**Vertiefungskurs Mathematik**

Eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten hat in C immer zwei Lösungen

(bzw. eine doppelte reelle Lösung). In der „Mitternachtsformel“ sieht man sofort, dass

für die beiden komplexen Lösungen und gilt: .

Wie wollen folgenden weitergehenden Satz A beweisen:

Wenn ein Polynom vom Grad mit reellen Koeffizienten in C die komplexe

Nullstelle besitzt, dann ist auch eine Nullstelle des Polynoms .

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir zunächst einige andere einfache

elementare Sätze über komplexe Zahlen beweisen.

Satz 1: Sei und dann gilt: .

Beweis:

🡺 q.e.d.

Satz 2: Sei und dann gilt: .

Beweis:

🡺 q.e.d.

Satz 3: Sei dann gilt für : .

Beweis:

(1) Induktionsanfang: ; Mit Satz 2 folgt sofort:

Damit ist die Behauptung für nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt: (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

Setzt man im Satz 2 für und für ein, dann folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 4: Sei dann gilt für : .

Beweis:

(1) Induktionsanfang: ; Mit Satz 1 folgt sofort:

Damit ist die Behauptung für nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt: (\*)

Zu zeigen:

Aus Satz 1 folgt mit und sofort:

Mit (\*) folgt:

🡺

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Beweis von Satz A:

Voraussetzung: mit

ist Nullstelle von , d.h.

Behauptung: ist Nullstelle von , d.h.

Beweis:

Aus Satz 2 und ( ) folgt:

Mit Satz 3 folgt:

Mit Satz 4 folgt:

Somit ist auch eine Nullstelle von . q.e.d.