 Vertiefungskurs Mathematik Klausur Nr. 2 16.05.19 (AP)

A1 a) $x^5 + 5x^3 - 36x = 0$

$x \cdot (x^4 + 5x^2 - 36) = 0$

$x_1 = 0$ oder $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Sub.: $x^2 = u$

$u^2 + 5u - 36 = (u+9) \cdot (u-4) = 0$ (Vieta)

$u_1 = 4$; $u_2 = -9$

Resub.: $x^2 = 4 \Rightarrow x_2 = -2$; $x_3 = 2$

$x^2 = -9$ keine weiteren Lösungen

$L = \{0; -2; 2\}$

b) Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(3x^3 - 6x^2 - 15x + 18) : (x-1) = 3x^2 - 3x - 18 \\
-(3x^3 - 3x^2) \\
\quad -3x^2 - 15x \\
\quad -(-3x^2 + 3x) \\
\quad\quad -18x + 18 \\
\quad\quad -(-18x + 18) \\
\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

$3x^2 - 3x - 18 = 0 \quad |:3$

$x^2 - x - 6 = (x-3) \cdot (x+2) = 0$ (Vieta)

$x_1 = 3$; $x_2 = -2$ $\qquad L = \{-2; 3\}$

A2 $x^3 + 2x^2 - tx = 0$

$x \cdot (x^2 + 2x - t) = 0$ $\qquad x_1 = 0$ (unabh. von t)

$x^2 + 2x - t = 0$ $\qquad D = 4 - 4 \cdot (-t) = 4 + 4t$

Fall 1: $t = -1 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$ Eine weitere Lösung $x_2 = \frac{-2}{2} = -1$

Fall 2: $t < -1 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ keine weitere Lösung

Fall 3: $t > -1 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ zwei weitere Lösungen

$x_{2;3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4t}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+t}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+t}$

Sonderfall: $t = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \,;\, x_3 = -2$

D.h. $x_1 = x_2$ (also doppelte Nullstelle)

Zusammenfassung:

$t < -1 \Rightarrow$ Es gibt genau eine Lösung

$t = -1$ ~~und~~ oder $t = 0 \Rightarrow$ Es gibt genau zwei Lösungen

$-1 < t < 0$ oder $t > 0 \Rightarrow$ Es gibt genau drei Lösungen

A3 a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$\frac{4x-4}{2x+4} - 3x = 2x - 1 \quad | +3x$$

$$\frac{4x-4}{2x+4} = 5x - 1 \quad | \cdot (2x+4) \neq 0$$

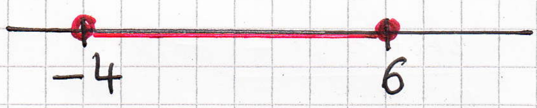
$$4x - 4 = 10x^2 + 18x - 4 \quad | -4x + 4$$

$$0 = 10x^2 + 14x \quad | : 2$$

$$0 = x \cdot (5x + 7)$$

$x_1 = 0 \,;\, x_2 = -1{,}4 \qquad L = \{0; -1{,}4\}$

b)



$D = [-4; 6]$

$$\sqrt{3 - 0{,}5x} - 1 = \sqrt{0{,}5x + 2} \quad | (\ )^2$$

$$3 - 0{,}5x - 2\sqrt{3 - 0{,}5x} + 1 = 0{,}5x + 2 \quad | +0{,}5x - 4$$

$$-2\sqrt{3 - 0{,}5x} = x - 2 \quad | (\ )^2$$

$$4 \cdot (3 - 0{,}5x) = x^2 - 4x + 4$$

$$12 - 2x = x^2 - 4x + 4 \quad | +2x - 12$$

$$0 = x^2 - 2x - 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4) \cdot (x+2) = 0$$

$x_1 = 4 \,;\, x_2 - 2$

Probe: $x_1 = 4 \quad \sqrt{3 - 2} - 1 = \sqrt{2 + 2}$

$1 - 1 = 2 \quad f$

$x_2 = -2 \quad \sqrt{3 + 1} - 1 = \sqrt{-1 + 2} \qquad L = \{-2\}$

$2 - 1 = 1$ ✓

A4 $9^x = 5 \cdot 3^x + 6$

$(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x - 6 = 0$ Sub.: $3^x = u$

$u^2 - 5u - 6 = 0$

$(u-6) \cdot (u+1) = 0 \Rightarrow u_1 = 6 \,;\, u_2 = -1$

Resub.: $3^x = 6 \Rightarrow x = \log_3 6$

$3^x = -1$ ↯ keine Lösung $\quad L = \{\log_3 6\}$

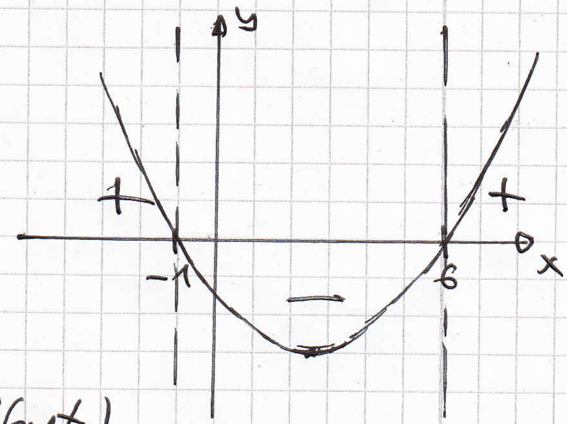
A5 $x^2 - 3x \geqq 2x + 6 \quad | -2x - 6$

$x^2 - 5x - 6 \geqq 0$

Grenzfall: $x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x-6) \cdot (x+1) = 0$

$x_1 = -1 \,;\, x_2 = 6$



Parabel 2. Ordnung (nach oben geöffnet)

$L = (-\infty; -1] \cup [6; \infty)$

A6 $|x - 15| = \frac{2}{3}x + 5a$

Fall 1: $x \geqq 15$

$|x - 15| = x - 15 = \frac{2}{3}x + 5a \quad | -\frac{2}{3}x + 15$

$\frac{1}{3}x = 15 + 5a \quad | \cdot 3$

$x = 45 + 15a$

aber $x \geqq 15 \Rightarrow 45 + 15a \geqq 15$

$a \geqq -2$

Fall 2: $x < 15$

$|x - 15| = -x + 15 = \frac{2}{3}x + 5a \quad | +x - 5a$

$15 - 5a = \frac{5}{3}x \quad | \cdot \frac{3}{5}$

$9 - 3a = x$

aber $x < 15 \Rightarrow 9 - 3a < 15 \Rightarrow a > -2$

$L_a = \{45 + 15a\}$ für $a = -2$ (bzw. $L_{-2} = \{15\}$)

$L_a = \{45 + 15a \,;\, 9 - 3a\}$ für $a > -2$

$L_a = \{\ \}$ für $a < -2$

A7 $a_{n+1} = 3a_n - 5$; $a_1 = 2$

$a_2 = 1$; $a_3 = -2$; $a_4 = -11$; $a_5 = -38$

A8 $b_{16} - b_{11} = 65 - 35 = 30$; $30 : 5 = 6$

$b_1 = b_{11} - 10 \cdot 6 = 35 - 60 = -25$

$b_{100} = b_{16} + 84 \cdot 6 = 65 + 504 = 569$

A9 ($c_1 = -1$; $c_2 = 1$; $c_3 = 5$; $c_4 = 13$; $c_5 = 29$; ....)

$c_{n+1} = 2^{n+1} - 3 = 2 \cdot 2^n - 3 = 2 \cdot 2^n - 6 + 3$

$c_{n+1} = 2 \cdot \underbrace{(2^n - 3)}_{c_n} + 3$

$c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 3$; $c_1 = -1$

A10 (1) Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 + 3^1 = \frac{3^{1+1} - 1}{2} = \frac{3^2 - 1}{2}$$

$$1 + 3 = \frac{8}{2}$$

$$4 = 4 \;\checkmark$$

Die Behauptung ist für $n=1$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + 3 + 9 + \dots + 3^k = \frac{3^{k+1} - 1}{2} \quad (*)$$

zu zeigen: $1 + 3 + 9 + \dots + 3^k + 3^{k+1} = \frac{3^{k+2} - 1}{2}$

$$\underbrace{1 + 3 + 9 + \dots + 3^k}_{(*)\; \underline{3^{k+1} - 1}} + 3^{k+1} = \frac{3^{k+1} - 1}{2} + 3^{k+1}$$

$$= \frac{3^{k+1} - 1 + 2 \cdot 3^{k+1}}{2} = \frac{3 \cdot 3^{k+1} - 1}{2} = \frac{3^{k+2} - 1}{2}$$

(3) Aus (1) und (2) folgt die Behauptung.