Aufgabe 1

Der folgende Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist unvollständig. Vervollständigen Sie den Beweis an den beiden mit […] markierten Stellen:

> Nehmen wir an, $\sqrt{2}$ wäre rational. Es gibt also natürliche Zahlen m und n, so dass $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ gilt und der Bruch $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist. Es gilt nun auch $\sqrt{2} = \frac{2n-m}{m-n}$, was man wie folgt zeigen kann:
>
> […]
>
> Der Bruch $\frac{2n-m}{m-n}$ hat aber einen kleineren Nenner als $\frac{m}{n}$, was sich wie folgt begründen lässt:
>
> […]
>
> Dass $\frac{2n-m}{m-n}$ einen kleineren Nenner als $\frac{m}{n}$ hat, ist ein Widerspruch dazu, dass $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist. Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

Aufgabe 2

Gegeben ist der folgende Satz:

Es gibt irrationale Zahlen a und b, so dass a^b rational ist.

Beweisen Sie den Satz, indem Sie die Zahl $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ betrachten und die Fälle „$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational“ und „$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist irrational“ unterscheiden.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine ganze Zahl a. Der folgende Satz soll untersucht werden: „Ist a^2 nicht durch 4 teilbar, so ist a ungerade.“

a) Geben Sie Voraussetzung und Behauptung des Satzes an.

b) Bilden Sie die Kontraposition.

c) Beweisen Sie den Satz.

Aufgabe 4

Der Sheffer-Strich „|" sei wie folgt definiert: Für zwei Aussagen A und B habe $A|B$ die gleichen Wahrheitswerte wie $\neg(A \wedge B)$. Der Junktor | wird auch „nand" genannt (<u>n</u>ot <u>and</u>).

a) Stellen Sie die Wahrheitswerttafel von | auf.

b) Man kann $\neg$ durch alleinige Verwendung von | ausdrücken. Es gilt nämlich

   $\neg A \;\Leftrightarrow\; A|A$.

   Beweisen Sie diese Äquivalenz.

c) Zeigen Sie, dass man auch $\wedge$ durch alleinige Verwendung des Sheffer-Strichs | ausdrücken kann, wobei der Sheffer-Strich | mehrfach vorkommen darf.

d) Zeigen Sie, dass man auch $\vee$ durch alleinige Verwendung des Sheffer-Strichs | ausdrücken kann, wobei der Sheffer-Strich | mehrfach vorkommen darf.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen z die Gleichung

$$\mathrm{Im}(z + \mathrm{Re}(z)i) = \mathrm{Re}\big(z + \mathrm{Im}(z)\big)$$

gilt.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie $(1+i)^2$; $(1+i)^4$; $(1+i)^6$ und $(1+i)^8$.

b) Eine *rein imaginäre Zahl* ist eine komplexe Zahl, deren Realteil gleich null ist.
   Man kann $(1+i)^{2n}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ als Potenz einer rein imaginären Zahl darstellen.
   Bestimmen Sie eine solche Darstellung.

Aufgabe 7

a) Berechnen Sie den Wert des Terms

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(k \binom{n}{k} \right)$$

für $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$ und $n = 4$.
Welchen Wert des oben stehenden Terms vermuten Sie auf Grund der von Ihnen berechneten Beispielwerte allgemein für eine beliebige natürliche Zahl $n > 0$?

b) Wie lautet der Binomische Lehrsatz?

c) Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \binom{n}{k} \right) = 0$$

mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.