**Stationenlauf zu den Eigenschaften von Folgen**

von Thilo Höfer, ZSL RS Schwäbisch Gmünd

 **1. Monotonie**

Station 1a: Strategie bei Monotonieuntersuchungen

 Station 1b: Berechnungen zur Monotonie

 Station 1c: Monotonie ohne Berechnungen

 **2. Beschränktheit**

 Station 2a: Strategie bei Untersuchungen auf Beschränktheit

 Station 2b: Berechnungen zur Beschränktheit

 Station 2c: Beschränktheit ohne Berechnungen

Immer zunächst Station a durcharbeiten, dann b und c in beliebiger Reihenfolge.

**Station 1a:**

**Strategien bei Monotonieuntersuchungen**

Die folgenden vier Schritte sollte man durchführen, wenn man eine Folge auf Monotonie untersuchen möchte. (Sobald ein Schritt erfolgreich war, kann man aufhören!)

**1.) Vergleich der Terme von an+1 und an**

Oft muss man gar nichts berechnen, sondern kann einfach die Monotonie der Folge mit stichhaltigen Argumenten begründen.

***Bsp.:*** Folge $(a\_{n})$ mit $a\_{n}=\frac{4}{n+2}$. Es sind $a\_{n}=\frac{4}{n+2}$und $a\_{n+1}=\frac{4}{(n+1)+2}=\frac{4}{n+3}$.

Beide Zähler sind gleich, der Nenner von an+1 ist größer als der von an, somit ist an+1 kleiner als an.

Also gilt: $(a\_{n})$ ist streng monoton abnehmend.

**2.) Betrachtung der Differenz an+1 – an**

Wenn an+1 immer größer *(kleiner)* als an ist (d.h. Folge ist streng monoton zunehmend), so muss die Differenz an+1 – an größer *(kleiner)* als 0 sein. *Warum?*

***Bsp.:*** $(a\_{n})$mit $a\_{n}=\frac{1-2n}{n}$

$a\_{n+1}-a\_{n}=\frac{1-2\left(n+1\right)}{n+1}-\frac{1-2n}{n}=\frac{1-2n-2}{n+1}-\frac{1-2n}{n}=\frac{-2n-1}{n+1}-\frac{1-2n}{n}=\frac{\left(-2n-1\right)n}{\left(n+1\right)n}-\frac{(1-2n)(n+1)}{n(n+1)}$

 $=\frac{-2n^{2}-n-(n+1-2n^{2}-2n)}{n(n+1)}=\frac{-1}{n(n+1)}<0$ für alle n ∈ IN.

Somit ist an+1 < an und die Folge ist streng monoton abnehmend.

**3.) Betrachtung des Quotienten** $\frac{a\_{n+1}}{a\_{n}}$

Wenn an+1 immer größer *(kleiner)* als an und an > 0 ist (d.h. Folge ist positiv und streng monoton zunehmend), so muss der Quotient$\frac{a\_{n+1}}{a\_{n}}$ größer *(kleiner)* als 1 sein. *Warum?*

***Bsp.:*** $(a\_{n})=(\sqrt{n+4})$

$\frac{a\_{n+1}}{a\_{n}}=\frac{\sqrt{(n+1)+4}}{\sqrt{n+4}}=\sqrt{\frac{n+1+4}{n+4}}=\sqrt{\frac{n+4}{n+4}+\frac{1}{n+4}}=\sqrt{1+\frac{1}{n+4}}>1$für alle n ∈ IN.

Somit ist an+1 >an und die Folge ist streng monoton zunehmend.

***ACHTUNG:***

**(a)** Wenn an < 0 ist, dann gilt die Regel genau anders herum:

Bsp.: $a\_{1}=-6;a\_{2}=-4;a\_{3}=-3$ , also $\frac{a\_{2}}{a\_{1}}=\frac{-4}{-6}<1$ ; $\frac{a\_{3}}{a\_{2}}=\frac{-3}{-4}<1$, somit monoton steigend (!)

**(b)** Wenn an „mal größer und mal kleiner 0“ ist, dann funktioniert die Betrachtung des Quotienten nicht.

**4.) Nachweis von „nicht monoton“**

Um nachzuweisen, dass eine Folge nicht monoton ist, genügt es ein Beispiel anzugeben, an dem man sieht, dass die Folgenglieder „hoch und runter gehen“.

***Bsp:*** $(a\_{n})=\left(\frac{9}{n}+\frac{n}{9}\right)$

Es gilt: $a\_{8}=\frac{145}{72}≈2,01$, $a\_{9}=2$, $a\_{10}=\frac{181}{90}≈2,01$.

Somit ist a8> a9 aber a9< a10, die Folge ist also nicht monoton.

**Station 1b:**

**Berechnungen zur Monotonie**

**Pflichtaufgaben:**

Untersuche die Folge $(a\_{n})$ auf Monotonie.

a) $a\_{n}=\frac{1-n}{n+1}$ b) $a\_{n}=2^{n}+(-2)^{n}$ c) $a\_{n}=n⋅\left(n+1\right)⋅\left(n+2\right)∙…∙2n$

d) $a\_{n}=1-\frac{1}{n}$ e) $a\_{n}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ f) $a\_{n}=(-1)^{n+1}$ g) $a\_{n}=1+\frac{1}{n}⋅(-1)^{n}$

**Wahlaufgaben:**

Untersuche die Folge $(a\_{n})$ auf Monotonie.

a) $a\_{n}=3-2n$ b) $a\_{n}=3n^{2}-2n$ c) $a\_{n}=\frac{3n-2}{2n+3}$ d) $a\_{n}=\frac{n+2}{2n-15}$

e) $a\_{n}=\left(-1\right)^{n}∙\frac{2n}{n+3}$ f) $a\_{n}=\frac{3}{\sqrt{n+5}}$ g) $a\_{n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ h) $a\_{n}=\frac{\left(n+1\right)^{2}}{n}$

**Station 1b:**

**Berechnungen zur Monotonie**

**Pflichtaufgaben:**

Untersuche die Folge $(a\_{n})$ auf Monotonie.

a) $a\_{n}=\frac{1-n}{n+1}$ b) $a\_{n}=2^{n}+(-2)^{n}$ c) $a\_{n}=n⋅\left(n+1\right)⋅\left(n+2\right)∙…∙2n$

d) $a\_{n}=1-\frac{1}{n}$ e) $a\_{n}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ f) $a\_{n}=(-1)^{n+1}$ g) $a\_{n}=1+\frac{1}{n}⋅(-1)^{n}$

**Wahlaufgaben:**

Untersuche die Folge $(a\_{n})$ auf Monotonie.

a) $a\_{n}=3-2n$ b) $a\_{n}=3n^{2}-2n$ c) $a\_{n}=\frac{3n-2}{2n+3}$ d) $a\_{n}=\frac{n+2}{2n-15}$

e) $a\_{n}=\left(-1\right)^{n}∙\frac{2n}{n+3}$ f) $a\_{n}=\frac{3}{\sqrt{n+5}}$ g) $a\_{n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ h) $a\_{n}=\frac{\left(n+1\right)^{2}}{n}$

**Station 1c:**

**Monotonie ohne Berechnungen**

**Pflichtaufgaben:**

1. Kreuze die Eigenschaften an, die auf die Folge zutreffen.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $(a\_{n})$mit | $$\frac{1}{n}$$ | 2 | $$\left(-1\right)^{n}$$ | $$-n$$ | $$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$ | $$2^{n}$$ | $$\left(-2\right)^{n}$$ |
| streng monoton zunehmend |  |  |  |  |  |  |  |
| streng monoton abnehmend |  |  |  |  |  |  |  |
| monoton zunehmend |  |  |  |  |  |  |  |
| monoton abnehmend |  |  |  |  |  |  |  |

1. Gib je mindestens zwei Folgen an (möglichst abwechslungsreich!), die die folgenden Bedingungen erfüllen. Die Aufgaben e) und f) bearbeite bitte erst nachdem du die Blätter zur Beschränktheit von Folgen behandelt hast.

Die Folgen sind ...

* + - * 1. ... monoton abnehmend,
				2. ... streng monoton zunehmend,
				3. ... weder monoton zunehmend noch abnehmend,
				4. ... bis zum 10. Folgenglied streng monoton abnehmend, danach monoton zunehmend,
				5. ... streng monoton abnehmend und nach unten beschränkt,
				6. ... streng monoton abnehmend und nicht nach unten beschränkt.

**Wahlaufgaben:**

1. Gegeben sei eine arithmetische Folge $(a\_{n})$ mit $a\_{n}=a\_{0}+d∙n$. Für welche d ist sie streng monoton zunehmend, streng monoton abnehmend, monoton zunehmend, monoton abnehmend oder nicht monoton?
2. Gegeben sei eine geometrische Folge $(a\_{n})$ mit $a\_{n}=a\_{0}⋅q^{n}$ und a0 > 0. Für welche q ist sie streng monoton zunehmend, streng monoton abnehmend, monoton zunehmend, monoton abnehmend oder nicht monoton?

**Station 2a: Strategie bei**

**Untersuchungen auf Beschränktheit**

Die folgenden drei Vorgehensweisen sollte man beachten, wenn man eine Folge auf Beschränktheit untersuchen möchte. Bei der Untersuchung auf Beschränktheit ist ein geübter Blick viel Wert!!

**1.) Den Term geeignet umformen**

Ziel ist es, den Term so umzuformen, dass man eine Schranke ablesen kann.

***Bsp.:*** $(a\_{n})$ mit$a\_{n}=\frac{n}{3n-2}$

Im Nenner klammern wir n aus und erhalten $\frac{n}{3n-2}=\frac{n}{n⋅(3-\frac{2}{n})}$. Jetzt kürzen wir mit n, es folgt $\frac{1}{(3-\frac{2}{n})}$. Für n = 1 ist dieser Term gleich 1. Für n >1 ist $3-\frac{2}{n}$ größer als 1 (z.B. für n = 2: 3 – 1 = 2), somit ist $\frac{1}{(3-\frac{2}{n})}$ kleiner als 1. Dadurch wissen wir: 1 ist obere Schranke von $\frac{n}{3n-2}$ für n ≥ 1. Für n = 0 ergibt sich nichts Neues, da dann$\frac{n}{3n-2}=\frac{0}{3⋅0-2}=0<1$.

**2.) Einen Faktor geeignet vergrößern / verkleinern**

Oft kann man durch geschickte Manipulation am Folgenterm eine Schranke angeben.

***Bsp.:*** $(a\_{n})$ mit$a\_{n}=\frac{n}{3n-2}$

Wir sehen uns den Term $\frac{n}{3n-2}$ genau an: Wäre die „–2“ nicht, könnte man mit n kürzen. Nun überlegen wir: 3n ist größer als 3n – 2. Der Term $\frac{n}{3n}$ hat somit einen **größeren Nenner**, d.h. er ist **kleiner** als unser Ausgangsterm $\frac{n}{3n-2}$. Somit gilt $\frac{n}{3n-2}>\frac{n}{3n}$. Auf der rechten Seite mit n gekürzt folgt $\frac{n}{3n-2}>\frac{1}{3}$ und somit ist $\frac{1}{3}$ eine untere Schranke für $\frac{n}{3n-2}$.

**3.) Einen Summanden geeignet vergrößern / verkleinern**

Dies ist eine zum Punkt 2.) ähnliche Vorgehensweise. Hier verändert man eben einen Summanden geschickt (anstatt eines Faktors). Ansonsten ist es gleich wie in 2.).

***Bsp.:*** $(a\_{n})$ mit$a\_{n}=n^{2}-n^{3}$

Wenn n ≥ 1 ist, so wird die Differenz vergrößert, wenn man den ersten Summanden mit n multipliziert: $n^{2}-n^{3}<n⋅n^{2}-n^{3}$ (z.B. Für n = 2: $2^{2}-2^{3}<2⋅2^{2}-2^{3}$). Nun steht auf der rechten Seite $n⋅n^{2}-n^{3}=n^{3}-n^{3}=0$ und somit gilt $n^{2}-n^{3}<0$, also ist 0 eine obere Schranke für $n^{2}-n^{3}$ mit n ≥ 1. Für n = 0 ergibt sich $n^{2}-n^{3}=0$, also ist 0 auch für n ≥ 0 eine obere Schranke.

**Station 2b:**

**Berechnungen zur Beschränktheit**

**Pflichtaufgaben:**

Untersuche die Folge $(a\_{n})$ auf Beschränktheit.

a) $a\_{n}=\frac{1-n}{n+1}$ b) $a\_{n}=2^{n}+(-2)^{n}$ c) $a\_{n}=n⋅\left(n+1\right)⋅\left(n+2\right)∙…∙2n$

d) $a\_{n}=1-\frac{1}{n}$ e) $a\_{n}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ f) $a\_{n}=(-1)^{n+1}$ g) $a\_{n}=1+\frac{1}{n}⋅(-1)^{n}$

**Wahlaufgaben:**

Untersuche die Folge $(a\_{n})$ auf Beschränktheit.

a) $a\_{n}=12-3n$ b) $a\_{n}=2n^{2}-3n$ c) $a\_{n}=\frac{4n-2}{n+4}$

d) $a\_{n}=\frac{2n+6}{3n-10}$ e) $a\_{n}=\frac{2^{n}+1}{\left(-1\right)^{n}}$ f) $a\_{n}=\left(-1\right)^{n}∙\frac{2n+3}{n+2}$

**Station 2b:**

**Berechnungen zur Beschränktheit**

**Pflichtaufgaben:**

Untersuche die Folge $(a\_{n})$ auf Beschränktheit.

a) $a\_{n}=\frac{1-n}{n+1}$ b) $a\_{n}=2^{n}+(-2)^{n}$ c) $a\_{n}=n⋅\left(n+1\right)⋅\left(n+2\right)∙…∙2n$

d) $a\_{n}=1-\frac{1}{n}$ e) $a\_{n}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ f) $a\_{n}=(-1)^{n+1}$ g) $a\_{n}=1+\frac{1}{n}⋅(-1)^{n}$

**Wahlaufgaben:**

Untersuche die Folge $(a\_{n})$ auf Beschränktheit.

a) $a\_{n}=12-3n$ b) $a\_{n}=2n^{2}-3n$ c) $a\_{n}=\frac{4n-2}{n+4}$

d) $a\_{n}=\frac{2n+6}{3n-10}$ e) $a\_{n}=\frac{2^{n}+1}{\left(-1\right)^{n}}$ f) $a\_{n}=\left(-1\right)^{n}∙\frac{2n+3}{n+2}$

**Station 2c:**

**Beschränktheit ohne Berechnungen**

**Pflichtaufgaben:**

1. Gib eine Folge an, für die 5 obere Schranke ist, 4 aber keine obere Schranke ist.
2. Kreuze die Eigenschaften an, die auf die Folge zutreffen.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $(a\_{n})$mit | $$\frac{1}{n}$$ | 2 | $$\left(-1\right)^{n}$$ | $$-n$$ | $$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$ | $$2^{n}$$ | $$\left(-2\right)^{n}$$ |
| nach oben beschränkt |  |  |  |  |  |  |  |
| nach unten beschränkt |  |  |  |  |  |  |  |
| beschränkt |  |  |  |  |  |  |  |

**Wahlaufgaben:**

Gib eine Folge an, für die 6 die kleinstmögliche obere Schranke ist, unendlich viele Glieder gleich 6 sind, aber auch unendlich viele Glieder ungleich 6 sind.

**Station 2c:**

**Beschränktheit ohne Berechnungen**

**Pflichtaufgaben:**

1.) Gib eine Folge an, für die 5 obere Schranke ist, 4 aber keine obere Schranke ist.

2.) Falls du Station 1c schon behandelt hast, so vervollständige nun die Aufgabe dieser Station, die sich auf die Beschränktheit von Folgen beziehen.

**Wahlaufgaben:**

Gib eine Folge an, für die 6 die kleinstmögliche obere Schranke ist, unendlich viele Glieder gleich 6 sind, aber auch unendlich viele Glieder ungleich 6 sind.