ZPG Vertiefungskurs Mathematik

Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „Taylorreihen“

Der vorgestellte Unterrichtsgang „Taylorreihen“ wurde in der Klassenstufe 12 in sechs Doppelstunden unterrichtet. Insgesamt war bei diesem inhaltlich eher schweren Thema der Anteil der Lehrervorträge relativ hoch im Vergleich mit den anderen Unterrichtseinheiten. Allerdings ist dies im Hinblick, dass der Vertiefungskurs Mathematik die Schülerinnen und Schüler auch auf die Vorlesungen an den Hochschulen vorbereiten soll, nicht von Nachteil. Bevor die Taylorreihen behandelt wurden, waren zunächst einige klassische Reihen und deren Grenzwerte betrachtet worden.

Taylorpolynome (benannt nach dem britischen Mathematiker Brook Taylor 1685 – 1731) dienen hauptsächlich dazu, beliebig oft differenzierbare Funktionen (sog. glatte Funktionen) beliebig genau approximieren zu können. Außerdem kann man mithilfe von Taylorpolynomen, durch gliedweises Integrieren, näherungsweise Integrale von Funktionen, deren Stammfunktion man nicht kennt, berechnen.

Das Polynom $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt Taylorpolynom vom Grad n mit der Entwicklungsmitte x_0. Falls man den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführt, erhält man die sog. Taylorreihe der Funktion f: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

Im Sonderfall $x_0 = 0$ spricht man auch von einer Maclaurinschen Reihe von f:
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ (Colin Maclaurin 1698 – 1746 war ein brit. Mathematiker)

In der ersten Doppelstunde wurde zunächst der Begriff der „Reihe“ grundlegend auf der Basis einer Folge (a_n) definiert. Die Schülerinnen und Schüler lernten eine Reihe als eine Folge von Teilsummen s_n von Folgegliedern a_n kennen. Anschließend wurden die Sonderfälle arithmetische und geometrische Reihe behandelt. Dabei ist insbesondere die Frage, ob und unter welcher Bedingung Grenzwerte dieser Reihen existieren untersucht worden. Dazu wurde die Beziehung $\sum_{k=0}^{n} a_1 \cdot q^k = a_1 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ im Plenum hergeleitet. Damit wurde dann für $|q| < 1$ eine Formel zur Berechnung des Grenzwerts einer geometrischen Reihe $\lim_{n\to\infty}\left(a_1 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = \frac{1}{1-q}$ gefunden. Abschließend wurde als Anwendung der geometrischen Reihen die Umwandlung einer periodischen Dezimalzahl (z.B. $0,\overline{28}$ und $0{,}4\overline{327}$) in einen Bruch thematisiert.

In der zweiten Doppelstunde wurde zunächst die Divergenz der harmonischen Reihe mithilfe des Minorantenkriteriums nachgewiesen. Anschließend wurde die Konvergenz einer Reihe mithilfe des Majorantenkriteriums begründet. Danach wurde noch das Leibniz- Kriterium für alternierende Reihen, die auf Nullfolgen beruhen, behandelt. Abschließend wurde mithilfe des WTR näherungsweise der Grenzwert der alternierenden Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ bestimmt (ln(2)).

In der dritten Doppelstunde wurde als Einstieg in das Thema „Taylorreihen“ die Frage gestellt: „Wie berechnet ein Taschenrechner Sinuswerte“? Dabei wurde den Schülerinnen und Schülern zuerst klar gemacht, dass einem Taschenrechner die Definition des Sinus als Verhältnis zweier Seiten nicht einprogrammiert werden kann. Da ein Taschenrechner eigentlich nur die Grundrechenarten ausführen kann, wurde das Ziel formuliert, die Sinusfunktion durch eine ganzrationale Funktion anzunähern.

Um den Schülerinnen und Schülern die Eleganz und die relativ einfache Bestimmung der Taylorpolynome (bzw. Taylorreihen) zu verdeutlichen, wurde zunächst eine Näherungsfunktion nach der bekannten Methode (Vorgabe von $n + 1$ Stützstellen) vorgenommen. Die dabei auftretenden linearen Gleichungssysteme sind mit wachsendem n immer aufwändiger zu lösen. Zudem müssen alle Koeffizienten bei jeder neuen Näherung (d.h. mit wachsendem n) neu berechnet werden.
Danach wurde in einem Lehrervortrag die Idee von Taylor erläutert, ein Näherungspolynom vom Grade n für sin(x) zu gewinnen. Dabei wurde die Entwicklungsmitte $x_0 = 0$ gewählt. Die Schülerinnen und Schüler waren zunächst sehr überrascht, dass man eine Funktion annähern kann, obwohl man nur Informationen von einer Stelle x_0 verwendet.
Anschließend wurden die Taylorpolynome für n = 3, 5, 7 und 9 bestimmt und die Güte der Näherungspolynome auch graphisch (GTR) veranschaulicht.
(Die ausführliche Durchführung wird in der Datei 04 beschrieben.)

In der vierten Doppelstunde wurde zunächst eine allgemeine Definition eines Taylorpolynoms mit der Entwicklungsmitte $x_0 = 0$ eingeführt. Anschließend wurde für das Beispiel $f(x) = \cos(\mathrm{x})$ der Übergang zur Taylorreihe vollzogen. Die Tatsache, dass man die Sinusfunktion durch ein Taylorpolynom beliebig genau approximieren kann, falls man nur n groß genug wählt, hat die Schülerinnen und Schüler sehr überrascht. Dann wurde die allgemeine Definition einer Taylorreihe einer Funktion f besprochen. Anschließend bestimmten die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit die Taylor-Reihen für $\cos(\mathrm{x})$ und e^{x} (siehe auch Datei 05). Dann wurde im Plenum das Problem erörtert, dass man für eine Taylorreihe für ln(x) nicht die Entwicklungsmitte $x_0 = 0$ verwenden kann. Dabei wurde den Schülerinnen und Schülern nicht von vorneherein die Schreibweise mit den Potenzen von $(x - x_0)$ vorgegeben. Erst im Laufe des Beispiels hatte sich diese Schreibweise als vorteilhaft herausgestellt (siehe auch Datei 06).

Zu Beginn der fünften Doppelstunde wurde die Konvergenz der Taylorreihe für $\ln(\mathrm{x})$ mit der Entwicklungsmitte $x_0 = 1$ ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (x-1)^k$) mithilfe des WTR untersucht und zudem mit einem GTR veranschaulicht. Anschließend wurde durch eine Substitution die Taylorreihe für $\ln(1 + \mathrm{x})$ gewonnen. Da die bisherigen Taylorreihen für den natürlichen Logarithmus, wegen deren langsamen Konvergenz, nicht besonders für die näherungsweise Berechnung von Logarithmuswerten geeignet sind, wurde im weiteren Verlauf des Unterrichts die effektivere Taylorreihe für $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ behandelt (siehe auch Datei 07).
Danach wurde in einem Lehrervortrag der Begriff des „Konvergenzradius“ einer Taylorreihe definiert und dessen mögliche Berechnung mithilfe des Quotientenkriteriums bzw. Wurzelkriteriums aufgezeigt. Abschließend wurde der Konvergenzradius der Taylorreihen von $\ln(\mathrm{x})$, e^{x} und $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ bestimmt (siehe auch Datei 08).

Die sechste Doppelstunde war eine reine Übungsstunde, in der die Schülerinnen und Schüler Aufgaben eines Aufgabenblattes zu den Taylorreihen (Datei 11) bearbeiteten. Die Lösungen dieser Aufgaben (Datei 21) lagen im Klassenraum zur Selbstkontrolle aus.