**Vertiefungskurs Mathematik**

**Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 02.10.2015**

**AUFGABE 1**

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

β

α

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | A ⇒ B | ¬ (A ⇒ B) | ¬ B | A ᴧ ¬ B | α ⇔ β |
| w | w | w | f | f | f | w |
| w | f | f | w | w | w | w |
| f | w | w | f | f | f | w |
| f | f | w | f | w | f | w |

 Somit liegt eine Tautologie vor und die Äquivalenz ist bewiesen.

b) verbale Lösung(\*):

R ist unschuldig.

Damit schließt man aus „Wenn S schuldig ist, ist R schuldig“, dass S unschuldig ist. (Kontraposition).

Da S unschuldig ist, ist Q schuldig.

Damit schließt man aus „Wenn P unschuldig ist, ist Q unschuldig und R schuldig“, dass P schuldig ist. (Kontrapositition).

formale Lösung(\*):

P bedeutet „P ist schuldig“, usw.

Aussagen des Textes: (1)  

 (2) 

 (3) 

 (4)  ist eine wahre Aussage.

Kontraposition von (3): 

daraus folgt mit (4):  ist wahr.

daraus folgt mit (2):  ist wahr.

Kontraposition von (1): 

diese mit DeMorgan: 

daraus folgt z.B. mit (4): P ist wahr.

Ergebnis: P und Q sind schuldig, S und R sind unschuldig.

(\*) Es genügt einer der beiden obigen Lösungswege.

**AUFGABE 2**

a) Eine Folge  heißt beschränkt, falls es eine reelle Zahl M gibt , so dass  für alle gilt.

b1) Voraussetzung:  ist eine Nullfolge und  ist eine beschränkte Folge.

 Behauptung:  ist eine Nullfolge.

b2) Wenn  eine Nullfolge ist, so ist  eine Nullfolge und  eine beschränkte Folge.

b3) Die Umkehrung von (\*) ist falsch.

 Mögliche Begründungen: Angabe eines Gegenbeispiels, z.B.

* ; 
Hier haben die Folgen  und  die „Rollen“ getauscht:  ist beschränkt und  ist eine Nullfolge.
* 
Hier ist  unbeschränkt, aber die Folge  ist „stärker“, so dass  für .
* 
Hier ist  keine Nullfolge und unbeschränkt;  ist beschränkt und Nullfolge und „stärker“, so dass  für .

Anmerkung: Es genügt die Angabe eines Beispiels, ohne den erläuternden Satz.

b4) Beweis:

Da  beschränkt ist, gibt es eine Zahl , so dass  für alle .

Also kann man im Produkt jedes Folgenglied  durch M ersetzen, und dann gilt:

 

Nun prüft man, ob auch  eine Nullfolge ist.

zu zeigen: Für jede (noch so kleine) Zahl  gibt es eine Nummer , so dass für alle  gilt:

  (1)

  da 

  (2)

Da  eine Nullfolge ist, gibt es eine Nummer , so dass die Ungleichung (2) für alle  erfüllt ist. Für diese *n* ist auch die Ungleichung (1) erfüllt und somit ist eine Nullfolge. □

**AUFGABE 3**

a) zu zeigen: Für alle  gilt: 

Umgeschrieben: 

Induktionsanfang: 

linke Seite: 

sind gleich.

rechte Seite: 

Induktionsschritt: Annahme: Es gelte für ein  mit :

 

 zu zeigen ist: Dann gilt auch:

 

 Beweis: 

 

 

Induktionsschluss: Damit gilt die Behauptung für alle .

b1)  = 

 =  ; S1,S2 seien Polynome in n höchstens vom Grad 4

 =   

(\*) Grenzwertsätze für die Summe und den Quotienten konvergenter Folgen.

b2) 

 = 

 = 

 = 

 = 

 = 

Die letzte Gleichung folgt mit  und  und den Grenzwertsätzen für Summen und Quotienten konvergenter Folgen.

**AUFGABE 4**

a)  

 

bei Gleichheit: Nullstellen: 

 ist eine nach oben geöffnete Parabel, also 

b)  

1. Fall: , also 

 

 

 

  (Vieta)

Skizze:

 

2. Fall: , also 

 

 …

 

Skizze:

 

Lösung: 