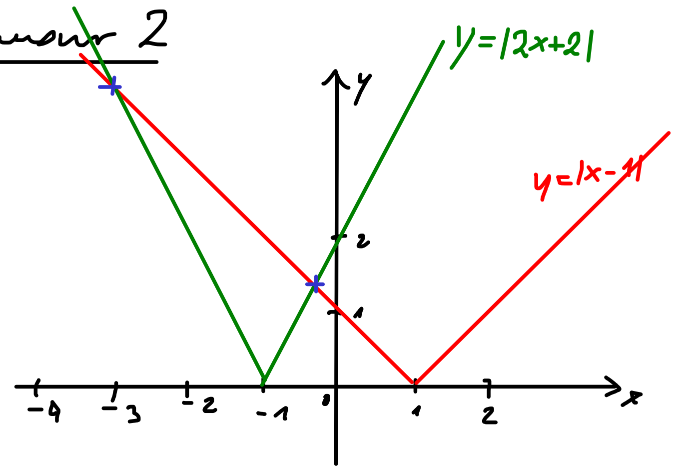
# Vertiefungskurs KS 1 - Klausur 2

1. $|2x+2| \leq |x-1|$




zeichnerisch: $L = [-3; -0{,}3]$

rechnerisch:

1. Fall: $x < -1$

$$-(2x+2) \leq -(x-1)$$

$$-2x-2 \leq -x+1 \qquad |+x+2$$

$$-x \leq 3 \qquad |\cdot(-1)$$

$$x \geq -3$$

$$L_1 = [-3; -1)$$

2. Fall: $-1 \leq x \leq 1$

$$2x+2 \leq -x+1 \qquad |+x-2$$

$$3x \leq -1 \qquad |:3$$

$$x \leq -\frac{1}{3}$$

$$L_2 = [-1; -\frac{1}{3}]$$

3. Fall: $x > 1$

$$2x+2 \leq x-1 \qquad |-x-2$$

$$x \leq -3 \quad ⚡$$

Gesamte Lösung:

$$L = [-3; -\frac{1}{3}]$$

2. $x-1 \geq \frac{4x-7}{x-1} \qquad |\cdot(x-1) \qquad x \neq 1$

1. Fall: $x > 1$

$$(x-1)^2 \geq 4x-7$$

$$x^2-2x+1 \geq 4x-7 \qquad |-4x+7$$

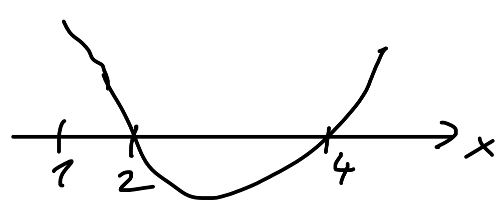
$$x^2-6x+8 \geq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 2$$

$$L_1 = (1; 2] \cup [4; \infty)$$

Skizze:



2. Fall: $x < 1$

$$(x-1)^2 \leq 4x-7$$
$$\vdots$$
$$x^2 - 6x + 8 \leq 0 \quad ↯$$

$\underline{\underline{L = L_1}}$

3. $f(x) = x \cdot e^{-x}$

z.z.: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (x-n) e^{-x}$

IA: $n=1$ : $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-1) e^{-x}$
$$= e^{-x} \cdot (1-x)$$
$$= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (x-1) = (-1)^1 \cdot (x-1) \cdot e^{-x} \quad \checkmark$$

Annahme: Die Formel $f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot (x-k) \cdot e^{-x}$ sei richtig für ein $k \in \mathbb{N}$.

IS: z.z.: Dann gilt: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot (x-(k+1)) \cdot e^{-x}$

Beweis durch Ableiten von $f^{(k)}(x)$:

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot [1 \cdot e^{-x} + (x-k) \cdot (-1) \cdot e^{-x}]$$
$$= (-1)^k \cdot e^{-x} \cdot [1 - x + k]$$
$$= (-1)^k \cdot e^{-x} \cdot (-1) \cdot (-1 + x - k)$$
$$= (-1)^{k+1} e^{-x} \cdot (x - (k+1)) \quad \square$$

Also gilt die Formel $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n) e^{-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. $(a_n)$ mit $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} \cdot (1 - \frac{1}{n})$

a) $a_1 = 1$; $a_2 = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$
$$a_4 = \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4};$$
$$a_5 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{5}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

b) $a_n = \frac{1}{n}$

c) IA: $a_1 = \frac{1}{1} = 1$ ✓

Annahme: Der Term $a_k = \frac{1}{k}$ sei richtig für ein $k \in \mathbb{N}$.

IS: z.z. $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$

$$a_{k+1} = a_k \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k+1-1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

Also ist dieser Term gültig für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5. $a_n = \frac{n^2}{2n^2+4}$

a) Die Folge $(a_n)$ hat den Grenzwert $g$, falls man für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ angeben kann, so dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

b)

$$\left| \frac{n^2}{2n^2+4} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n^2 - (n^2+2)}{2(n^2+2)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} \overbrace{-2}^{<0}}{\underbrace{2(n^2+2)}_{>0}} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{+\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}(n^2+2)} < \varepsilon \quad \Big| : \varepsilon \cdot \underbrace{(n^2+2)}_{>0}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^2+2 \quad |-2 \quad |\sqrt{\dots}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 2} < n$$

Gilt für alle $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 2}$ die Ungleichung $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, also strebt $(a_n)$ gegen $\frac{1}{2}$.