Lineare Gleichungssysteme

I. Grundlagen

In den Klassenstufen 7/8 lernen die Schülerinnen und Schüler, lineare Gleichungssysteme manuell zu lösen. Dabei beschränkt man sich auf sogenannte 2x2 Systeme, d.h. auf lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Variablen. In der Regel werden diese mit dem Einsetzungsverfahren gelöst. Der Bildungsplan 2004 macht zu den Lösungsverfahren keine Angaben, sodass andere Verfahren selbstverständlich auch denkbar sind.

In den Klassenstufen 9/10 wird das manuelle Lösen von linearen Geleichungssystemen auf sogenannte 3x2 Systeme erweitert, um dann damit auch die Lagebeziehung von Geraden untersuchen und gegebenenfalls deren Schnittpunkt bestimmen zu können. Der Gauß-Algorithmus wird im Bildungsplan in diesem Zusammenhang nicht als erwartete Kompetenz erwähnt.

Damit ist die durch den Bildungsplan intendierte Vorgehensweise in Klasse 10, aus den drei Gleichungen, die sich beim Schnitt zweier Geraden im Raum ergeben, zwei auszuwählen und das so entstehende 2x2 LGS mit dem in Klasse 7/8 gelernten Verfahren zu lösen, also in der Regel mit dem Einsetzungsverfahren. Die so gewonnene Lösung des 2x2 LGS wird dann durch Einsetzen in die dritte, noch nicht verwendete Gleichung überprüft.

Das Gaußverfahren als Lösungsverfahren zu linearen Gleichungssystemen wird erst im Bildungsplan der Kursstufe zum Basisfach und im Bildungsplan 2004 zum Leistungsfach angesprochen.

Dort steht im Bildungsplan des Basisfachs:

Lineare Gleichungssysteme untersuchen	
(9)	das *Gaußverfahren*, auch in Matrixschreibweise, auf *lineare Gleichungssysteme* ohne Parameter bis zur Stufenform anwenden
(10)	die Lösungsvielfalt *linearer Gleichungssysteme* ohne Parameter angeben und im Falle eindeutiger Lösbarkeit deren Lösung bestimmen
P 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 5, 8	

Der Begriff „Lösungsmenge“ taucht im Bildungsplan für das Basisfach nicht auf, hier ist lediglich von „Lösung“ und „Lösungsvielfalt“ die Rede. Nur eindeutige Lösungen müssen konkret angegeben werden, darüber hinaus geht es um ein Verständnis der auftretenden Möglichkeiten.

Die geometrische Interpretation der Lösung(smenge) eines linearen Gleichungssystems wird im Basisfach nicht erwähnt – daher kann auf diese verzichtet werden. Die Berechnung der Schnittgerade von Ebenen wird in der Leitidee „Raum und Form“ auch nicht als inhaltsbezogene Kompetenz gefordert, sondern lediglich die Lagebeziehung zwischen *zwei Ebenen zu erkennen und zu begründen*. Letzteres kann bei einer anschaulichen Begründung des Falls „unendlich viele Lösungen bei einem 3x3 LGS“ im Unterrichtsgang evtl. nützlich sein.

Weitere Anwendungen der linearen Gleichungssysteme finden sich im Basisfach bei der Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden und eventuell beim Schnitt Gerade - Ebene in Parameterform, die Schnittgebilde von Ebenen werden nicht berechnet. Darüber hinaus spielen lineare Gleichungssysteme bei der Bestimmung von ganzrationalen Funktionen zu vorgegebenen Eigenschaften eine Rolle, wobei hier im Basisfach die Anzahl der Bedingungen so groß sein muss, dass alle Koeffizienten im Funktionsterm bestimmt werden können.

Außerdem wird im Bildungsplan für das Basisfach die Anwendung des Gaußverfahrens auf lineare Gleichungssysteme ohne Parameter beschränkt und auch die Lösung von linearen Gleichungssystemen beschränkt sich auf solche ohne Parameter.

Im Bildungsplan 2004 heißt es für das Leistungsfach zu linearen Gleichungssystemen:

2. LEITIDEE „ALGORITHMUS"

- in einfachen Fällen Grenzwerte bestimmen;
- zusammengesetzte Funktionen ableiten;
- in einfachen Fällen Stammfunktionen angeben;
- lineare Gleichungssysteme auf Lösbarkeit untersuchen; die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems bestimmen.

Inhalte

- *Ableitungsregeln für Produkt, Verkettung*
- *Stammfunktion (Summe, konstanter Faktor, lineare Substitution)*
- *Gauß-Algorithmus*

Bei der Interpretation dieser Inhalte für das Leistungsfach findet an dieser Stelle nun eine deutliche Differenzierung zwischen Basis- und Leistungsfach statt.

Im Leistungsfach ist von der Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems die Rede, womit auch deren geometrische Interpretation eingeschlossen ist. Die Einschränkung auf lineare Gleichungssysteme mit eindeutiger Lösung besteht nicht und so soll selbstverständlich auch die Schnittgerade von Ebenen berechnet werden können.

Darüber hinaus werden im Leistungsfach aber auch lineare Gleichungssysteme mit Parameter (auf der rechten Seite) betrachtet, wie sie auch für deren Anwendung im Zusammenhang mit Ebenen- und Geradenscharen unverzichtbar sind. Erläuterungen hierzu finden sich in Abschnitt III.

Die für das Leistungsfach genannten Inhalte bleiben auch nach dem Inkrafttreten des Bildungsplans 2016 unverändert (Abiturjahrgänge ab 2023). Dieser kann bezogen auf die verwendeten Operatoren als Interpretation des geforderten Niveaus im Leistungsfach auch schon während der Gültigkeit des Bildungsplans 2004 (Abiturjahrgänge 2021/22) herangezogen werden.
Der Bildungsplan 2016 lautet bezogen auf lineare Gleichungssysteme folgendermaßen:

3.4.1 Leitidee Zahl – Variable- Operation
[..]

Die Schülerinnen und Schüler können
Gauß-Algorithmus verwenden
(11) das *Gaußverfahren* zum Lösen eines *linearen Gleichungssystems* als ein Beispiel für ein algorithmisches Verfahren erläutern
(12) das *Gaußverfahren*, auch in *Matrixschreibweise*, zum Lösen eines *linearen Gleichungssystems* durchführen
(13) die Lösungsmenge eines *linearen 3x3- Gleichungssystems* geometrisch interpretieren

II. Lineare Gleichungssysteme im Basisfach

Im Gegensatz zum bisherigen vierstündigen Kernfach wird im Basisfach die Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems nur im Falle dessen eindeutiger Lösbarkeit verlangt. Das Gaußverfahren wird daher in allen anderen Fällen nur bis zur Stufenform angewandt, um dann auf dieser Grundlage eine Aussage zu machen, ob das lineare Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen besitzt. Eine Beschränkung auf lineare 3x3 Gleichungssysteme kann bei der prinzipiellen Betrachtung des Lösungsverfahrens sinnvoll sein. Bei der Bestimmung von ganzrationalen Funktionen zu vorgegebenen Eigenschaften sollten Fälle betrachtet werden, bei denen sich die Zahl der Unbekannten rasch reduziert.

Die Notation einer Lösungsmenge wird in keinem der Fälle erwartet. Ebenso wird daher auch nicht erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler eine solche Lösungsmenge geometrisch interpretieren können. Eine geometrische Überlegung kann jedoch zur Unterscheidung der Fälle „keine Lösung“ und „unendlich viele Lösungen“ sinnvoll sein (siehe unten).

Die folgenden Aufgabentypen sind demnach denkbar. Sie sind aber selbstverständlich nicht als abschließende Liste zu verstehen, sondern wollen vielmehr Optionen aufzeigen.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= -10 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -12 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Lösung: Man formt das LGS grundsätzlich mit dem Gauß-Algorithmus um bis zur Stufenform:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= -10 \\ 7x_2 - 3x_3 &= 26 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Und setzt in diesem Fall nach oben ein und erhält: $x_1 = 7$, $x_2 = 5$ und $x_3 = 3$.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie, ob das folgende lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: Der Gauß-Algorithmus bis zur Stufenform führt auf folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 5x_2 - 11x_3 &= -5 \\ 0x_1 - 0x_2 - 0x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 5x_2 - 11x_3 &= -5 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist hier eine „Nullzeile“ und in keiner der beiden anderen Zeilen steht eine falsche Aussage, wie z.B. $0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = -5$, daher hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Insbesondere hat also das obige lineare Gleichungssystem keine eindeutige Lösung.

Im Unterricht kann zur Begründung dieses Sachverhalts ein formales Einsetzen verschiedener Werte oder eine geometrische Interpretation verwendet werden, wobei beachtet werden muss, dass letztere im Bildungsplan nicht als Kompetenz gefordert wird. Geometrisch könnte man dann die beiden verbleibenden Gleichungen als Ebenengleichungen interpretieren. Diese beiden Ebenen sind nicht parallel und schneiden sich daher in einer Gerade, woraus folgt, dass das das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 3:

Untersuchen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme eine eindeutige Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben.

a) $$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 + & x_2 + & 5x_3 & = & 2 \\ -6x_1 - & 2x_2 - & 10x_3 & = & -4 \\ 9x_1 + & 3x_2 + & 15x_3 & = & 6 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 + & x_2 + & 5x_3 & = & 2 \\ -6x_1 - & 2x_2 - & 10x_3 & = & -3 \\ 9x_1 + & 3x_2 + & 15x_3 & = & 6 \end{array}$$

Lösung: Man formt das LGS wieder mit dem Gauß-Algorithmus um bis zur Stufenform:

I. $$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 + & x_2 + & 5x_3 & = & 2 \\ 0x_1 - & 0x_2 - & 0x_3 & = & 0 \\ 0x_1 + & 0x_2 + & 0x_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rrrcr} 3x_1 + & x_2 + & 5x_3 & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Der Gaußalgorithmus führt auf ein lineares Gleichungssystem mit zwei Nullzeilen, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen.

Begründung: Geometrisch kann man die 3 Zeilen des gegebenen linearen Gleichungssystems als Ebenengleichungen von 3 identischen Ebenen interpretieren. Das lineare Gleichungssystem hat damit unendlich viele Lösungen.

II. $$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 + & x_2 + & 5x_3 & = & 2 \\ 0x_1 - & 0x_2 - & 0x_3 & = & 1 \\ 0x_1 + & 0x_2 + & 0x_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rrrcr} 3x_1 + & x_2 + & 5x_3 & = & 2 \\ & & 0 & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Die letzte Zeile ist hier eine „Nullzeile“ und in der 2. Zeile steht die falsche Aussage $0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = 1$, daher hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Begründung: Geometrisch kann man die 3 Zeilen des gegebenen linearen Gleichungssystems als Ebenengleichungen von 2 identischen Ebenen und einer dazu parallelen Ebene interpretieren. Daher haben die 3 Ebenen keine gemeinsamen Punkte und das lineare Gleichungssystem hat damit keine Lösung.

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 40 \end{aligned}$$

Lösung: Man formt das LGS wieder mit dem Gauß-Algorithmus um bis zur Stufenform:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 10 \\ 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= -18 \end{aligned}$$

Der Gaußalgorithmus führt auf ein lineares Gleichungssystem, das in der letzten Zeile die falsche Aussage $0 = -18$ enthält. Deshalb ist das lineare Gleichungssystem unlösbar.

Im Unterricht bietet sich hier zur Begründung keine geometrische Interpretation in Bezug auf die Lage der drei gegebenen Ebenen an.

Selbstverständlich sind die in diesem Abschnitt genannten Fragestellungen alle auch im Leistungsfach möglich.

III. Lineare Gleichungssysteme im Leistungsfach

Im Leistungsfach umfasst das Themengebiet „Lineare Gleichungssysteme“ zunächst die schon bisher im vierstündigen Kernfach üblichen Inhalte.

Darüber hinaus sind auch die folgenden Fragestellungen denkbar, die Möglichkeiten aufzeigen, gemäß den Zielen des Leistungsfachs einen erhöhten Komplexitäts- und Formalisierungsgrad zu erreichen.

Lineare Gleichungssysteme mit „zusätzlichen“ Parametern auf der „rechten“ Seite

Ziele: Abhängigkeit der Art der Lösungsmenge von der Wahl der Parameter,
erhöhte algebraische Anforderungen

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von **r** ∈ IR.

Auch denkbar:
Bestimmen Sie für **r** ∈ IR die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4\mathbf{r} \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 8\mathbf{r} \end{aligned}$$

Lösung: Als zugehörige Matrix in Stufenform erhält man:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 5 & 12-4\mathbf{r} \\ 0 & 0 & 1 & 4\mathbf{r}+6 \end{pmatrix}$$

Und damit $(x_1 ; x_2 ; x_3) = \left(\frac{14r+18}{5} ; \frac{24r+18}{5} ; 4r+6\right)$, r ∈ IR (Begründung: „Einsetzen nach oben“)

Und als Lösungsmenge: $L_r = \left\{\left(\frac{14r+18}{5}; \frac{24r+18}{5}; 4r+6\right)\right\}$

Geometrische Interpretation von Lösungsmengen

Ziele: Vertieftes Verständnis der Lösungsmenge

Aufgabe 6:

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den Unbekannten x_1, x_2, x_3 auf, das die folgende Lösungsmenge besitzt:

$$L = \{(1+7r; 2+11r; 3+r) \mid r \in IR\}$$

Alternativ:
Geben Sie die Gleichungen zweier Ebenen an, die die Schnittgerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r \in IR$$ besitzen.

Einsetzen von $r = x_3 - 3$ führt auf $x_1 - 7x_3 = -20$ und $x_2 - 11x_3 = -31$ und damit auf das LGS:

$$\begin{aligned} x_1 - \quad\quad\quad 7x_3 &= -20 \\ x_2 - 11x_3 &= -31 \end{aligned}$$

Mögliche Lösung der alternativen geometrischen Fragestellung:

P(1|2|3) liegt in den beiden gesuchten Ebenen E und F.

Ein Normalenvektor von E bzw. F muss orthogonal zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Geraden sein.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$ erfüllen diese Bedingung.

Die vollständigen Gleichungen der Ebenen erhält man durch Punktprobe mit dem Punkt P.

Aufgabe 7:

Zwei Schülerinnen lösen dasselbe lineare Gleichungssystem. Sie erhalten die Lösungsmengen

$$L_1 = \{(2 + r; 1 + r; 3 - r) \mid r \in IR\}$$

bzw.

$$L_2 = \{(1 - s; \quad -s; 4 + s) \mid s \in IR\}$$

Untersuchen Sie, ob diese Lösungsmengen identisch sind.

Geometrisch lassen sich die Lösungsmengen als Geraden g_1 bzw. g_2 interpretieren. Die zugehörigen Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander. Der Punkt (1/0/4) der Geraden g_2 liegt auch auf der Geraden g_1. Damit sind die Geraden und damit auch die zugehörigen Lösungsmengen identisch.

IV. Mögliche Differenzierungen im Leistungsfach

Anknüpfend an die Fragestellungen zu linearen Gleichungssystemen mit „zusätzlichen“ Parametern auf der „rechten Seite“ in Kapitel III. bietet es sich an, auch lineare Gleichungssysteme mit zusätzlichen Parametern auf der „linken Seite“ bzw. auf „beiden Seiten“ zu untersuchen. die über das Standardniveau hinausgehen und nur für die Förderung besonders interessierter Schülerinnen und Schüler gedacht sind. Beispiele hierfür sind:

Beispiel 1:

Untersuchen Sie, für welche Werte von **t** ∈ IR das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen hat.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \mathbf{t}x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= \mathbf{t} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Führt auf folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & t & 0 \\ 0 & 2 & 1 & t \\ 0 & 0 & 2t-3 & t-4 \end{pmatrix}$$

Für $t = \frac{3}{2}$ hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, sonst genau eine Lösung in Abhängigkeit von t. (Hinweis: mit Augenmaß)

Beispiel 2:

Zeigen Sie, dass für $r = 2$ das lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung $(0; 0; 0)$ besitzt. (…die zugehörigen Ebenen nur den Ursprung gemeinsam haben.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2r \cdot x_1 + 2r \cdot x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 0{,}5r \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie r ∈ IR so, dass das lineare Gleichungssystem weitere Lösungen besitzt (… die Ebenen weitere Punkte gemeinsam haben).

Führt auf folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5r & 0 \\ 0 & 0 & (r-1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Weitere Lösungen existieren für $r = 1$.

Beispiel 3:

Bestimmen Sie, für welche reellen Werte von a und b das lineare Gleichungssystem

- keine Lösung hat
- genau eine Lösung hat
- unendlich viele Lösungen hat.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

Führt auf folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & b+2 \end{pmatrix}$$

- keine Lösung für $a = -1 \text{ und } b \neq -2$
- genau eine Lösung für $a \neq -1$
- unendlich viele Lösungen für $a = -1 \text{ und } b = -2$

Beispiel 4:

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 - \mathbf{d}x_2 \qquad &= -2\mathbf{d} \\ (10 - \mathbf{a}) \cdot x_2 - 5x_3 &= -10 \\ (10 + \mathbf{a}) \cdot x_3 &= 40 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem bei gegebenem d ∈ IR für alle a ∈ IR mit $|a| \neq 10$ eindeutig lösbar ist.

b) In welchem der Fälle $|a| = 10$ hat das System mehr als eine Lösung? Interpretieren Sie das lineare Gleichungssystem für diesen Fall geometrisch.

c) Bestimmen Sie a und d so, dass (x_1 ; x_2 ; x_3)= (4 ; 5 ; 20) Lösung des linearen Gleichungssystem s ist.

a) Für $a = 10$ hat das lineare Gleichungssystem mehr als eine Lösung , siehe b)

Für $a = -10$ hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, da die dritte Gleichung auf $0 \cdot x_3 = 40$ führt. In allen anderen Fällen existiert genau eine von a und d abhängige Lösung.

b) Für $a = 10$ beschreiben die zweite und die dritte Gleichung dieselbe Ebene $x_3 = 2$.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems liefert die Schnittgerade dieser Ebene mit der durch die erste Gleichung beschriebenen Ebene.

c) $a = -8$, $d = 4$