**Vertieft verständnisorientierte Übungsaufgaben aus der Analysis**

**Lösungen**

**AUFGABE 1** Gegeben ist eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion g und eine Funktion h mit und .

a) Sei g eine lineare, nicht konstante Funktion.

 Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Funktion h ebenfalls eine lineare

 nicht konstante Funktion ist.

 Es gilt mit .

 🡺

 h ist genau dann eine lineare Funktion, die nicht konstant ist falls gilt:

 und

 🡺

 🡺 🡺 🡺

 h ist genau dann eine lineare nicht konstante Funktion, falls gilt:

 mit

b) Sei der Graph von g und der Graph von h. Es gilt: mit

 Für ein c schneiden sich und senkrecht in S.

 Bestimmen Sie c und zudem die Koordinaten von S.

 (1) 🡺

 (2) 🡺 🡺

 Einsetzen in (1) liefert: 🡺 🡺 🡺

 Koordinaten von S:

c) Es gilt .

 Bestimmen Sie alle möglichen Werte von.

 🡺

 Vieta: 🡺 oder

d) Sei punktsymmetrisch zum Ursprung.

 Zeigen Sie, dass für alle Funktionswerte von g nicht negativ sind.

 Es gilt für alle .

Mit und folgt:

 🡺

Aus und folgt 🡺

Jedes kann als Quadrat eines interpretiert werden.

🡺

e) Sei .

 Bestimmen Sie und .

 🡺

 🡺 🡺 🡺 🡺

f) Begründen Sie, dass gilt: Aus folgt .

 Aus folgt: 🡺

 Da und das gleiche Quadrat besitzen, müssen sie den gleichen Betrag

 haben.

g) Sei h streng monoton wachsend und , zudem sei eine innere Stelle von I, die keine Wendestelle von h ist.

 Untersuchen Sie, ob g ebenfalls streng monoton wachsend sein kann.

 Aus folgt

 Da genau einer der beiden Faktoren positiv und der andere negativ sein muss, gilt:

 🡺

 Mit folgt

 Da h streng monoton wachsend ist, gilt .

 Somit folgt 🡺 g ist auf I nicht streng monoton wachsend.

**AUFGABE 2** Gegeben sind die auf dem gleichen Intervall I mindestens zweimal

differenzierbare Funktionen f und g.

Zudem die auf I definierte Funktion h mit .

a) Seien f und g jeweils lineare Funktionen.

 Zeigen Sie, dass dann auch h eine lineare Funktion ist.

 Es gilt bzw. .

 🡺

 Mit und folgt:

 Also ist h eine lineare Funktion.

b) Die Graphen der beiden linearen Funktionen f und g schneiden sich senkrecht auf

 der positiven y- Achse im Punkt S.

 Untersuchen Sie, ob der Graph von h ebenfalls durch den Punkt S verlaufen kann.

 Da sich und auf der positiven y- Achse schneiden, gilt:

 Für den Schnittpunkt gilt:

 Aus folgt zudem (I)

 Funktionsgleichung von h:

 Punktprobe für S: 🡺

 Mit folgt bzw. 🡺 Widerspruch zu (I)

 🡺 S kann nicht auf dem Graphen von h liegen.

c) Der Graph von f ist symmetrisch zur y- Achse.

 Untersuchen Sie, ob der Graph von h ebenfalls eine einfache Symmetrie

 besitzt.

 Es gilt für alle .

 🡺 für alle .

 Somit ist auch der Graph von h symmetrisch zur y- Achse.

d) Der Graph ist symmetrisch zur y- Achse.

 Untersuchen Sie, ob dann auch und symmetrisch zur y- Achse sein müssen.

 Gegenbeispiel: ; 🡺

 Der Graph von h ist offensichtlich symmetrisch zur y- Achse. Allerdings ist der

 Graph von g nicht symmetrisch zur y- Achse.

e) hat den Hochpunkt .

 Untersuchen Sie unter welchen Bedingungen h an der inneren Stelle

 ebenfalls ein lokales Maximum besitzt.

 Es gilt: , und

 🡺

 🡺

 🡺

 Damit ein lokales Maximum vorliegt, muss gelten:

 🡺

 Wegen muss sein.

**AUFGABE 3** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Sei f eine lineare, nicht konstante Funktion.

 Zeigen Sie, dass f und g die gleichen Nullstellen besitzen.

 Aus folgt 🡺 ist Nullstelle von g

b) Zeigen Sie, dass g ebenfalls eine lineare Funktion ist.

 mit 🡺

 ; somitist auch g eine lineare Funktion

c) Sei f eine Potenzfunktion mit mit .

 Bestimmen Sie r so, dass g eine konstante Funktion ist.

 🡺 🡺

 g ist genau dann eine konstante Funktion, falls gilt: 🡺

d) Sei g streng monoton wachsend.

 Untersuchen Sie, ob dann auch f streng monoton wachsend sein muss.

 Gegenbeispiel: 🡺 🡺

 g ist streng monoton wachsend auf ganz IR, aber f nicht.

**AUFGABE 4** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens dreimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Der Graph von g ist symmetrisch zum Ursprung.

 Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y- Achse ist.

 Es gilt für alle .

 ; 🡺 🡺 Da der Fall

 nicht relevant ist () gilt: für alle .

 Also ist der Graph von f symmetrisch zur y- Achse.

b) ist eine innere Stelle von I. Der Graph von g hat den Tiefpunkt .

 Zeigen sie, dass auch der Graph von f den Tiefpunkt T besitzt.

 🡺 🡺 🡺 T liegt auf dem Graphen von f.

 Da T Tiefpunkt des Graphen von g ist und gilt, wechselt g bei das

 Vorzeichen nicht. Das Vorzeichen von g ist auf einer Umgebung von x1 positiv.

 Aus und folgt: Auch f ist auf einer Umgebung von x1

 positiv. Somit ist auf einer Umgebung von der kleinste Funktionswert,

 also ein lokales Minimum.

 Somit ist T ebenfalls ein Tiefpunkt des Graphen von f.

c) Die Graphen von f und g schneiden sich im Punkt senkrecht.

 Zeigen sie, dass die Tangente in S an den Graphen von f parallel zur 1.Winkel-

 halbierenden ist.

 Es gilt: ;

 Mit folgt:

 🡺 🡺 🡺

 Somit hat die Tangente in S an den Graphen von f die Steigung 1 und ist parallel

 zur 1.Winkelhalbierenden.

d) f hat die innere Extremstelle .

 Zeigen Sie, dass g die innere Wendestelle besitzt.

 Es gilt: und hat bei einen Vorzeichenwechsel.

 🡺

 Da bei einen Vorzeichenwechsel hat, kann f ‘‘ bei keinen Vor-

 Zeichenwechsel haben.

 Da und bei den gleichen Vorzeichenwechsel haben, hat auch

 einen Vorzeichenwechsel bei . Also ist eine Wendestelle von g.

e) Es gilt

Begründen Sie, dass f auf dem Intervall mindestens eine Nullstelle besitzt.

 🡺

 🡺

 🡺 🡺 Somit haben und verschiedene Vorzeichen.

 Da f stetig ist, muss f im Intervall mindestens eine Nullstelle besitzen.

**AUFGABE 5** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f und der Graph von g mindestens einen Punkt

 gemeinsam haben.

 Es gilt:

 🡺 liegt auf beiden Graphen

b) Entscheiden sie, ob folgende Aussage wahr oder falsch ist (Begründen Sie!)

 „Wenn für alle Funktionswerte von f positiv sind, dann gilt

 für alle .“

 Es gilt: . Aus folgt, dass der Graph von f für

 oberhalb der x-Achse liegt und damit der Wert des Integrals positiv ist.

 🡺 🡺 für alle 🡺 Die Aussage ist wahr.

c) Es gilt . Sei t die Tangente an den Graphen von f im Punkt und t\*

 die Tangente an den Graphen von g im Punkt .

 Zeigen Sie, dass t und t\* parallel zueinander sind.

 Mit folgt:

 Somit haben die beiden Tangenten t und t\* die gleiche Steigung und sind dem-

 nach parallel zueinander.

d) Sei f eine periodische Funktion mit der Periode p, deren Mittelwert über eine

 Periode 0 ist.

 Zeigen Sie, dass die Funktion g ebenfalls eine periodische Funktion ist.

 Es gilt:

 Da der Mittelwert über eine Periode 0 ist, gilt: 🡺

 🡺

 🡺 🡺 g ist eine periodische Funktion.

**AUFGABE 6** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal

differenzierbare Funktion f, die auf I umkehrbar ist und die Funktion g mit

.

a) Der Graph von f hat im Punkt eine Tangente t mit der Steigung 0,5.

 Der Graph von hat im Punkt eine Tangente t\*.

 Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente t\*.

 Da der Graph von durch Spiegelung des Graphen von f an der 1.Winkelhalbier-

 enden entsteht, entsteht auch t\* durch Spiegelung von t an der 1.Winkelhalbieren-

 den. Somit beträgt deren Steigung .

b) Es gilt . Die Graphen von f und berühren sich im Punkt .

 Bestimmen Sie die Steigung der gemeinsamen Tangente im Punkt B.

 Es gilt und . Zudem gilt .

 🡺 🡺 🡺

 Die Steigung beträgt also oder .

c) Es gilt .

 Begründen Sie, das g die Nullstelle 4 besitzt.

 Es gilt: 🡺 ; Also ist 4 eine Nullstelle von g.

d) Sei f eine lineare Funktion mit und .

 Begründen Sie, dass g höchstens eine Nullstelle besitzen kann.

 mit ( m ; c ) ≠ ( 1 ; 0 ) und m ≠ – 1. Da f umkehrbar ist, gilt .

 🡺

 🡺 .

 Fall1: m = 1 ; c ≠ 0 🡺 🡺 g hat keine Nullstelle.

 Fall 2: m ≠ ± 1, 🡺 g hat genau eine Nullstelle.

 Alternative Begründung:

 Fall 1: mit c ≠ 0

 Der Graph von f ist parallel zur 1.Winkelhalbierenden 🡺 Die Graphen von f und

 schneiden sich nicht 🡺 für alle 🡺 g hat keine Nullstelle.

 Fall 2: mit m ≠ ±1

 Der Graph von f ist weder parallel noch senkrecht zur 1.Winkelhalbierenden

 🡺 Die Graphen von f und schneiden sich genau im Punkt auf der

 1.Winkelhalbierenden.

 🡺 🡺 🡺 g hat genau die Nullstelle .