**Vertiefungskurs Mathematik**

**Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 07.10.2016**

**AUFGABE 1**

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | ¬B | ¬A | ¬B → ¬A | A ∧ (¬B → ¬A) | (A ∧ (¬B → ¬A)) → B |
| w | w | f | f | w | w | w |
| w | f | w | f | f | f | w |
| f | w | f | w | w | f | w |
| f | f | w | w | w | f | w |

Somit liegt eine Tautologie vor.

b) Aus (A) und (C) folgt, dass Ralf unschuldig ist. Denn wäre Ralf schuldig, dann folgt aus (C), dass auch Paula schuldig ist. Dagegen folgt aus (A), dass Paula unschuldig ist. Also ergibt die Annahme, Ralf wäre schuldig, ein Widerspruch.

Da Ralf unschuldig ist, folgt aus (B), dass Quentin schuldig ist.

Daraus folgt mit (A), dass Paula unschuldig ist.

Ergebnis: Quentin ist schuldig, Ralf und Paula sind unschuldig.

**AUFGABE 2**

a) konvergiert gegen a, genau dann, wenn zu jedem ein existiert mit: Für alle mit ist .

b) Es ist . Es gilt genau dann, wenn .

Sei . Dann gilt für alle mit : .

Somit ist 0 der Grenzwert der Folge .

c) Aus folgt . Aus folgt . (\*)

Es ist .

Mit der Dreiecksungleichung und (\*) folgt:

(\*\*)

Sei . Da nach b) eine Nullfolge ist, existiert , so dass für alle   
 mit gilt: . (\*\*\*)

Da nach Voraussetzung gegen a konvergiert, existiert , so dass für alle mit gilt: . (\*\*\*\*)

ist die größere der beiden Zahlen und . Dann gilt nach (\*\*), (\*\*\*) und (\*\*\*\*) für alle mit : .

Folglich konvergiert gegen .

d) Es ist für .

Für gilt also mit den Grenzwertsätzen: .

Wenn n gerade ist, ist . Da folgt   
.

Wenn n ungerade ist, ist . Damit ist und somit auch .

Also gilt immer und wenn man und   
 setzt, ist .

Damit folgt aus c): für .

Insgesamt gilt mit dem Grenzwertsatz für die Summe:   
 für .

**AUFGABE 3**

a) 1. Fall: : Dann ist und

Also ist .

2. Fall: : Dann ist und

Also ist .

3. Fall: : Dann ist und

Also ist .

Somit ergibt sich der folgende Graph.



b) 1. Möglichkeit: rechnerisch:

Man betrachtet dieselben Fälle wie in a)

1. Fall: : Dann ist .   
Die Gleichung hat die Lösung .

2. Fall: : Dann ist .   
Die Gleichung hat die Lösung .

3. Fall: : Dann ist . Die Gleichung hat die Lösung .

2. Möglichkeit: zeichnerisch:

Einzeichnen der Geraden mit der Gleichung

****

Die x-Werte der Schnittpunkte sind abgelesen: und .

Durch Einsetzen erkennt man, dass diese Werte exakt sind:

.

Da es sich bei dem Graphen von um eine Gerade handelt, gibt es keine weiteren Schnittpunkte außerhalb des gezeichneten Bereichs.

Somit sind die Lösungen der Gleichung und .

c) Die Schnittstellen zwischen dem Graphen von f und der Geraden sind nach b)

und . Man erkennt an der Zeichnung, dass der Graph von f unterhalb oder auf der Geraden verläuft in den Intervallen: und . Damit ist die Lösungsmenge der Gleichung: .

**AUFGABE 4**

a) Eine äußere Seite der Figur in Schritt hat Kreise. Eine äußere Seite der Figur in Schritt hat also Kreise. Von Schritt auf Schritt kommen 6 Seiten dazu. Die Anzahl der hinzukommenden Kreise ist jedoch kleiner als . Denn benachbarte äußere Seiten haben einen Kreis gemeinsam. Somit werden bei dem Term genau Kreise doppelt gezählt.

Von Schritt auf Schritt kommen also Kreise hinzu und es gilt: .

b) zu zeigen: Für gilt: .

**Beweis durch vollständige Induktion:**

*Induktionsanfang* : Es ist und . Also gilt die Formel für .

*Induktionsschritt:* Die Formel gelte für .

Induktionsvoraussetzung (IV): .

Zu zeigen ist, dass die Formel dann auch für gilt:

Es gilt

.

Nach a) ist .

Mit der IV folgt

.

Somit gilt die Formel auch für .

*Induktionsschluss:* Damit ist die Formel für alle bewiesen.

c) zu zeigen: Für mit gilt:

(Für ist die Formel nicht sinnvoll. Zwar ist die leere Summe als 0 definiert und somit wäre die Formel auch dann korrekt. Aber …)

**Beweis durch vollständige Induktion:**

*Induktionsanfang* : Es ist und . Also gilt die Formel für .

*Induktionsschritt:* Die Formel gelte für .

Induktionsvoraussetzung (IV): .

Zu zeigen ist, dass die Formel dann auch für gilt:

Es ist . Mit der IV und b) ergibt sich:

.

Außerdem ist

.

Damit ergibt sich . Somit gilt die Formel auch für .

*Induktionsschluss:* Damit ist die Formel für alle mit bewiesen.