**Vertiefungskurs Mathematik**

**Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 27.09.2019**

**AUFGABE 1**

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

β

α

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | A ⇒ B | ¬ A | ¬ A ∨ B | α ⇔ β |
| f | f | w | w | w | w |
| f | w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | f | w |
| w | w | w | f | w | w |

Somit liegt eine Tautologie vor und die Äquivalenz ist bewiesen.

b) Aus b2) und b4) folgt, dass A nicht James heißen kann.

Mit b1) folgt dann sofort, dass **A Alexander** heißen muss.

Daher heißt B nicht Alexander und mit b3) folgt, dass **C Pjotr** heißt.

Demnach heißt B auch nicht Pjotr. Daher folgt mit b5), dass B auch nicht Francois

heißt. Also bleibt für **B** nur noch der Name **James** übrig.

Somit bleibt für **D** nur noch der Name **Francois** übrig.

Ergebnis:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D |
| Alexander | James | Pjotr | Francois |

**AUFGABE 2**

a1) Für jedes gibt es ein , so dass für alle gilt:

a2) Voraussetzung: Für jedes gibt es ein , so dass für alle gilt:

Behauptung: Für alle gilt

(s ist eine untere Schranke; S ist eine obere Schranke)

Beweis: Da die Folge konvergent ist, gilt für jedes und alle :

Somit folgt z.B. für sofort

Das heißt, alle mit liegen im Intervall .

Somit liegen unendliche viele Folgeglieder im „ε - Schlauch“ um a.

Sei und

sei

Hinweis: Auf einer endlichen Zahlenmenge wird das Minimum und das Maximum

stets angenommen.

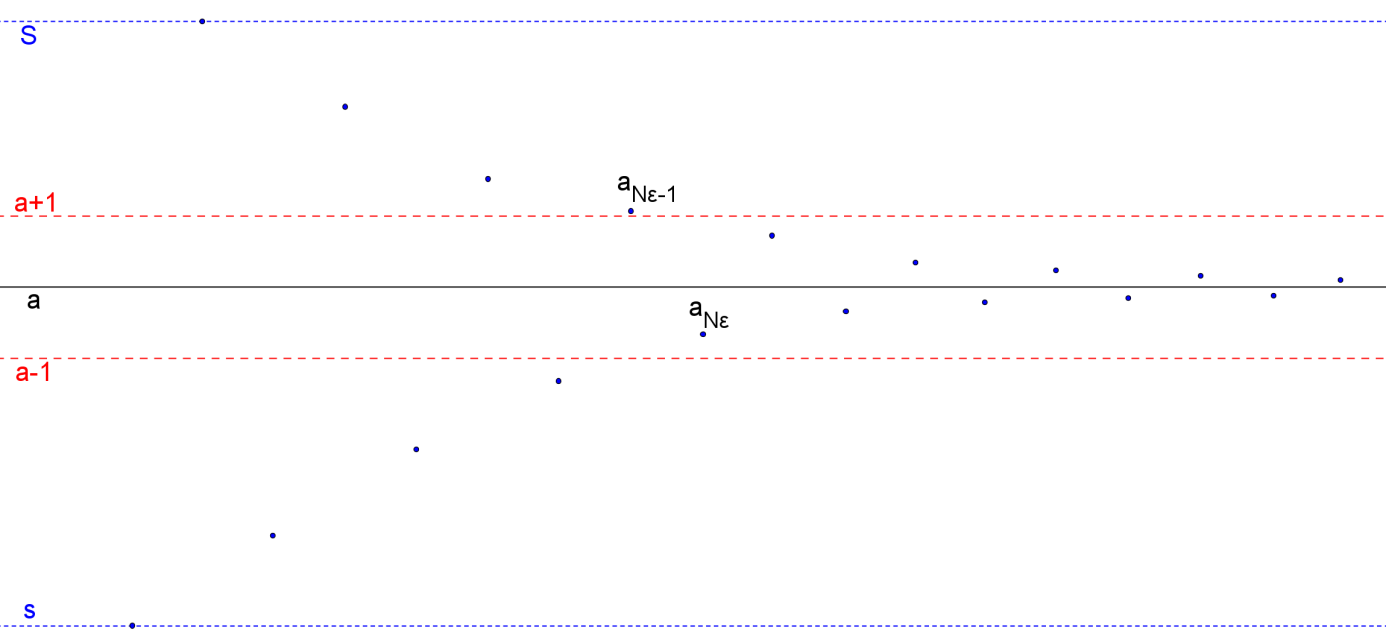
Somit gilt für alle mit :

Da und gilt, folgt auch für alle mit :

Somit gilt für alle :

Hinweis: Dies ist eine Definition der Beschränktheit von .

Die Abbildung veranschaulicht die Situation an einem Beispiel:



a3) Der Kehrsatz lautet:

Ist eine Folge beschränkt, dann ist sie auch konvergent.

Der Kehrsatz ist eine falsche Aussage, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Es gilt , demnach ist beschränkt. Aber besitzt offensichtlich keinen Grenzwert.

Alternatives Gegenbeispiel:

b) Den Wurzelterm kann man zunächst, wegen der Differenz, nicht vereinfachen.

Mithilfe der 3.binomischen Formel kann man den Term durch Erweitern umformen.

Kürzt man diesen Bruch jetzt mit n, dann folgt:

Für gilt .

Damit folgt mit den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen:

sowohl

als auch

**AUFGABE 3**

a)1) Induktionsanfang:

Somit ist die Behauptung für nachgewiesen.

2) Induktionsschritt: Für ein mit gilt:

Zu zeigen ist:

wegen

Die 3.binomische Formel und die Potenzgesetze liefern:

3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung für alle .

b) Sei 🡺

Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der Faktoren

Null ist.

Somit hat genau die beiden Nullstellen und .

Für gilt:

Auch dieses Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Die beiden ersten Klammern können den Wert Null annehmen.

🡺 und sind Nullstellen von .

Die restlichen Klammern haben alle die Form:

für

Da gilt (Quadrate sind nie negativ), folgt

für alle .

Daher nehmen alle Klammern, außer den beiden ersten Klammern, nie den Wert

Null an.

Somit haben alle nur die Nullstellen und .

**AUFGABE 4**

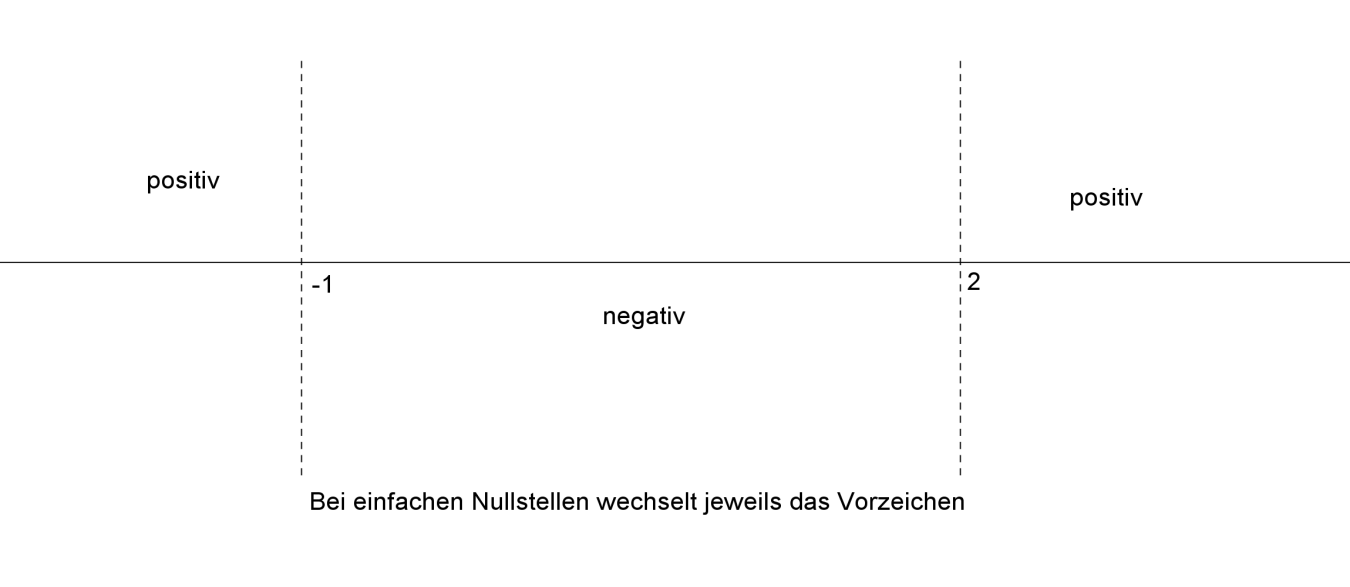
a) Um die Ungleichung umzuformen, muss man mit dem Nenner des Bruches

multiplizieren. Somit muss man sich zuerst Klarheit über das Vorzeichen des

Nenners für verschiedene Werte von x machen.

Die (einfachen) Nullstellen des Nenners lauten: ;

Die Abbildung zeigt eine Gebietseinteilung für das Vorzeichen des Nenners:



Fall 1:

Multiplizieren mit dem negativen Nenner liefert:

🡺 🡺

Fall 2: oder

Multiplizieren mit dem positiven Nenner liefert:

🡺 🡺

🡺

b) Zunächst muss man auf der linken Seite der Gleichung die beiden Brüche so

erweitern, dass sie den gemeinsamen Nenner besitzen.

Da die beiden Terme äquivalent sein sollen (d.h. für alle x den gleichen Wert liefern) müssen die Koeffizienten gleich sein.

Somit erhält man folgendes LGS für A und B:

Aus folgt bzw.

Einsetzen in liefert:

c) Nullstellen: Ein Bruch nimmt den Wert Null an, falls sein Zähler Null wird.

Aus folgt ist die einzige Nullstelle von f.

Da eine einfache Nullstelle ist, wechselt das Vorzeichen von f an der Nullstelle.

Aus der Teilaufgabe a) kennt man den Bereich, indem die Funktionswerte von f negativ sind.

Zudem sind die beiden Definitionslücken und von f Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Somit hat der Graph von f die beiden senkrechten Asymptoten

und .

Waagrechte Asymptote (Da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.)

Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt 🡺

Die Abbildung zeigt den Graphen von f einschließlich dessen Asymptoten:

