**Teilbarkeitsregeln – Lösungen**

**Satz:**

a) durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer gerade ist,

b) durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist,

c) durch 4 teilbar, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist,

d) durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist,

e) durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist,

f) durch 7 teilbar, wenn die Zahl durch 7 teilbar ist, die entsteht, wenn man das Doppelte der letzten Ziffer von der restlichen Zahl subtrahiert,

g) durch 8 teilbar, wenn die aus ihren letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist,

h) durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist,

i) durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist,

j) durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist,

(alternierende Quersumme von 353 408 = 3 – 5 + 3 – 4 + 0 – 8 = -11

von 27 095 = –2 + 7 – 0 + 9 – 5 =9)

k) durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.

**Beweis:**

Sei n eine natürliche Zahl. Diese habe im Dezimalsystem die Form anan-1…a2a1a0, wobei

a1, a2, …, an-1, an Ziffern aus der Menge {0; 1; 2; …; 9} sind.

Dann ist n = an ∙ 10n + an-1 ∙ 10n-1 + … a2 ∙ 102 + a1 ∙ 101 + a0 ∙ 100.

***1. Endstellenregeln***

a) n ≡ a0 ∙ 100 = a0 (mod 2)

Damit ist n genau dann durch 2 teilbar, wenn a0 durch 2 teilbar ist.

c)n ≡ a1 ∙ 10 + a0 (mod 4)

Damit ist n genau dann durch 4 teilbar, wenn a1 ∙ 10 + a0 durch 4 teilbar ist.

g)n ≡ a2 ∙ 102 + a1 ∙ 10 + a0 (mod 8)

Damit ist n genau dann durch 8 teilbar, wenn a2 ∙ 100+ a1 ∙ 10 + a0 durch 8 teilbar ist.

d) n ≡ a0 ∙ 100 = a0 (mod 5)

i) n ≡ a0 ∙ 100 = a0 (mod 10)

***2. Quersummenregeln***

b) Für jedes k ∈ N ist 10k ≡ 1k ≡ 1 (mod 3).

Damit ist n ≡ an + an-1 + … + a2 + a1 + a0 (mod 3).

h) Für jedes k ∈ N ist 10k ≡ 1k ≡ 1 (mod 9).

Damit ist n ≡ an + an-1 + … + a2 + a1 + a0 (mod 9).

***3. Kombinationen***

e) Wenn n durch 2 und durch 3 teilbar ist, folgt: Wegen 3|n gibt es k ∈ N mit n = 3∙k.

Es muss 2|k gelten, sonst wäre n nicht durch 2 teilbar. Also gibt es l ∈ N mit k = 2∙l.

Somit: n = 3∙k = 2∙3∙l = 6∙l. Also 6 | n.

Wenn n durch 6 teilbar ist, gibt es m ∈ N mit n = 6m. Also ist n durch 2 und durch 3 teilbar.

k) Wenn n durch 3 und durch 4 teilbar ist, folgt: Wegen 3|n gibt es k ∈ N mit n = 3∙k.

Es muss 4|k gelten, sonst wäre n nicht durch 4 teilbar. Also gibt es l ∈ N mit k = 4∙l.

Somit: n = 3∙k = 3∙4∙l = 12∙l. Also 12 | n.

Wenn n durch 12 teilbar ist, gibt es m ∈ N mit n = 12m. Also ist n durch 3 und durch 4 teilbar.

***4. Sonstige Regeln***

f) Wir schreiben n = m ∙ 10 + a0

n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn 2∙n durch 7 teilbar ist.

2∙n = 20 ∙ m + 2∙a0 = 21 ∙ m – m + 2∙a0 = 21 ∙ m – (m – 2∙a0).

Da 21∙m durch 7 teilbar ist, folgt:

n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn m – 2∙a0 durch 7 teilbar ist.

j) Es ist 10 ≡ –1 (mod 11). Also ist 10k ≡ (-1)k (mod 11) für jedes k ∈ N.

Für gerades k ist also 10k ≡ 1 (mod 11) und für ungerades k ist 10k ≡ –1 (mod 11).

Wenn n gerade ist, gilt n ≡ an – an-1 + … + a2 – a1 + a0 (mod 11).

Wenn n ungerade ist, gilt n ≡ –an + an-1 – … + a2 – a1 + a0 (mod 11).

**Aufgaben zu den Teilbarkeitsregeln – Lösungen**

**1.**  a)

a) 1540 = 22 ∙ 5 ∙ 7 ∙ 11 b) 1 623 272 = 2∙2∙2∙7∙7∙41∙101

c) 13 678 500 = 2∙2∙3∙5∙5∙5∙11∙829 d) 123 456 789 = 3∙3∙3607∙3803

**2.**

a) 0 oder 5 b) 7 + 5 + 9 + 4 + 2 + 0 = 27, also 3 c) 0 oder 6

d) 7 – 5 + 9 – 4 + 2 – 0 + 5 – 1 = 13, also 9

**3.** a) Gegenbeispiel: 116 ≡ 4 (mod 8) b) Gegenbeispiel: 12 c) Gegenbeispiel: 22

**4.**

a) letzte 3 Ziffern 0 b) letzte beiden Ziffern durch 25 c) durch 4 und durch 5

d) durch 2 und durch 11