**Vertieft verständnisorientierte Übungsaufgaben aus der Geometrie**

**Lösungen**

**AUFGABE 1** Gegeben sind die Punkte $A\left(4 |-2 |1\right)$, $B\left(3 | 5 |3\right)$ und $C\left(-2 \left| 4 \right| 4\right)$.

a) Begründen Sie, dass das Dreieck ABC nicht zu einer Raute ABCD ergänzt werden

 kann.

 Es gilt $\vec{AB}=\left(\begin{array}{c}-1\\7\\2\end{array}\right)$ und somit $\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-1)^{2}+7^{2}+2^{2}}=\sqrt{54}=3∙\sqrt{6}$ .

 Es gilt $\vec{BC}=\left(\begin{array}{c}-5\\-1\\1\end{array}\right)$ und somit $\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{(-5)^{2}+(-1)^{2}+1^{2}}=\sqrt{27}=3∙\sqrt{3}$ .

 Es gilt $\vec{AC}=\left(\begin{array}{c}-6\\6\\3\end{array}\right)$ und somit $\left|\vec{AC}\right|=\sqrt{(-6)^{2}+6^{2}+3^{2}}=\sqrt{81}=9$ .

 Da alle drei Vektoren eine unterschiedliche Länge besitzen, kann das Dreieck ABC

 nicht zu einer Raute ergänzt werden.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein

 Drachenviereck ist.

 Gesucht ist ein Punkt D in der Ebene ABC mit der Eigenschaft, dass B und D

 achsensymmetrisch zur Diagonalen AC liegen.

 Sei P ein beliebiger Punkt auf AC, dann gilt: $\vec{p}=\vec{a}+r∙\vec{AC}=\left(\begin{array}{c}4\\-2\\1\end{array}\right)+r∙\left(\begin{array}{c}-6\\6\\3\end{array}\right)$

 Also $P\left(4-6r |-2+6r |1+3r\right)$. Es muss gelten: $\vec{BP} ∙ \vec{AC}=0$

 $\vec{BP} ∙ \vec{AC}=\left(\begin{array}{c}1-6r\\-7+6r\\-2+3r\end{array}\right)∙\left(\begin{array}{c}-6\\6\\3\end{array}\right)=-6+36r-42+36r-6+9r=81r-54=0$

 🡺 $r=\frac{54}{81}=\frac{2}{3}$ 🡺 $P\left(0 \left| 2 \right| 3\right)$

 P ist die Mitte der Strecke BD 🡺 $\vec{d}=\vec{b}+2∙\vec{BP}=\left(\begin{array}{c}3\\5\\3\end{array}\right)+2∙\left(\begin{array}{c}-3\\-3\\0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-3\\-1\\3\end{array}\right)$

 🡺 $D\left(-3 \left| -1 \right| 3\right)$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Drachenvierecks.

 Es gilt $A=\frac{1}{2}∙\left|\vec{AC}\right|∙\left|\vec{BD}\right|$. Mit $\vec{BD}=\left(\begin{array}{c}-6\\-6\\0\end{array}\right)$ folgt $\left|\vec{BD}\right|=\sqrt{(-6)^{2}+(-6)^{2}+0^{2}}=6∙\sqrt{2}$

 🡺 $A=\frac{1}{2}∙9∙6∙\sqrt{2}=27∙\sqrt{2}$

d) Für den Punkt $D\left(-3 |-1 |3\right)$ ist das Viereck ABCD ein Drachenviereck.

 Auf der Geraden AC gibt es einen Punkt E so, dass das Viereck ABED eine Raute

 ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E.

Es muss gelten $\vec{BE}=\vec{AD}=\left(\begin{array}{c}-7\\1\\2\end{array}\right)$ 🡺 $\vec{e}=\vec{b}+\vec{AD}=\left(\begin{array}{c}3\\5\\3\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}-7\\1\\2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-4\\6\\5\end{array}\right)$

🡺 $ E\left(-4 \left| 6 \right| 5\right)$

Alternative: P ist die Mitte der Strecke AE 🡺 $\vec{e}=\vec{a}+2∙\vec{AP}$

**AUFGABE 2** Gegeben sind die Punkte $P\left(4 |-3 |2\right)$ und $Q\left(-4 \left| 1 \right| 10\right)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes R, der sowohl von P als auch von

 Q den Abstand 10 besitzt.

 Es gilt: $\vec{PQ}=\left(\begin{array}{c}-8\\4\\8\end{array}\right)$ und somit $\left|\vec{PQ}\right|=\sqrt{(-8)^{2}+4^{2}+8^{2}}=\sqrt{144}=12$.

 Sei M die Mitte der Strecke PQ 🡺 $M\left(\frac{4+(-4)}{2} \left| \frac{-3+1}{2} \right| \frac{2+10}{2}\right)$ 🡺 $M\left(0 \left| -1 \right| 6\right)$

 Es gilt: $\left|\vec{PM}\right|=\frac{1}{2}∙12=6$ und $\left|\vec{PM}\right|^{2}+\left|\vec{MR}\right|^{2}=\left|\vec{PR}\right|^{2}$ 🡺 $\left|\vec{MR}\right|^{2}=10^{2}-6^{2}=64$

 🡺 $\left|\vec{MR}\right|=8$ zudem muss gelten $\vec{MR}∙\vec{PQ}=0$

 Zum Beispiel: $\vec{MR}=k∙\left(\begin{array}{c}2\\2\\1\end{array}\right)$ 🡺 $k∙\sqrt{2^{2}+2^{2}+1^{2}}=3k=8$ 🡺 $k=\frac{8}{3}$

 🡺 $\vec{MR}=\frac{8}{3}∙\left(\begin{array}{c}2\\2\\1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\frac{16}{3}\\\frac{16}{3}\\\frac{8}{3}\end{array}\right)$ 🡺 $\vec{r}=\vec{m}+\vec{MR}=\left(\begin{array}{c}0\\-1\\6\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\frac{16}{3}\\\frac{16}{3}\\\frac{8}{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\frac{16}{3}\\\frac{13}{3}\\\frac{26}{3}\end{array}\right)$

 🡺 $R\left(\frac{16}{3} \left| \frac{13}{3} \right| \frac{26}{3}\right)$

b) Begründen Sie, dass es keinen Punkt gibt, der sowohl von P als auch von Q den

 Abstand 5 besitzt.

 Da die Strecke PQ die Länge 12 besitzt, ist M der Punkt mit dem geringsten

 gleichen Abstand zu P und Q. Dieser Abstand beträgt 6 Längeneinheiten, daher

 gibt es keinen Punkt der von P und von Q den Abstand 5 hat.

c) Gegeben ist die Ebene $E:x\_{1}-2x\_{2}+2x\_{3}=14$.

 Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes T, der in E liegt und sowohl von P

 als auch von Q den Abstand $\sqrt{117}$ besitzt.

 P und Q liegen beide auf E. Es gilt: $\left|\vec{PM}\right|^{2}+\left|\vec{MT}\right|^{2}=\left|\vec{PT}\right|^{2}$

 🡺 $\left|\vec{MT}\right|^{2}=117-6^{2}=81$ 🡺 $\left|\vec{MT}\right|=9$ zudem muss gelten $\vec{MT}⊥\vec{PQ}$ und $\vec{MT}⊥\vec{n}$

 mit $\vec{n}=\left(\begin{array}{c}1\\-2\\2\end{array}\right)$. Somit folgt: $\vec{MT}=k∙\vec{PQ}×\vec{n}$

 $\vec{PQ}×\vec{n}=\left(\begin{array}{c}-8\\4\\8\end{array}\right)×\left(\begin{array}{c}1\\-2\\2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}24\\24\\12\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{PQ}×\vec{n}\right|=\sqrt{24^{2}+24^{2}+12^{2}}=36$

 Wegen $\left|\vec{MT}\right|=9$ gilt: $k=\frac{1}{4}$ 🡺 $\vec{MT}=\frac{1}{4}∙\left(\begin{array}{c}24\\24\\12\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}6\\6\\3\end{array}\right)$

 Somit folgt: $\vec{t}=\vec{m}+\vec{MT}=\left(\begin{array}{c}0\\-1\\6\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}6\\6\\3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}6\\5\\9\end{array}\right)$ 🡺 $T\left(6 \left| 5 \right| 9\right)$

**AUFGABE 3** Die Punkte $A\left(3 |0 |3\right)$, $B\left(6 \left| 12 \right| 6\right)$, $C\left(-1 \left| 8 \right| 11\right)$, $D\left(-6 | 0 |12\right)$

und S sind die Eckpunkte einer Pyramide.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E in der die Grundfläche

 ABCD der Pyramide liegt.

 $\vec{AB}=\left(\begin{array}{c}3\\12\\3\end{array}\right)$ ; $\vec{AC}=\left(\begin{array}{c}-4\\8\\8\end{array}\right)$ 🡺 $\vec{AB}×\vec{AC}=\left(\begin{array}{c}3\\12\\3\end{array}\right)×\left(\begin{array}{c}-4\\8\\8\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}72\\-36\\72\end{array}\right)$ 🡺 $\vec{n}=\left(\begin{array}{c}2\\-1\\2\end{array}\right)$

 🡺 $E:2x\_{1}-x\_{2}+2x\_{3}=d$ ; Punktprobe mit A liefert: $E:2x\_{1}-x\_{2}+2x\_{3}=12$

b) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.

 Zu zeigen: $\left|\vec{AB}\right|=\left|\vec{AD}\right|$ und $\left|\vec{BC}\right|=\left|\vec{CD}\right|$

 $\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{3^{2}+12^{2}+3^{2}}=\sqrt{162}=9∙\sqrt{2}$

 $\vec{AD}=\left(\begin{array}{c}-9\\0\\9\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{AD}\right|=\sqrt{(-9)^{2}+0^{2}+9^{2}}=\sqrt{162}=9∙\sqrt{2}$

 $\vec{BC}=\left(\begin{array}{c}-7\\-4\\5\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{(-7)^{2}+(-4)^{2}+5^{2}}=\sqrt{90}=3∙\sqrt{10}$

 $\vec{CD}=\left(\begin{array}{c}-5\\-8\\1\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{(-5)^{2}+(-8)^{2}+1}=\sqrt{90}=3∙\sqrt{10}$

 Demnach ist ABCD ein Drachenviereck.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die Pyramide ein

 Volumen von 540 Volumeneinheiten besitzt.

 Flächeninhalt der Grundfläche: $A=\frac{1}{2}∙\left|\vec{AC}\right|∙\left|\vec{BD}\right|$

 $\vec{AC}=\left(\begin{array}{c}-4\\8\\8\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{AC}\right|=\sqrt{(-4)^{2}+8^{2}+8^{2}}=\sqrt{144}=12$

 $\vec{BD}=\left(\begin{array}{c}-12\\-12\\6\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{BD}\right|=\sqrt{(-12)^{2}+(-12)^{2}+6^{2}}=\sqrt{324}=18$

 🡺 $A=\frac{1}{2}∙\left|\vec{AC}\right|∙\left|\vec{BD}\right|=\frac{1}{2}∙12∙18=108$

 Für das Volumen der Pyramide gilt: $V=\frac{1}{3}∙A∙h=\frac{1}{3}∙108∙h=540$ 🡺 $h=15$

 $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{2^{2}+(-1)^{2}+2^{2}}=3$ 🡺 z.B. $\vec{s}=\vec{a}+5∙\vec{n}=\left(\begin{array}{c}3\\0\\3\end{array}\right)+5∙\left(\begin{array}{c}2\\-1\\2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}13\\-5\\13\end{array}\right)$

 🡺$ S\left(13 \left|- 5 \right| 13\right)$

**AUFGABE 4** Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x}=r∙\left(\begin{array}{c}2\\-4\\4\end{array}\right)$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der sowohl die

 x1 – Achse als auch die Gerade g liegen.

 Ansatz: $E: x\_{2}+c∙x\_{3}=0$ und $A\left(2 \left|-4 \right| 4\right)$ liegt auf E.

 🡺 $-4+c∙4=0$ 🡺$ c=1$ 🡺 $E: x\_{2}+x\_{3}=0$

b) Die x1 – Achse und die Gerade g schließen zwei Winkel ein.

 Weisen Sie nach, dass die Gerade w: $\vec{x}=s∙\left(\begin{array}{c}-8\\4\\-4\end{array}\right)$ die Winkelhalbierende eines

 der beiden Winkel ist.

 $\vec{u}=\left(\begin{array}{c}2\\-4\\4\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2^{2}+(-4)^{2}+4^{2}}=6$ ; $\vec{v}=\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{v}\right|=1$

 Der Vektor $\vec{w}=\vec{u}+6∙\vec{v}$ ist ein möglicher Richtungsvektor einer der beiden

 Winkelhalbierenden.

 $\vec{w}=\left(\begin{array}{c}2\\-4\\4\end{array}\right)+6∙\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}8\\-4\\4\end{array}\right)$

 Mit w: $\vec{x}=s∙\left(\begin{array}{c}-8\\4\\-4\end{array}\right)=-s∙\left(\begin{array}{c}8\\-4\\4\end{array}\right)=t∙\left(\begin{array}{c}8\\-4\\4\end{array}\right)$ folgt, dass w eine der beiden Winkel-

 halbierenden ist.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Winkelhalbierende w\* des anderen Winkels.

 Es gilt $w^{\*}⊥w$ .

 Sei $\vec{w^{\*}}$ ein Richtungsvektor von w\*, dann gilt: $\vec{w^{\*}}⊥\vec{w}$ und $\vec{w^{\*}}⊥\vec{n}$ mit $\vec{n}=\left(\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right)$ .

 🡺 $\vec{w^{\*}}=\vec{w}×\vec{n}=\left(\begin{array}{c}-8\\4\\-4\end{array}\right)×\left(\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}8\\8\\-8\end{array}\right)$ 🡺 w\*: $\vec{x}=r∙\left(\begin{array}{c}8\\8\\-8\end{array}\right)$

 Alternative: $\vec{w^{\*}}=\left(\begin{array}{c}2\\-4\\4\end{array}\right)-6∙\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-4\\-4\\4\end{array}\right)$ ; Kontrolle: $-\frac{1}{2}∙\left(\begin{array}{c}8\\8\\-8\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-4\\-4\\4\end{array}\right)$

**AUFGABE 5** Gegeben sind die Punkte $A\left(2 \left|-3 \right|1\right)$ und $B\left(6 \left| 5 \right| 7\right)$.

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke AB.

 $\vec{AB}=\left(\begin{array}{c}4\\8\\6\end{array}\right)$ 🡺 $\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{4^{2}+8^{2}+6^{2}}=\sqrt{116}=2∙\sqrt{29}$

b) Es gibt auf der Strecke AB einen Punkt T, der von A dreimal so weit wie von B

 entfernt ist.

 Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

 Es gilt $\vec{AT}=3∙\vec{TB}=\frac{3}{4}∙\vec{AB}=\frac{3}{4}∙\left(\begin{array}{c}4\\8\\6\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}3\\6\\4,5\end{array}\right)$

 🡺 $\vec{t}=\vec{a}+\vec{AT}=\left(\begin{array}{c}2\\-3\\1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}3\\6\\4,5\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}5\\3\\5,5\end{array}\right)$ 🡺 $T\left( 5 \left| 3 \right| 5,5 \right)$

c) Auf der Geraden AB gibt es einen zweiten Punkt T\*, der ebenfalls von A dreimal

 so weit entfernt ist wie von B.

 Bestimmen Sie die Koordinaten von T\*.

 Es gilt $\vec{AT^{\*}}=3∙\vec{BT^{\*}}=\frac{3}{2}∙\vec{AB}=\frac{3}{2}∙\left(\begin{array}{c}4\\8\\6\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}6\\12\\9\end{array}\right)$

 🡺 $\vec{t^{\*}}=\vec{a}+\vec{AT^{\*}}=\left(\begin{array}{c}2\\-3\\1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}6\\12\\9\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}8\\9\\10\end{array}\right)$ 🡺 $T^{\*}\left( 8 \left| 9 \right| 10 \right)$

d) Auf der Geraden AB gibt es zwei Punkte R und R\*, die beide k- mal so weit von A

 entfernt sind wie von B (k > 1).

 Begründen Sie, dass es ein k gibt, so dass die Strecke RR\* genau so lang wie

 die Strecke AB ist.



 Es gilt $\vec{RB}=\frac{1}{k+1}∙\vec{AB}$ und $\vec{BR^{\*}}=\frac{1}{k-1}∙\vec{AB}$

 🡺 $\vec{RR^{\*}}=\vec{RB}+\vec{BR^{\*}}=\frac{1}{k+1}∙\vec{AB}+\frac{1}{k-1}∙\vec{AB}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}\right)∙\vec{AB}=\frac{2k}{k^{2}-1}∙\vec{AB}$

 🡺 Mit $\vec{RR^{\*}}=\vec{AB}$ folgt $\frac{2k}{k^{2}-1}=1$ 🡺 $2k=k^{2}-1$

 🡺 $k^{2}-2k-1=0$

 Lösung der quadratischen Gleichung: $D=(-2)^{2}+4=8$

 $k\_{1;2}=\frac{2\pm \sqrt{8}}{2}=1\pm \sqrt{2}$ 🡺 Mit k > 1 folgt $k\_{1}=1+\sqrt{2}$

 Alternative: Für k = 2 folgt $\vec{RR^{\*}}=\frac{4}{3}∙\vec{AB}$ und für k = 3 folgt $\vec{RR^{\*}}=\frac{3}{4}∙\vec{AB}$.

 Sei f mit $f\left(k\right)=\frac{2k}{k^{2}-1}$. Da f für k > 1 stetig ist und $f\left(2\right)=\frac{4}{3}$

 bzw. $f\left(3\right)=\frac{3}{4}$ gilt, muss f(k) im Intervall ] 2 ; 3 [ mindestens einmal

 den Wert 1 annehmen.