

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Normalverteilung – didaktische Hinweise

I. Grundlagen


Die Thematik der Normalverteilung bildet chronologisch betrachtet den Abschluss des Teilgebiets Stochastik in der Schulmathematik. Die Schülerinnen und Schüler sammeln bereits in den Klassenstufen 5/6 erste Erfahrungen auf diesem Gebiet, in dem sie die Kenngrößen Mittelwert, Minimum und Maximum bestimmen, Daten sammeln, auswerten und grafisch darstellen, sowie relative Häufigkeiten ermitteln.

In den Klassenstufen 7/8 lernen sie mit Median und den Quartilen weitere Kenngrößen kennen und ergänzen ihr Spektrum an Darstellungsmöglichkeiten durch Boxplots. Sie erfahren die Bedeutung des Gesetzes der großen Zahlen und legen so die Grundlagen für einen empirischen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Die Schülerinnen und Schüler führen Zufallsexperimente durch und bestimmen Wahrscheinlichkeiten durch einfache kombinatorische oder theoretische Überlegungen und mithilfe von Baumdiagrammen. So wird die theoretische Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs angelegt und Laplace-Experimente sind das erste explizit genannte Beispiel für eine diskrete Verteilung.

In den Klassenstufen 9/10 wird die Liste der Kenngrößen um den Erwartungswert und die Standardabweichung vervollständigt und mit der Binomialverteilung lernen die Schülerinnen und Schüler eine weitere diskrete Verteilung kennen.

Durch die bei der Normalverteilung deutlich erkennbare Relevanz der Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung schließt sich der Kreis zu den aus der Unter- und Mittelstufe bekannten Kenngrößen und der Darstellung von Daten in Form eines Boxplots. Um diesen Zusammenhang noch deutlicher hervorzuheben, bietet sich als mögliche Vertiefung das Arbeiten mit Sigma-Umgebungen an. Mit der Normalverteilung lernen die Schülerinnen und Schüler nun eine stetige Verteilung kennen, wobei im Basisfach der Anwendungsaspekt im Vordergrund steht, während im Leitungsfach ein Schwerpunkt auf der innermathematischen Betrachtung der Dichtefunktion liegt.

So steht im Bildungsplan des Basisfachs:

Mit Normalverteilungen umgehen
(1) den Unterschied zwischen <i>diskreten</i> und <i>stetigen Zufallsgrößen</i> am Beispiel <i>binomial-</i> und <i>normalverteilter Zufallsgrößen</i> beschreiben
(2) den Zusammenhang der Kenngrößen <i>Erwartungswert</i> und <i>Standardabweichung</i> einer <i>Normalverteilung</i> und der zugehörigen <i>Glockenkurve</i> beschreiben
(3) stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd <i>normalverteilten Zufallsgrößen</i> gehören, und <i>Wahrscheinlichkeiten</i> berechnen
 2.3 Modellieren 1, 4, 7, 8

Zwar könnte gemäß den Vorgaben der KMK (Beschluss vom 18.10.2012 zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife) auf eine Fortführung der Stochastik im Basisfach verzichtet werden, da alle verbindlichen Inhalte für das grundlegende Niveau bereits durch die Standards bis Klasse 10 abgedeckt sind, jedoch sollte die Stochastik auch im Basisfach präsent sein. Auch die Alltagsrelevanz annähernd normalverteilter Zufallsgrößen spricht für die Aufnahme dieses Themas als verbindlichen Inhalt.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Für das Basisfach genügt es, den Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen an konkreten Beispielen binomial- bzw. normalverteilter Zufallsgrößen zu beschreiben; sie nutzen die Kenngrößen, um Glockenkurven zu skizzieren und Wahrscheinlichkeiten ohne expliziten Bezug zur Analysis direkt mithilfe digitaler Hilfsmittel zu berechnen. Der Begriff der Dichtefunktion muss im Basisfach nicht eingeführt werden.

Im Bildungsplan 2004 findet man zur Leitidee „Daten und Zufall“:

Bei der Interpretation dieser Inhalte wurde in den Umsetzungsbeispielen stets die Normalverteilung als ein bedeutsames Beispiel einer stetigen Verteilung genannt. Dieser Inhalt bleibt auch nach dem Inkrafttreten des Bildungsplans 2016 unverändert (Abiturjahrgänge ab 2023). Der Bildungsplan 2016 kann bezogen auf die verwendeten Operatoren und die kursiv gesetzten Begriffe als Interpretation des geforderten Niveaus im Leistungsfach aber auch schon während der Gültigkeit des Bildungsplans 2004 (Abiturjahrgänge 2021 & 2022) herangezogen werden.

6. LEITIDEE „DATEN UND ZUFALL“

- Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten mit unendlich vielen Ausgängen berechnen;
- Hypothesen über Vorgänge, die vom Zufall abhängen, quantitativ beurteilen.

Inhalte

- eine stetige Verteilung; ein Testverfahren

Der Bildungsplan 2016 lautet bezogen auf stetige Verteilungen folgendermaßen:

Mit Normalverteilungen umgehen
(8) den Unterschied zwischen <i>diskreten</i> und <i>stetigen Zufallsgrößen</i> erläutern
(9) die <i>Dichtefunktion</i> einer <i>normalverteilten Zufallsgröße</i> mithilfe von <i>Erwartungswert</i> und <i>Standardabweichung</i> angeben und die zugehörige <i>Glockenkurve</i> skizzieren
(10) stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd <i>normalverteilten Zufallsgrößen</i> gehören, und <i>Wahrscheinlichkeiten</i> berechnen
P 2.3 Modellieren 1, 4, 5, 7

Von Schülerinnen und Schülern des Leistungsfaches wird erwartet, dass sie in der Lage sind, den Unterschied zwischen diskret und stetig verteilten Zufallsgrößen allgemein zu erläutern. Auch hier werden sicher schwerpunktmäßig binomialverteilte bzw. normalverteilte Zufallsgrößen betrachtet, aber auch andere Verteilungen (z.B. die Gleichverteilung und die Exponentialverteilung) können zur Vertiefung und Festigung der beiden Begriffe „diskret“ und „stetig“ im Leistungsfach herangezogen werden.

Die Schülerinnen und Schüler nutzen ihre im Bereich der Analysis erworbenen Kenntnisse um Dichte- und Verteilungsfunktion gegeneinander abzugrenzen. Sie erfahren zusätzlich, dass die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung als Integral dargestellt werden können.

Durch den Einsatz digitaler Hilfsmittel ist die Relevanz der Normalverteilung als Näherung für binomialverteilte Zufallsgrößen nur noch von historischer Bedeutung. Diese sollte zumindest den Schülerinnen und Schülern des Leistungsfachs aufgezeigt werden, ebenso wie die Möglichkeit, als Modellierung für bestimmte, diskret verteilte Zufallsgrößen die Normalverteilung anzuwenden. In diesem Zusammenhang erkennen sie auch die Bedeutung der Stetigkeitskorrektur.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				A
E	H	T	A	M

II. Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

Bei der Betrachtung stetiger Zufallsgrößen unterscheiden sich Leistungs- und Basisfach sowohl in der Durchdringungstiefe als auch in der Perspektive unter welcher die Normalverteilung als explizit genanntes Beispiel betrachtet wird.

So nutzen die Schülerinnen und Schüler im Leistungsfach ihre Kenntnisse aus der Analysis, um per Definition das Vorliegen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bei unterschiedlichen stetigen Zufallsgrößen zu bestätigen, während den Schülerinnen und Schülern im Basisfach die Normalverteilung als ein Beispiel für eine stetige Verteilung vorgegeben wird.

Die Schülerinnen und Schüler des Basisfachs werden zwar den Funktionstyp für die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung kennenlernen, aber die konkreten Funktionsterme nicht zu weiteren Betrachtungen heranziehen. Die Schülerinnen und Schüler des Leistungsfachs sind dagegen in der Lage anhand des Erwartungswertes und der Standardabweichung den Funktionsterm der Dichtefunktion aufzustellen und erfahren, wie sie hier ihre im Bereich der Analysis erworbenen Kenntnisse aus dem Bereich der affinen Abbildungen bei Funktionsgraphen anwenden können.

Ebenso unterscheidet sich die Betrachtungsweise von Erwartungswert und Standardabweichung der Normalverteilung: Im Basisfach werden diese Werte aus Datensätzen unter Nutzung der allgemeinen Definition oder mithilfe digitaler Hilfsmittel ermittelt. Die Schülerinnen und Schüler erkennen den Zusammenhang dieser Werte mit der Form der Glockenkurve. Im Leistungsfach erfahren die Schülerinnen und Schüler zusätzlich, dass die Kenngrößen stetiger Verteilungen mithilfe von Integralen bestimmt werden können.

Wie schon erwähnt, liegt der Schwerpunkt im Basisfach auf der Anwendung der Normalverteilung, während im Leistungsfach auch die innermathematische Betrachtung der Dichtefunktion von großer Bedeutung ist.

M	A	T	H	E
A				H
T			P	T
H			G	A
E	H	T	A	M

III. Hinweise zur unterrichtlichen Umsetzung

1. Mögliche Themenverteilung im Leistungsfach

Stunde ^(*)	Thema	didaktische Hinweise
0	Diskrete Verteilungen	<p>Ggf. Aufgreifen des Vorwissens zur Binomialverteilung, falls nicht unmittelbar davor Hypothesentest behandelt wurde</p> <p>Standardabweichung für einen Datensatz: $\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \mu)^2 \cdot f(X = x_i)}$</p> <p>Standardabweichung für Binomialverteilungen: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$</p> <p>Wiederholung Laplace-Experimente und Begriffseinführung „Gleichverteilung“</p>
1 – 2	Zufallsgröße bei einer Zielscheibe	<p>Handlungsorientierter Einstieg in das Thema „stetige Verteilungen“</p> <p>Definition: Dichtefunktion und Verteilungsfunktion</p> <p>Wahrscheinlichkeiten als Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion interpretieren</p>
3 – 4	Einige stetigen Verteilungen	<p>Gleichverteilung (Zufallszahl), Dreiecksverteilung (Summe zweier Zufallszahlen), Exponentialverteilung (Wartezeitprobleme), ...</p> <p>Berechnungen von Hand und mit dem WTR</p>
5 – 6	Erwartungswert und Standardabweichung bei stetigen Verteilungen	<p>Erwartungswert: $\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$</p> <p>Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx}$</p> <p>Kenngößen für die in den Stunden 3 – 4 eingeführten stetigen Verteilungen mit Hand und WTR berechnen</p>

M	A	T	H	E
A		z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

7 – 10	Die Gaußsche Glockenkurve Normalverteilung	<p>Die Gaußsche Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$</p> <p>zur Approximation einer Datenreihe</p> <p>$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ näherungsweise durch Rechtecksummen mit WTR</p> <p>Analysis der Glockenfunktion von Hand</p> <p>Normalverteilung mit Erwartungswert und Standardabweichung</p> <p>Sigma-Regeln als mögliche Vertiefung</p>
11 – 12	Approximation der Binomialverteilung	<p>Zusammenhang zwischen Normal- und Binomialverteilung</p> <p>Satz von de Moivre-Laplace</p> <p>Näherungsweise Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei diskreten Zufallsgrößen (mit Stetigkeitskorrektur) mit WTR</p>
13 – 16	Vertiefende Übungen	Innermathematische Aufgaben und Anwendungsaufgaben von Hand und mit WTR lösen

(*) Die ausgewiesene Stundenzahl bezieht sich auf 45-Minuten-Einheiten.

Konkrete Hinweise und Materialien sowie GeoGebra-Dateien finden sich im Ordner „Unterrichtsgang Leistungsfach“.

M	A	T	H	E
A				H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

2. Mögliche Themenverteilung im Basisfach

Stunde(*)	Thema	didaktische Hinweise
1 – 3	Binomialverteilung	<p>Festigung der Begriffe Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette</p> <p>Wiederholung und Anwendung der Formel von Bernoulli</p> <p>Interpretation der Trefferwahrscheinlichkeit als Fläche der Säulen des Histogramms</p> <p>Einführung des Begriffs „diskret verteilte Zufallsgröße“</p>
4 – 5	Die Normalverteilung	<p>Vom Histogramm zur Glockenkurve</p> <p>Einführung des Begriffs „stetig verteilte Zufallsgröße“</p> <p>Wahrscheinlichkeiten anschaulich als Fläche unter der Glockenkurve interpretieren und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen nutzen</p>
6	Erwartungswert und Standardabweichung	<p>Zusammenhang: Erwartungswert und Standardabweichung – Form und Lage der Glockenkurve</p> <p>Funktionsgleichung $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ als mögliche Vertiefung in konkreten Fällen</p>
7		<p>Erwartungswert und Standardabweichung normalverteilter Zufallsgrößen ermitteln</p> <ul style="list-style-type: none"> mithilfe der Definition (händisch) mithilfe des WTR
8 – 9	Untersuchung annähernd normalverteilter Zufallsgrößen	Anwendungsaufgaben
10 – 11	komplexere Übungen oder mögliche Vertiefungen	<p>Sigma-Umgebung als mögliche Vertiefung</p> <ul style="list-style-type: none"> entweder in Berechnungen ($P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$) andeuten oder als Vertiefung σ-Regeln konkret formulieren

(*) Die ausgewiesene Stundenzahl bezieht sich auf 45-Minuten-Einheiten.

Konkrete Hinweise und Materialien sowie GeoGebra-Dateien finden sich im Ordner „Unterrichtsgang Basisfach“.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

3. Wichtige Begriffe

Basisfach	Leistungsfach
Binomialverteilung als Beispiel für eine diskrete Verteilung Normalverteilung als Beispiel für eine stetige Verteilung	Binomialverteilung und Laplace-Verteilungen als Beispiele für diskrete Verteilungen Normalverteilung und weitere stetige Verteilungen (z.B. Gleichverteilung, Dreiecksverteilung, Exponentialverteilung, ...)
Normalverteilung mit Schwerpunkt auf Anwendungsaspekt	Normalverteilung auch mit Bezug zur Analysis
Erwartungswert / Standardabweichung	Erwartungswert / Standardabweichung
Glockenkurve	Gauß-Funktion; Glockenkurve Dichtefunktion

4. Aufgabenstellungen im Leistungsfach

Grundlegend:

- Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen erläutern
- Überprüfen, ob eine Dichtefunktion vorliegt
- Dichtefunktionen durch Berechnung von Parametern bestimmen
- Zusammenhang zwischen einer Verteilungsfunktion und der zugehörigen Dichtefunktion untersuchen
- Wahrscheinlichkeiten mithilfe einer Verteilungsfunktion (z.B. Gleichverteilung, Dreiecksverteilung, Exponentialverteilung, ...) berechnen
- Erwartungswert und Standardabweichung gemäß der Definition bei stetigen Zufallsgrößen berechnen
- Vom Histogramm einer Binomialverteilung auf die Glockenkurve schließen und den Funktionsterm der entsprechenden Dichtefunktion ermitteln
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einer Glockenkurve ablesen
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einem (gegebenen) Datensatz ermitteln
 - bei kleinen Datenmenge „händisch“
 - ansonsten mit WTR und weiteren digitalen Hilfsmitteln
- Glockenkurve anhand von Erwartungswert und Standardabweichung skizzieren
- Wahrscheinlichkeiten von (annähernd) normalverteilten Zufallsgrößen berechnen, auch mit Kenntnis/Angabe der zugehörigen Gaußfunktion
- Ermitteln von Datenintervallen, zu denen eine Wahrscheinlichkeit vorgegeben ist
 - mithilfe der INV-Funktion des WTR

Vertiefend:

- mithilfe der Sigmaregeln

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

5. Aufgabenstellungen im Basisfach

Grundlegend:

- Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen erläutern (am Beispiel Binomial- und Normalverteilung)
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einer Glockenkurve ablesen
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einem (gegebenen) Datensatz ermitteln
 - bei kleinen Datenmengen „händisch“
 - ansonsten mit WTR und weiteren digitalen Hilfsmitteln
- Glockenkurve anhand von Erwartungswert und Standardabweichung skizzieren
- Wahrscheinlichkeiten von (annähernd) normalverteilten Zufallsgrößen berechnen

Vertiefend:

- Ermitteln von Datenintervallen, zu denen eine Wahrscheinlichkeit vorgegeben ist
 - mithilfe der INV-Funktion des WTR
 - mithilfe der Sigmaregeln