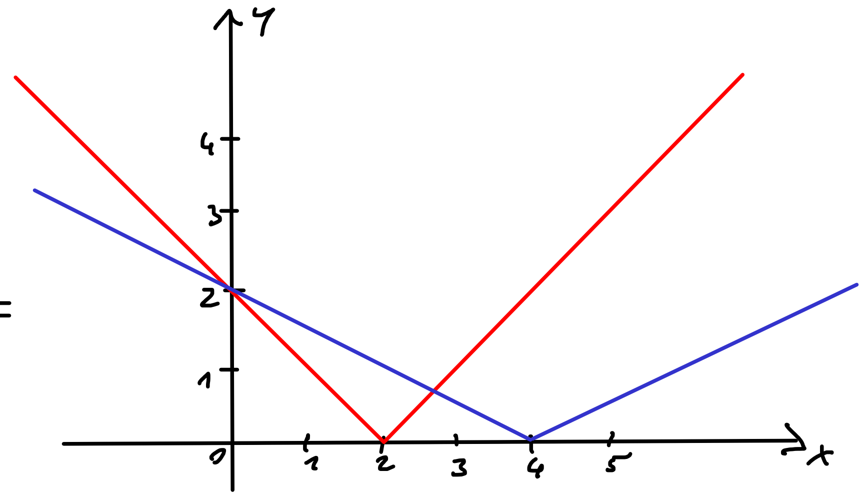
Vertiefungskurs KS1 Nr. 2

1. $|2-x| > |\frac{1}{2}x-2|$

zeichnerische Lösung



abgelesen:

$L = (-\infty; 0) \cup (2{,}7; \infty)$

rechnerische Lösung:

1. Fall: $x \geq 4$

$-2+x > \frac{1}{2}x - 2 \quad | -\frac{1}{2}x + 2$

$\frac{1}{2}x > 0$

$x > 0$

$L_1 = [4; \infty)$

2. Fall: $2 \leq x < 4$

$-2+x > -\frac{1}{2}x + 2 \quad | +\frac{1}{2}x + 2$

$\frac{3}{2}x > 4 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$x > \frac{8}{3}$

$L_2 = (\frac{8}{3}; 4)$

3. Fall: $x < 2$

$2-x > -\frac{1}{2}x + 2 \quad | +x-2$

$0 > \frac{1}{2}x \quad | \cdot 2$

$0 > x$

$L_3 = (-\infty; 0)$

gesamte Lösung: $L = (-\infty; 0) \cup (\frac{8}{3}; \infty)$

2. $x - 1 \leq 2 + \frac{8}{x-1} \quad | -2 \qquad x \neq 1$

$x - 3 \leq \frac{8}{x-1} \quad | \cdot (x-1)$

1. Fall: $x > 1$

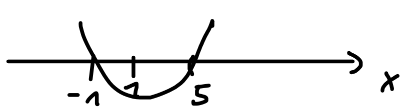
$(x-3)(x-1) \leq 8$

$x^2 - 4x + 3 \leq 8 \quad | -8$

$x^2 - 4x - 5 \leq 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$

$x_1 = 5 \ ; \ x_2 = -1$



$L_1 = (1; 5]$

2. Fall: $x < 1$

$x^2 - 4x + 3 \geq 8$

$x^2 - 4x - 5 \geq 0$

$L_2 = (-\infty; -1]$

$L = (-\infty; -1] \cup (1; 5]$

3. a) $a_1 = -\frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{1}{5}$; $a_3 = -\frac{1}{7}$; $a_4 = \frac{1}{9}$

explizit: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$

rekursiv: $a_1 = -\frac{1}{3}$; $a_n = a_{n-1} \cdot \left(-\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

b) divergente, beschränkte Folge: $a_n = (-1)^n$

4. zu zeigen: $2 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 2 \cdot 2^n = 2^{n+2} - 2$ $(*)$

Ind.anf.: $a_0 = 2 \cdot 2^0 = 2$

$a_0 = 2^{0+2} - 2 = 4 - 2 = 2$ ✓

Annahme: Die Formel $(*)$ sei richtig für ein $k \in \mathbb{N}$.

Ind.schritt: z.z. $(*)$ gilt für $k+1$: $2 \cdot 2^0 + \ldots + 2 \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+3} - 2$

$$l.S. = \underbrace{2 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + 2 \cdot 2^k}_{= 2^{k+2} - 2} + 2 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2 + \underbrace{2 \cdot 2^{k+1}}_{= 2^{k+2}}$$

$$= 2 \cdot 2^{k+2} - 2$$

$$= 2^{k+3} - 2$$

Ind.schluss: Also gilt die Formel $(*)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5. $a_n = \frac{2n+1}{3n}$ $a_1 = \frac{3}{3} = 1$, $a_2 = \frac{5}{6}$, $a_3 = \frac{7}{9}$, $a_4 = \frac{9}{12}$; $a_5 = \frac{11}{15}$

a) Vermutung: streng monoton fallend

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)} - \frac{2n+1}{3n} = \frac{2n^2 + 3n - (2n+1)(n+1)}{3(n+1) \cdot n}$$

$$= \frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 3n - 1}{3(n+1) \cdot n} = \frac{-1}{3(n+1)n} < 0 \quad \square$$

b) obere Schranke: $S = 1$

$a_n = \frac{2n+1}{3n} < \frac{3n}{3n} = 1$

untere Schranke: $s = 0$

$a_n = \frac{2n+1}{3n} > \frac{1}{3n} > 0$ $\square$

c) zu zeigen: Zu jeden $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt: $|a_n - g| < \varepsilon$

$$\left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2n+1-2n}{3n} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \underbrace{\frac{1}{3n}}_{>0} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{3n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{3\varepsilon} < n$$

Also gilt:

$$n_0 \geq \frac{1}{3\varepsilon}$$

$\square$

d) für $n \to \infty$: $\quad a_n = \frac{2n+1}{3n} = \frac{2 + \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{3} \longrightarrow \frac{2}{3}$ $\square$