Flächen kreativ – Trinkbecher – Origami

Hinweise für die Lehrkraft

Dieses Arbeitsblatt knüpft an die Aufgabe „Origami – Flächen kreativ“ an, die in der Handreichung für die Klasse 8 des 6BG veröffentlicht wurde: lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/bs/6bg/fb1/6geometrie/2origami/

Die Aufgabe war:

- Du brauchst quadratisches Papier. Die Vorderseite soll farbig sein, die Rückseite weiß.
- Falte Figuren, bei denen die weiße und die farbige Fläche(n) den gleichen Flächeninhalt haben.

Jetzt geht es darum, bei dem gefalteten „Trinkbecher“ zu zeigen, dass die farbige Fläche den gleichen Inhalt hat wie die weiße Fläche. Eine Behandlung der Aufgabe aus Klasse 8 ist nicht unbedingt für die Erarbeitung dieses Arbeitsblattes erforderlich.

Die Schülerinnen und Schüler benötigen jeweils mindestens ein quadratisches Papier mit unterschiedlichen Farben auf der Vorder- und auf der Rückseite.

Flächen kreativ – Trinkbecher – Origami

Julia hat aus einem quadratischen Papier einen „Trinkbecher“ gefaltet und behauptet, dass die rote sichtbare Fläche den gleichen Flächeninhalt hat wie die weiße Fläche. Tobias glaubt das nicht, denn schließlich sehen die beiden Flächen sehr verschieden aus.

Tobias faltet den Trinkbecher mit Hilfe der folgenden Anleitung nach, um der Sache auf den Grund zu gehen:

- Falte zwei gegenüberliegende Ecken des Quadrats aufeinander, so dass eine Diagonale entsteht. Du erhältst ein Dreieck.
- Lege die Diagonale nach unten. Falte nun die Winkelhalbierende zwischen der Diagonalen und einer Seite und falte sie wieder auseinander.
- Nimm den Eckpunkt der Winkelhalbierenden und falte diese Spitze auf die gegenüberliegende Seite auf die Stelle, wo die Winkelhalbierende auf die Seite trifft.
- Nimm den anderen Eckpunkt mit dem spitzen Winkel und falte ihn genauso zur gegenüberliegenden Seite.
- Falte jetzt das oben liegende Blatt der oberen Ecke mit dem rechten Winkel nach vorne auf den Kreuzungspunkt der entstandenen Kanten.
- Falte das unten liegende Blatt entsprechend nach hinten.
- Der Trinkbecher ist fertig! Wird der Trinkbecher aufgebogen, lässt er sich wirklich als Trinkbecher benutzen.

Hat Julia Recht? Begründe ausführlich.

Flächen kreativ – Trinkbecher – Origami – Lösung

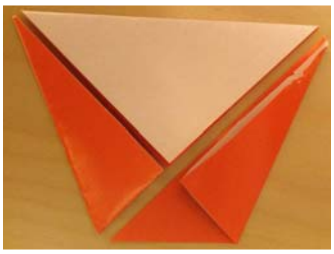
Julia hat Recht. Es gibt viele Möglichkeiten die Behauptung zu beweisen. Zwei Beispiele:

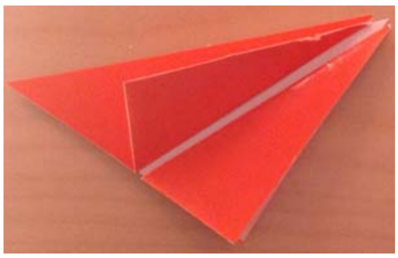
Bezeichnungen:

- a ist eine Kathete des weißen rechtwinkligen Dreiecks.
- x ist eine Kathete des kleinen roten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks.
- b ist die Hypotenuse des weißen Dreiecks.

Beweis rechnerisch	**Erläuterungen**
$A_{weiß} = \frac{1}{2}a^2$	
	Die rote Fläche besteht aus zwei kongruenten Dreiecken und dem kleinen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck.
$A_{rot} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2$	ausklammern
$= \frac{1}{2}\left(ax + ax + x^2\right)$	zusammenfassen
$= \frac{1}{2}\left(2ax + x^2\right)$	
$A_{weiß+rot} = \frac{1}{2}\left(a^2 + 2ax + x^2\right)$	faktorisieren mit der 1. Binomischen Formel
$= \frac{1}{2}(a+x)^2$	Aufgrund der Symmetrie im Zusammenhang mit der Winkelhalbierenden gilt: a + x = b
$= \frac{1}{2}b^2$	Durch Anwenden des Satzes des Pythagoras im weißen Dreieck gilt: $2a^2 = b^2$
$= \frac{1}{2} \cdot 2a^2$	vereinfachen
$= a^2$	Die weiße Fläche ist halb so groß wie die gesamte sichtbare Fläche des Trinkbechers, also ist die rote Fläche genauso groß wie die weiße Fläche.

Beweis geometrisch durch Auseinanderschneiden und Aufeinanderlegen:





Die in zwei Teile geschnittenen roten Flächen zusammen und die weiße Fläche sind jetzt deckungslgeich.