \cdot (k+2)$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 2

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1$

(2) Induktionsschritt:

Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)$ $(*)$

Zu zeigen: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2(k+1)+1)$

$$= \frac{1}{6}(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3) = \frac{1}{6}(k+1) \cdot (2k^2 + 7k + 6)$$

Mit $(*)$ folgt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k \cdot (k+1) \cdot (2k+1) + (k+1)^2$$

$$= (k+1) \cdot \left[\frac{1}{6}k \cdot (2k+1) + (k+1)\right] = \frac{1}{6}(k+1) \cdot [k \cdot (2k+1) + 6 \cdot (k+1)]$$

$$= \frac{1}{6}(k+1) \cdot [2k^2 + k + 6k + 6] = \frac{1}{6}(k+1) \cdot [2k^2 + 7k + 6]$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 3

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4 = 1$

(2) Induktionsschritt:

Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{1}{4}k^2 \cdot (k+1)^2$ $(*)$

Zu zeigen: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4} \cdot (k+1)^2 \cdot (k+2)^2$

Mit $(*)$ folgt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}k^2 \cdot (k+1)^2 + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2 \cdot \left[\frac{1}{4}k^2 + (k+1)\right] = (k+1)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [k^2 + 4(k+1)]$$

$$= \frac{1}{4}(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4k + 4] = \frac{1}{4}(k+1)^2 \cdot (k+2)^2$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 4

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $2 = 1 \cdot (1+1) = 2$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k \cdot (k+1)$ $(*)$

Zu zeigen: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2 \cdot (k+1) = (k+1) \cdot (k+2)$

Mit $(*)$ folgt: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2 \cdot (k+1) = k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)$

$= (k+1) \cdot (k+2)$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d

AUFGABE 5

1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $6^1 - 1 = 5 = 5 \cdot 1$ ➔ $5 \mid 5$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $6^k - 1 = 5 \cdot m$ (mit $m \in \mathrm{IN}$) $(*)$

Zu zeigen: $6^{k+1} - 1 = 5 \cdot l$ (mit $l \in \mathrm{IN}$)

Mit $(*)$ folgt: $6^{k+1} - 1 = 6 \cdot 6^k - 6 + 5 = 6 \cdot (6^k - 1) + 5 = 6 \cdot 5 \cdot m + 5$

$= 5 \cdot (6m + 1) = 5 \cdot l$ (mit $l \in \mathrm{IN}$)

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 6

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $1^3 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$ ➔ $6 \mid 0$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $k^3 - k = 6 \cdot m$ (mit $m \in \mathrm{IN}$) $(*)$

Zu zeigen: $(k+1)^3 - (k+1) = 6 \cdot l$ (mit $l \in \mathrm{IN}$)

Mit $(*)$ folgt: $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$

$= k^3 - k + 3k^2 + 3k = 6m + 3k^2 + 3k = 6m + 3k \cdot (k+1)$

Fall1: k ist gerade, d.h. $k = 2r$ mit $r \in \mathrm{IN}$

$6m + 3k \cdot (k+1) = 6m + 3 \cdot 2r \cdot (k+1) = 6m + 6r \cdot (k+1)$

$= 6 \cdot \big(m + r \cdot (k+1)\big) = 6 \cdot l$

Fall2: k ist ungerade, also ist k + 1 ist gerade, d.h. $k + 1 = 2s$ mit $s \in \mathrm{IN}$

$6m + 3k \cdot (k+1) = 6m + 3k \cdot 2s = 6m + 6ks = 6 \cdot (m + ks) = 6 \cdot l$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 7 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9 \cdot m$ mit $m \in \mathrm{IN}$.

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9 \cdot 4$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9 \cdot m$ $(*)$

Zu zeigen: $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 9 \cdot l$ (mit $l \in \mathrm{IN}$)

Mit $(*)$ folgt:

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$

$= 9m + 9k^2 + 27k + 27 = 9 \cdot (m + k^2 + 3k + 3) = 9 \cdot l$

$= \frac{1}{4}(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4k + 4] = \frac{1}{4}(k+1)^2 \cdot (k+2)^2$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 8

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $2^1 = 2 > 1$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $2^k > k$ $(*)$

Zu zeigen: $2^{k+1} > k + 1$

Mit $(*)$ folgt: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k = k + k \geq k + 1$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 9

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $3^1 = 3 > 1^2 = 1$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $3^k > k^2$ $(*)$

Zu zeigen: $3^{k+1} > (k+1)^2$

Mit $(*)$ folgt: $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot k^2 = k^2 + k^2 + k^2 \geq k^2 + k^2 + 1$

Für n = 2 gilt $3^2 = 9 > 2^2 = 4$ ➔ Für $k \geq 2$ folgt demnach $k^2 \geq 2k$.

➔ $3^{k+1} > k^2 + k^2 + 1 \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 10

(1) Induktionsanfang: $n = 3$ ➔ $3^2 = 9 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ mit k≥ 3 gilt $k^2 > 2k + 1$ (∗)

Zu zeigen: $(k+1)^2 > 2 \cdot (k+1) + 1 = 2k + 3$

Mit (∗) folgt: $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 2k + 2k + 2 > 2k + 3$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 11

(1) Induktionsanfang: $n = 5$ ➔ $2^5 = 32 > 5^2 = 25$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ mit k≥ 5 gilt $2^k > k^2$ (∗)

Zu zeigen: $2^{k+1} > (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

Mit (∗) folgt: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 5k = k^2 + 2k + 3k$

➔ $2^{k+1} > k^2 + 2k + 3k > k^2 + 2k + 1$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 12

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $f'(x) = x \cdot e^x + e^x = e^x \cdot (x+1)$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ mit k≥ 1 gilt $f^{(k)}(x) = (x+k) \cdot e^x$ (∗)

Zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = (x + k + 1) \cdot e^x$

Es gilt: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$

Mit (∗) folgt: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((x+k) \cdot e^x\right)' = (x+k) \cdot e^x + e^x$

$f^{(k+1)}(x) = (x + k + 1) \cdot e^x$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 13

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (-1) + e^{-x} = e^{-x} \cdot (1-x)$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (1-x) = (-1)^{1-1} \cdot (1-x) \cdot e^{-x}$$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ mit k≥ 1 gilt $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-x) \cdot e^{-x}$ (∗)

Zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot (k+1-x) \cdot e^{-x}$

Es gilt: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$

Mit (∗) folgt: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = ((-1)^{k-1}(k-x) \cdot e^{-x})'$

$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (-1) \cdot e^{x} + (-1)^{k-1} \cdot (k-x) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot e^x + (-1)^k \cdot (k-x) \cdot e^x = (-1)^k \cdot e^x \cdot (k+1-x)$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 14

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x)$

(2) Induktionsschritt:

Für ein $k \in \mathrm{IN}$ mit k≥ 1 gilt $f^{(k)}(x) = [x^2 + 2k \cdot x + k \cdot (k-1)] \cdot e^x$ (∗)

Zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = [x^2 + 2(k+1) \cdot x + (k+1) \cdot (k+1-1)] \cdot e^x$

D.h. $f^{(k+1)}(x) = [x^2 + 2(k+1) \cdot x + (k+1) \cdot k] \cdot e^x$

Es gilt: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$

Mit (∗) folgt: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = ([x^2 + 2k \cdot x + k \cdot (k-1)] \cdot e^x)'$

$f^{(k+1)}(x) = (2x + 2k) \cdot e^x + [x^2 + 2k \cdot x + k \cdot (k-1)] \cdot e^x$

$f^{(k+1)}(x) = [2x + 2k + x^2 + 2k \cdot x + k^2 - k] \cdot e^x = [x^2 + 2k \cdot x + 2x + k^2 + k] \cdot$

$f^{(k+1)}(x) = [x^2 + 2(k+1) \cdot x + (k+1) \cdot k] \cdot e^x$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 15

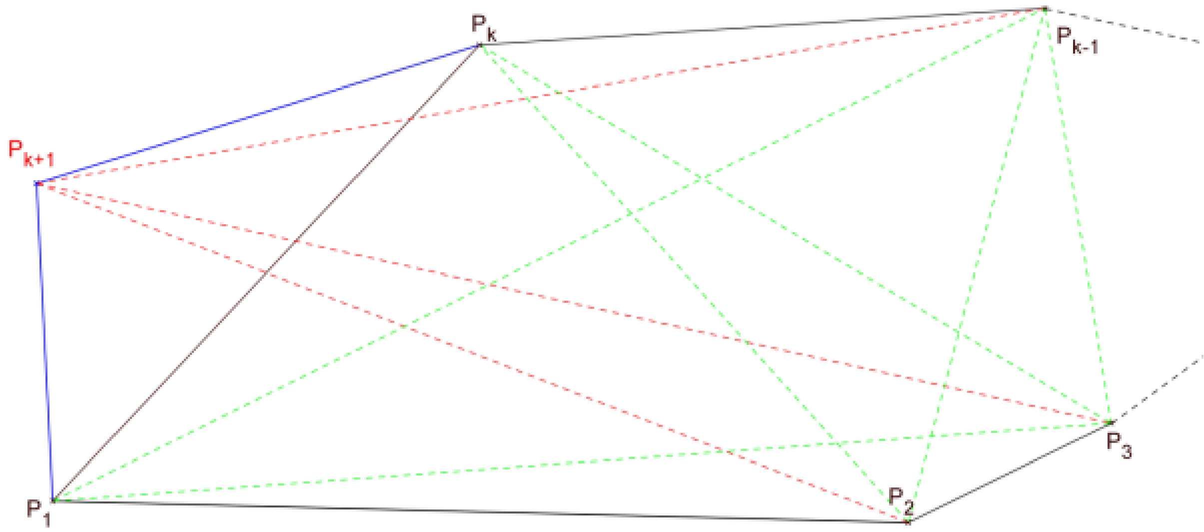
(1) Induktionsanfang: $n = 3$ ➔ $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3-3) = 0$

Da man in ein Dreieck keine einzige Diagonale einzeichnen kann, ist die Behauptung für $n = 3$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ mit k≥ 3 gilt für die Anzahl a_k der Diagonalen in einem konvexen k- Eck: $a_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k-3)$ $(*)$

Zu zeigen: Für die Anzahl a_{k+1} der Diagonalen in einem konvexen $(k+1)$- Eck gilt

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot (k-2).$$



Alle „alten" $a_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k-3)$ Diagonalen des k- Ecks sind auch Diagonalen des $(k+1)$ - Ecks. Es kommen aber noch „neue" Diagonalen hinzu.

Anzahl b_k der „neuen" Diagonalen, die hinzukommen:

Man kann die Verbindungsstrecke vom Punkt P_{k+1} zu allen k Punkten P_i mit $i \in \{1; 2; \ldots; k\}$ einzeichnen. Von diesen k verschiedenen Strecken sind zwei, nämlich $\overline{P_{k+1}P_1}$ und $\overline{P_{k+1}P_k}$, Seiten des $(k+1)$ – Ecks (also keine Diagonalen).

Allerdings wird die „alte" Seite $\overline{P_1P_k}$ jetzt zu einer Diagonalen.

➔ $b_k = k - 2 + 1 = k - 1$

Somit gilt: $a_{k+1} = a_k + k - 1 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k-3) + k - 1 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + k - 1$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k - 1 = \frac{1}{2} \cdot (k^2 - k - 2) = \frac{1}{2} \cdot (k-2) \cdot (k+1)$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

AUFGABE 16

(1) Induktionsanfang: $n = 1$

$\frac{1}{2} \cdot (1^2 + 1 + 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Da eine Gerade die Zeichenebene in genau zwei Gebiete zerlegt, ist die Behauptung für $n = 1$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ mit k≥ 1 gilt für die Anzahl a_k der Gebiete

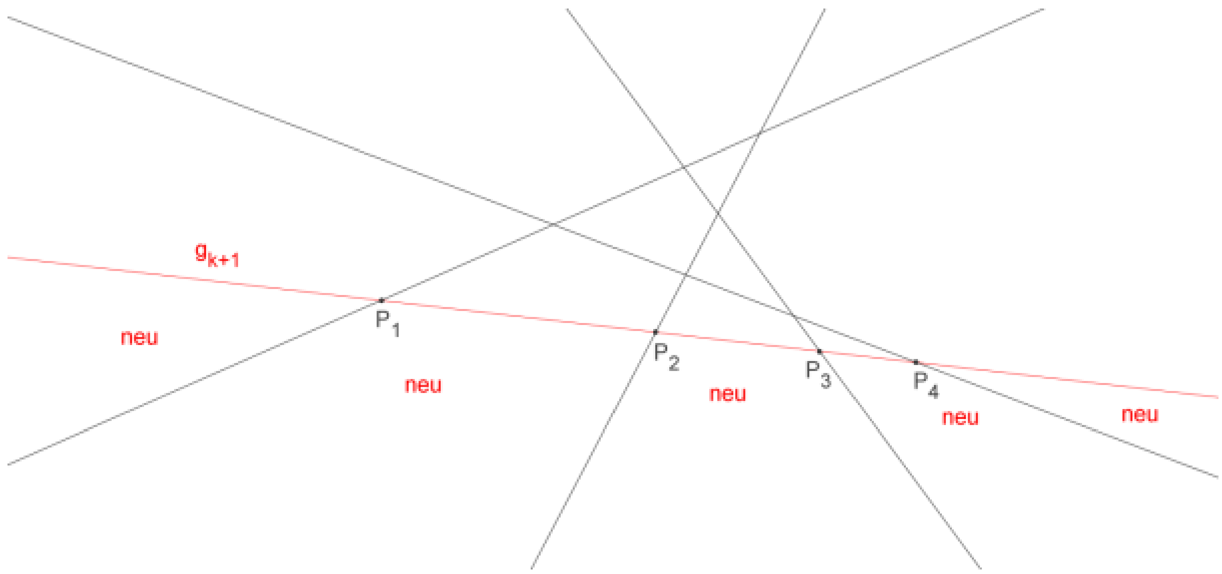
$$a_k = \frac{1}{2} \cdot (k^2 + k + 2) \quad (*)$$

Zu zeigen: Für die Anzahl a_{k+1} der Gebiete gilt:

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot ((k+1)^2 + (k+1) + 2) = \frac{1}{2} \cdot (k^2 + 3k + 4)$$

Die „neue“ Gerade g_{k+1} schneidet die bisherigen k Geraden in maximal k verschiedenen Punkten P_i mit $i \in \{1; 2; \dots; k\}$. Diese k Punkte unterteilen die Gerade g_{k+1} in maximal $k+1$ Teile (dies sind $k-1$ Strecken und zwei Halbgeraden). Diese $k+1$ Teile liegen in maximal $k+1$ Gebieten und zerlegen jedes dieser Gebiete in zwei Teile. Daher entstehen dadurch maximal $k+1$ „neue“ Gebiete.

Die Abbildung verdeutlicht die Situation für $k = 4$.



Somit gilt: $a_{k+1} = a_k + k + 1$

Mit $(*)$ folgt: $a_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (k^2 + k + 2) + k + 1 = \frac{1}{2} \cdot (k^2 + k + 2 + 2k + 2)$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (k^2 + 3k + 4)$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.