

„Unschwer wirst Du sehen, dass dieser Zweig der
Mathematik oft nicht weniger verzwickt als
ergötzlich ist.“

Daniel Bernoulli über die Stochastik

M	A	T	H	E
A	Z P G			H
T				T
H				A
E	H	T	A	M

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Vierfeldertafel

Winfried König

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

KMK-Standards 2012

Die KMK Standards nennen Vierfeldertafeln als Alternative für Baumdiagramme („... mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln.“)

https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Seite 18

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Bildungsplan 2016 3.3.5.:

Der Bildungsplan 2016 für Baden-Württemberg geht darüber hinaus: Die Verwendung von Vierfeldertafeln wird ausdrücklich gefordert.

<http://www.bildungsplaene-bw.de/Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M/IK/9-10/05>

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Beispielcurriculum 9/10

Gewinnbringend ist wie immer ein Blick in das Beispielcurriculum.

http://www.schule-bw.de/service-und-tools/bildungsplaene/allgemein-bildende-schulen/bildungsplan-2016/beispielcurricula/gymnasium/BP2016BW_ALLG_GYM_M_B_C_9-10_BSP_1.pdf

Seite 17

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

„Merke“

- Die Vierfeldertafel ist verbindlich im Bildungsplan verankert.
- **Ergänzung:**
Die Vierfeldertafel wird **ab 2023** Gegenstand der Abiturprüfung sein können.

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Vierfeldertafel - Einführung

	A	\bar{A}	
B			
\bar{B}			

Eine fachwissenschaftliche Definition erübrigt sich, diese Tabelle wird sehr anschaulich als Vierfeldertafel bezeichnet.

(Anmerkung: Definitionen aus Schulbüchern dürfen aus rechtlichen Gründen nicht gezeigt werden).

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Vierfeldertafel – erstes Beispiel

U.U. erster einführender Schritt: Vierfeldertafel in Textform

	Vegetarier	Kein Vegetarier
Männlich	„Vegetarier und männlich“	„Kein Vegetarier und männlich“
nicht männlich	„Vegetarier und nicht männlich“	„Kein Vegetarier und nicht männlich“

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Vierfeldertafel – erstes Beispiel

A: „Vegetarier“, B: „Männlich“

Absolute Häufigkeiten

	A	\bar{A}	
B	4	40	44
\bar{B}	6	35	41
	10	75	85

Relative Häufigkeiten

	A	\bar{A}	
B	0,05	0,47	0,52
\bar{B}	0,07	0,41	0,48
	0,12	0,88	1

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Vierfeldertafel – allgemein (W' eingetragen)

	A	\bar{A}	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

← Summe

↑ Summe

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Im alten BP nicht *explizit* zu finden; dennoch nicht ganz neu, denn:
- Bei jedem Baumdiagramm können die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen ab der 2. Stufe als bedingte Wahrscheinlichkeit gedeutet werden.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition: Seien (Ω, P) ein diskreter W-Raum, $A, B \subseteq \Omega$ mit $P(A) > 0$.

Dann heißt $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit von B**

unter der Bedingung A.

Bemerkung: Die Schreibweise $P_A(B)$ erscheint schülerfreundlicher als $P(B|A)$.

M	A	T	H	E
A	Z P G			H
T				T
H				A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

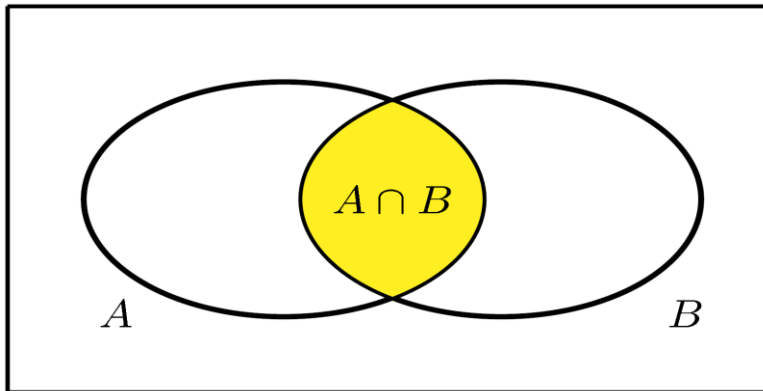
Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Bedingte Wahrscheinlichkeit - Motivation



Laplace-Ansatz:

$$P_A(B) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|A|/|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die im Laplace-Modell deduzierte Darstellung wird im allgemeinen Fall zur Definition verwendet (s. ergänzende Hinweise).

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Bedingte Wahrscheinlichkeit – ein „schönes“ Beispiel: die männerfeindliche Universität

http://www.math.kit.edu/stoch/~henze/media/vorlesung_ss15.pdf - Folie 129

- Inhaltlich: Beispiel für Simpson-Paradoxon
- Unterricht: Beispiel für prozessbezogene Kompetenzen & Leitperspektiven
(„Die Frauen haben nur geschickter gewählt.“)

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Hinweise:

- Das **Ziegenproblem** wird in den „ergänzenden Hinweisen“ behandelt (Lösung mit Baumdiagramm und – als **ggf. mögliche Vertiefung** - auch mit Satz von Bayes).
- Im Unterricht sind $P(A \cap B)$ und $P_A(B)$ genau zu unterscheiden!

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Stochastische Unabhängigkeit

- Häufig in Schulbüchern: *Zwei Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit, mit der A eintritt, nicht davon beeinflusst wird, ob B eingetreten ist.*

$$P(A) = P_B(A)$$

- In der Fachliteratur wird **definiert**:
Zwei Ereignisse heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

- Bemerkung 1: Aus der stochastischen Unabhängigkeit von A und B folgt auch die von \bar{A} und B, A und \bar{B} sowie die von \bar{A} und \bar{B} .

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Stochastische Unabhängigkeit „im Alltag“: Fehlinterpretation mit (fast) dramatischen Folgen

Sei A_j das Ereignis, dass in einer wohlhabenden Nichtraucherfamilie das j -te Kind durch plötzlichen Kindstod stirbt.

Annahme aufgrund empirischer Daten: $P(A_j) = \frac{1}{8500}$

Argumentation des Gerichts: $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{8500} \cdot \frac{1}{8500} \approx \frac{1}{72000000}$ („fast 0“) ?

Royal Statistical Society: $P_{A_1}(A_2) \gg P(A_1)$

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Vierfeldertafeln im Unterricht

- Schnitt und Vereinigung von Ereignissen auch verbal (in Textform) wiederholen bzw. üben.
- Der Weg führt von den Anzahlen (absolute Häufigkeiten) über die relativen Häufigkeiten zu den Wahrscheinlichkeiten.
- Es **kann** für SuS sehr hilfreich sein, zunächst von den Anzahlen auszugehen.
(Dann sollte die „Beliebigkeit“ der fiktiven Gesamtzahl beim Ansatz thematisiert werden).

M	A	T	H	E
A	Z P G			H
T				T
H				A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mengenschreibweise im Unterricht

- Im Zentrum sollen inhaltliche Überlegungen stehen, nicht der Formalismus.

Der BP fordert keine Mengenschreibweise, doch bietet diese Vorteile!

- Die Einfachheit und Präzision mathematischer Formelsprache besteht in vielen Fällen:
 $P(I \cap F)$ vs. $P(\text{„spielt Instrument und ist Fußballfan“})$
- Erfahrungen aus der Kursstufe (Im Geometrie-UR $g \cap h$: ...) ermutigen
- Die vorliegenden Schulbücher führen Schreibweisen für bedingte Wahrscheinlichkeiten ein.

M	A	T	H	E
A	Z P G			H
T				T
H				A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mengenschreibweise im Unterricht

Empfehlung: Auf Ausdrücke der Form $\overline{A \cup B}$ in Klasse 9/10 verzichten.
Denkbar hingegen: $A \cap \bar{B}$.

Zur Erinnerung:

An eine mengentheoretische Betrachtung ist nicht gedacht!

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (1)

- Zu jeder Vierfeldertafel gehören (genau) **zwei** unterschiedliche zweistufige Baumdiagramme
- In Abhängigkeit der Wahl der ersten Stufe lassen sich unterschiedliche Informationen der Vierfeldertafel ablesen
- Mit „Pech“ zeichnen SuS das „ungeeignete“ Baumdiagramm; das kann bei der (symmetrischen) Vierfeldertafel nicht passieren

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

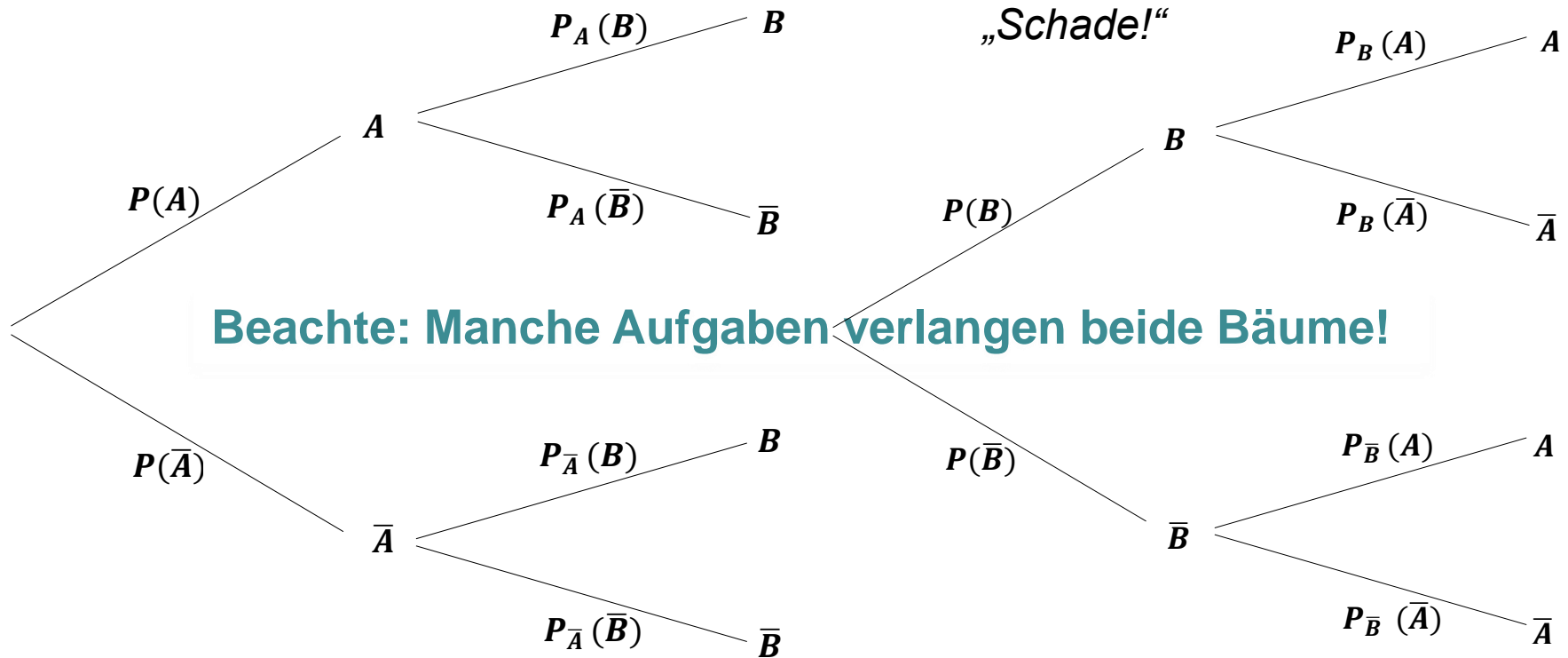
Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (1)

Aufgabe: Gesucht u.a. $P_B(A)$

„Schade!“



Beachte: Manche Aufgaben verlangen beide Bäume!

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (2)

- An der Vierfeldertafel ist gut abzulesen, ob A und B stochastisch unabhängig sind.
- Sind zwei Ereignisse unabhängig, so muss die Vierfeldertafel mit der Multiplikationstafel übereinstimmen.

	A	\bar{A}	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Vierfeldertafel

	A	\bar{A}	
B	$P(A) \cdot P(B)$	$P(\bar{A}) \cdot P(B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(A) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Multiplikationstafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (2) – Beispiel 1

Beispiel:

A: „erkrankt“ B: „geimpft“

	A	\bar{A}	
B	0,12	0,41	0,53
\bar{B}	0,30	0,17	0,47
	0,42	0,58	1

Vierfeldertafel

	A	\bar{A}	
B	0,22	0,31	0,53
\bar{B}	0,20	0,27	0,47
	0,42	0,58	1

Multiplikationstafel

Büchter / Henn (Elementare Stochastik, Berlin, 2000):

„Die beiden Tabellen unterscheiden sich so stark, dass von einer Abhängigkeit ausgegangen werden muss.“ [Salopp: Je stärker die Zahlenwerte differieren, desto „abhängiger“ sind die Ereignisse.]

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (2)

Ergänzung (siehe auch Beispielcurriculum LS):

- I.d.R. $h_n(A) \neq P(A)$ [$h_n(A)$: relative Häufigkeit von A]
- Sondern $h_n(A) \rightsquigarrow P(A)$
- Der Fall $h_n(A) \cdot h_n(B) \approx h_n(A \cap B)$ sollte im Unterricht diskutiert werden
(Es kann durchaus Unabhängigkeit bei Ungleichheit vorliegen.)

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (2) – Beispiel 2

Beispiel: Gegeben ist folgende Vierfeldertafel.

Sind A und B unabhängig?

	B	\bar{B}	
A	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
\bar{A}	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$
	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	1

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/16}{1/8} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{7}{16}$$

oder

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Also sind A und B **abhängig**.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (2)

Eine IQB – Aufgabe, die die Verwendung einer Vierfeldertafel fordert, finden Sie unter:

[https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht:](https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht)

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (3)

- Die Vierfeldertafel bereitet die Interpretation / Struktur des Hypothesentests vor!

	A	\bar{A}	
B			
\bar{B}			

	H_0 wird verworfen	H_0 wird nicht verworfen
H_0 ist wahr	Fehler 1. Art	alles in Ordnung
H_0 ist falsch	alles in Ordnung	Fehler 2. Art

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel (3) – Beispiel 2

Bei einem Test soll die Funktionstüchtigkeit von Bauteilen überprüft werden. Es wird festgelegt:

F: „Ein zufällig ausgewähltes Bauteil funktioniert.“

T+: „Ein zufällig ausgewähltes Bauteil wird als funktionstüchtig eingestuft.“

Beschreibe in Worten: $P_F(T+)$, $P_{\bar{F}}(T+)$, $P_{T+}(\bar{F})$, $P_{T+}(F)$, $P_{\bar{T}+}(F)$, $P_{\bar{T}+}(\bar{F})$

Welche dieser Wahrscheinlichkeiten sollten groß, welche klein sein?

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Mehrwert der Vierfeldertafel - Fazit

- Wegen der Symmetrie sind Vierfeldertafeln (u.U.) Baumdiagrammen überlegen.
- **Alle** bedingten W' können leicht berechnet werden.
- Einfache Untersuchung auf stochastische Unabhängigkeit möglich.
- Die Vierfeldertafel bereitet die Interpretation / Struktur des Hypothesentests vor.
- Ziel: Im UR parallel arbeiten; SuS können abwägen.

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Aufgaben

Eine Firma produziert Bauteile. Dabei gilt:

- 95% der Bauteile sind in Ordnung
- 99% davon gelangen in den Verkauf
- 2% der defekten Bauteile kommen ebenfalls in den Verkauf

OK: „Bauteil in Ordnung“

V: „Bauteil gelangt in Verkauf“

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

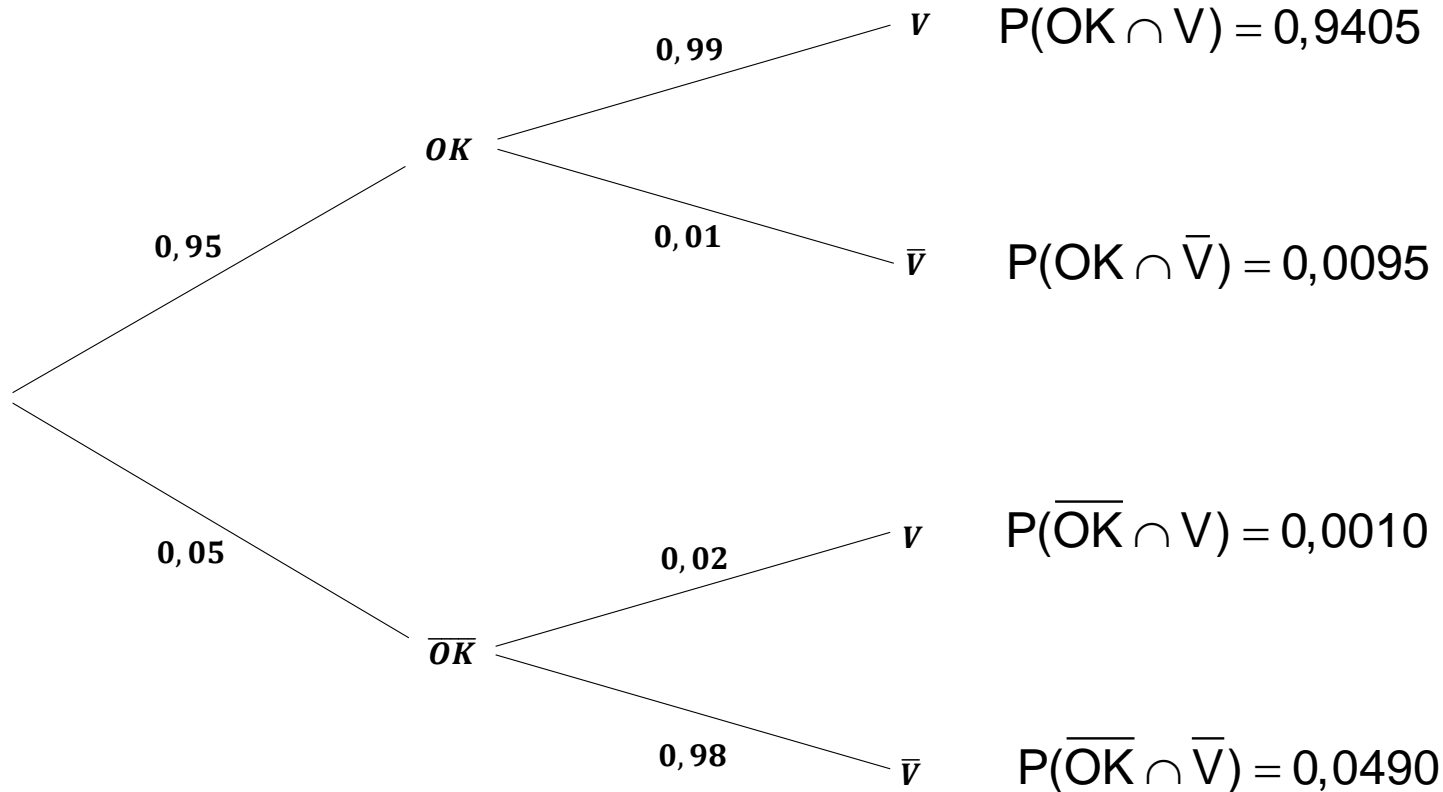
Aufgaben

Fazit

Aufgaben

Eine Firma produziert Bauteile. Dabei gilt:

- 95% der Bauteile sind in Ordnung (OK)
- 99% davon gelangen in den Verkauf (V)
- 2% der defekten Bauteile kommen ebenfalls in den Verkauf



Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

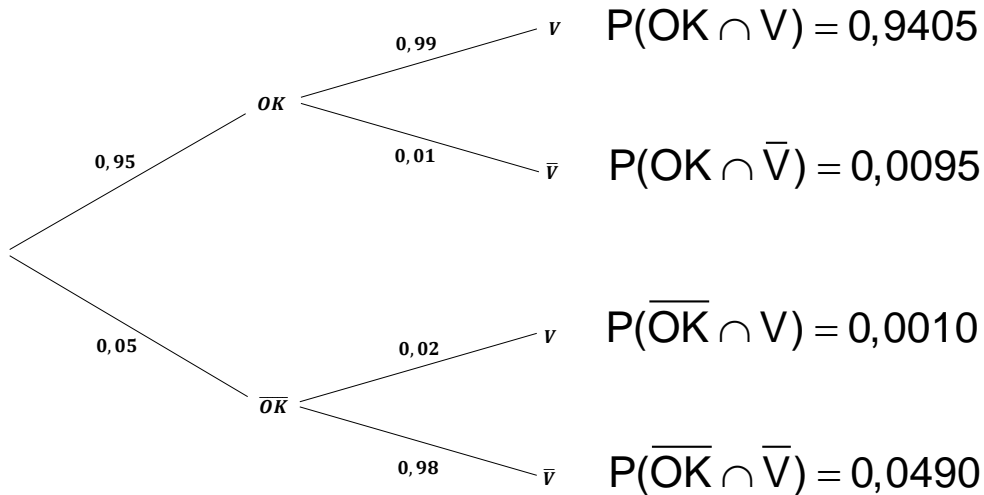
Aufgaben

Fazit

Aufgaben

Eine Firma produziert Bauteile. Dabei gilt:

- 95% der Bauteile sind in Ordnung (OK)
- 99% davon gelangen in den Verkauf (V)
- 2% der defekten Bauteile kommen ebenfalls in den Verkauf



	OK	\bar{OK}	
V	0,9405	0,001	0,9415
\bar{V}	0,0095	0,049	0,0585
	0,95	0,05	1

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

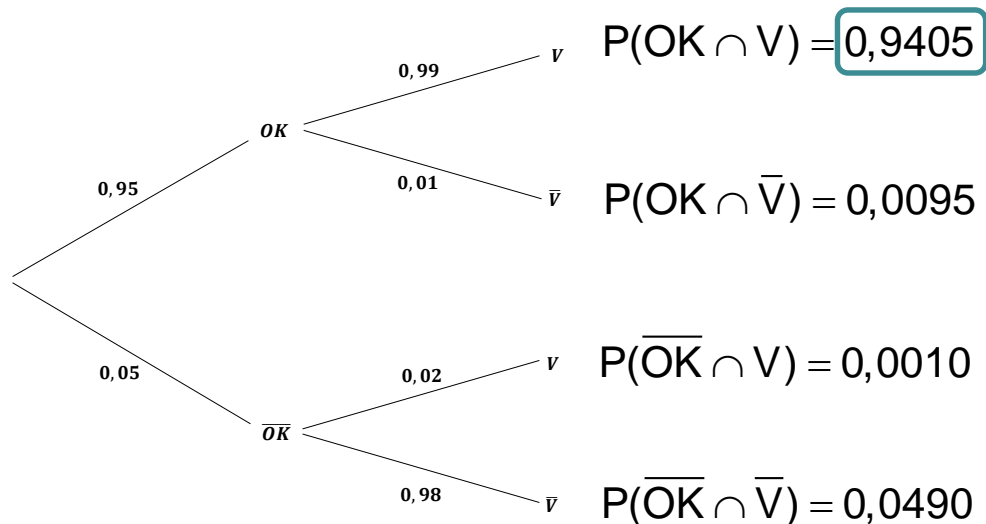
Fazit

Aufgaben

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauteil verkauft und OK ist.

Eine Firma produziert Bauteile. Dabei gilt:

- 95% der Bauteile sind in Ordnung (OK)
- 99% davon gelangen in den Verkauf (V)
- 2% der defekten Bauteile kommen ebenfalls in den Verkauf



	OK	\overline{OK}	
V	0,9405	0,001	0,9415
\overline{V}	0,0095	0,049	0,0585
	0,95	0,05	1

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

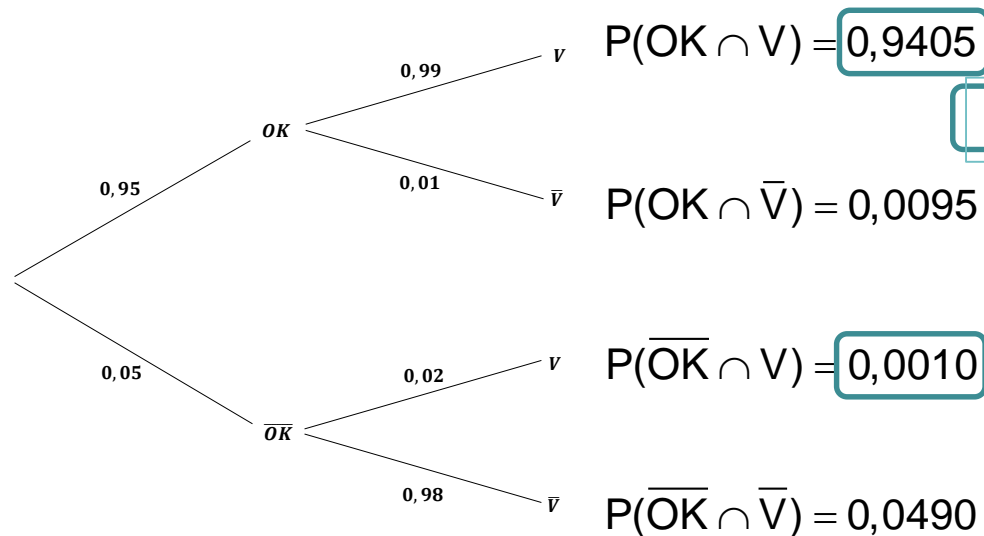
Fazit

Aufgaben

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauteil verkauft wird.

Eine Firma produziert Bauteile. Dabei gilt:

- 95% der Bauteile sind in Ordnung (OK)
- 99% davon gelangen in den Verkauf (V)
- 2% der defekten Bauteile kommen ebenfalls in den Verkauf



	OK	\bar{OK}	
V	0,9405	0,001	0,9415
\bar{V}	0,0095	0,049	0,0585
	0,95	0,05	1

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

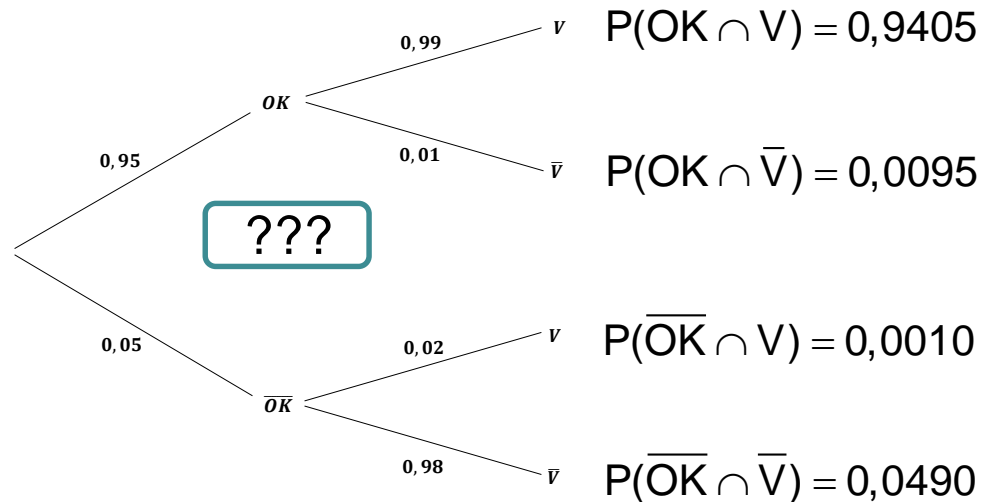
Fazit

Aufgaben

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein verkaufte Bauteil OK ist.

Eine Firma produziert Bauteile. Dabei gilt:

- 95% der Bauteile sind in Ordnung (OK)
- 99% davon gelangen in den Verkauf (V)
- 2% der defekten Bauteile kommen ebenfalls in den Verkauf



	OK	$\bar{\text{OK}}$	
V	0,9405	0,001	0,9415
\bar{V}	0,0095	0,049	0,0585
	0,95	0,05	1

$$P_V(\text{OK}) = \frac{0,9405}{0,9415} = 0,9989$$

M	A	T	H	E
A	Z P G			H
T				T
H				A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Formulierungen

- „Ein verkaufte Bauteil ist OK“ sprachlich sehr anspruchsvoll!
- Zu Beginn eher:
 - „Berechne $P_V(\text{OK})$.“
 - „Angenommen, das Bauteil wird verkauft. Berechne die W' dafür, dass es dann OK ist.“
 - „Mit welcher W' ist ein Bauteil OK, wenn man weiß, dass es verkauft wurde?“
 - „Berechne die W' dafür, dass das Bauteil OK ist, wenn...“

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Formulierungen

- „99% davon werden verkauft“ nicht selbstverständlich
- Anteile von Anteilen!
- Wo / wann kommt im Unterricht „0,53 von 0,2“ vor?

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Beliebtes Beispiel 1 – „Zollhund“

Der Hund eines Zollbeamten entdeckt 96% aller Rauschgift-Schmuggelfälle, bellt aber „versehentlich“ in 2% der Fälle ohne Rauschgift. Die Statistik weist aus, dass in 1% der Grenzübertritte Rauschgift geschmuggelt wird.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hund bei einer Kontrolle bellt?
- Der Hund bellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass geschmuggelt wird?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit schmuggelt ein Grenzgänger, wenn der Hund nicht bellt?

Bedingte Wahrscheinlichkeit & Vierfeldertafel

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Beliebtes Beispiel 1 – „Zollhund“

Der Hund eines Zollbeamten entdeckt 96% aller Rauschgift-Schmuggelfälle, bellt aber „versehentlich“ in 2% der Fälle ohne Rauschgift. Die Statistik weist aus, dass in 1% der Grenzübertritte Rauschgift geschmuggelt wird.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hund bei einer Kontrolle bellt?
- Der Hund bellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass geschmuggelt wird?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit schmuggelt ein Grenzgänger, wenn der Hund nicht bellt?

	Rausch- gift	Kein Rauschgift	
Hund bellt	96	198	294
Hund bellt nicht	4	9702	9706
	100	9900	10000

$$a) P(B) = \frac{294}{10000} = 2,94\%$$

$$b) P_B(R) = \frac{96}{294} \approx 32,7\%$$

$$c) P_{\bar{B}}(R) = \frac{4}{9706} \approx 0,04\%$$

B: „Hund bellt“

R: „Rauschgift wird geschmuggelt“

M	A	T	H	E
A	Z P G			H
T				T
H				A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Beliebtes Beispiel 2 – „Medizinischer Test“

Annahme: An einem Virus sind 0,1% der Bevölkerung erkrankt.

Ein Schnelltest ...

- weist in 95% der Fälle das Virus bei infizierten Person nach,
- ergibt (aber) bei 3% der Gesunden ein positives Ergebnis.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei positivem Ergebnis

gesund zu sein?

(Schätzen Sie bitte zunächst).

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Beliebtes Beispiel 2 – „Medizinischer Test“

Annahme: An einem Virus sind 0,1% der Bevölkerung erkrankt.

Ein Schnelltest ...

- weist in 95% der Fälle das Virus bei infizierten Person nach,
- ergibt (aber) bei 3% der Gesunden ein positives Ergebnis.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei positivem Ergebnis gesund zu sein?
(Schätzen Sie bitte zunächst).

	erkrankt	nicht erkrankt	
Test +	95	2997	3092
Test -	5	96903	96908
	100	99900	100000

$$P_{T+}(\bar{K}) = \frac{2997}{3092} = 0,9693 \approx 96,9\%$$

K: „Erkrankt“

T+: „Testergebnis positiv“

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Fachliches

Didaktisches

Aufgaben

Fazit

Weitere Anregungen

- **Spamfilter:** „Ein von einer Computerzeitschrift zum Testsieger gekürtes Programm sortiert 95% aller unerwünschten Mails aus, aber auch fälschlicherweise 1% der anderen Mails. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sortiert das Programm eine eingehende Mail richtig, wenn 90% der Mails unerwünschte Werbemails sind?“
- **Trugschluss des Staatsanwaltes:** „Aus der geringen Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Fingerabdrücke eines Unschuldigen am Tatort gefunden werden, und der Tatsache, dass sie tatsächlich gefunden wurden, wird geschlossen, dass der Beschuldigte mit hoher Wahrscheinlichkeit schuldig ist.“