Klausur 18-20,2

Donnerstag, 23. Mai 2019 20:56

Punkte

1. $x-1 \geq \dfrac{4x-7}{x-1} \quad | \cdot (x-1) \qquad x \neq 1$

Fallunterscheidung: –

1. Fall: $x > 1$

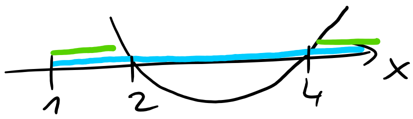
$(x-1)^2 \geq 4x-7$ –

$x^2-2x+1 \geq 4x-7 \quad | -4x+7$

$x^2-6x+8 \geq 0$ –

bei Gleichheit: $x_{1/2} = \dfrac{+6 \pm \sqrt{36-32}}{2}$

$x_1 = 4;\ x_2 = 2$ –



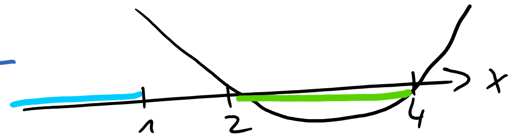
$L_1 = (1;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$ –

2. Fall: $x < 1$

$x^2-2x+1 \leq 4x-7 \quad | -4x+7$

$x^2-6x+8 \leq 0$ –

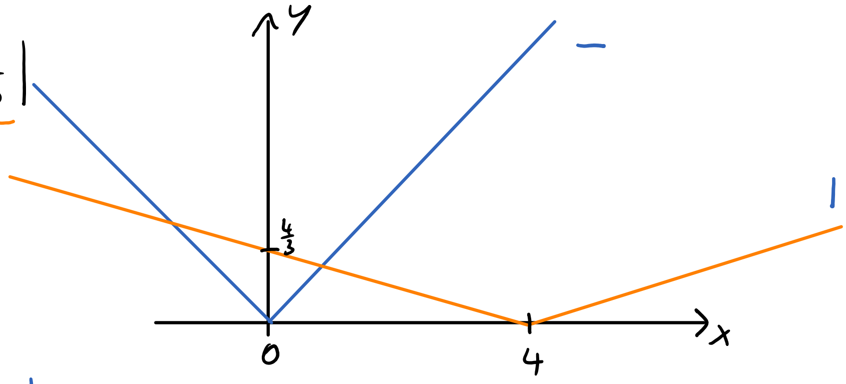
keine Lösung –



$L = (1;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$

3,5

2a) $|x| = \left|-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right|$ –



aus der Zeichnung:

$x_1 \approx -2$

$x_2 \approx +1$ –

1

rechnerisch: Fälle: 1

1. Fall: $x < 0$

$-x = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad | +\frac{1}{3}x$

$-\frac{2}{3}x = \frac{4}{3} \quad | \cdot \frac{3}{2}$

$-x = 2 \quad | \cdot (-1)$

$x_1 = -2$

1

2. Fall: $0 \leq x \leq 4$

$x = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad | +\frac{1}{3}x$

$\frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \quad | \cdot \frac{3}{4}$

$x_2 = 1$

1

3. Fall: $x > 4$

$x = +\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \quad | -\frac{1}{3}x$

$\frac{2}{3}x = -\frac{4}{3} \quad | \cdot \frac{3}{2}$

$x = -2 \notin D_{3.\text{Fall}}$

1

b) $|x| \leq \left|-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right|$

1. Fall: $x < 0$

$\vdots$

$-x \leq 2$

$x \geq -2$

$L_1 = [-2; 0)$

2. Fall: $0 \leq x \leq 4$

$\vdots$

$x \leq 1$

$L_2 = [0; 1]$

3. Fall: $x > 4$

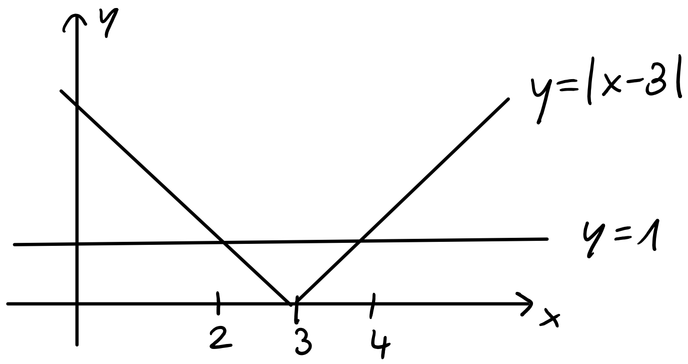
$\vdots$

$x \leq -2$ ↯

$L_3 = \{\}$

$$L = [-2; 1]$$

c) $|x-3| \leq 1$



1– /10

3) $\underbrace{\sqrt{4x-12}}_{\geq 0} \geq \underbrace{1+\sqrt{2x-5}}_{\geq 1}$ $\quad |(\ldots)^2$ ist Äquiv.umf. $\quad D = [3; +\infty)$

$4x - 12 \geq 1 + 2\sqrt{2x-5} + 2x - 5 \quad |-2x+4$

$2x - 8 \geq 2\sqrt{2x-5} \quad |:2$

$\underbrace{x-4}_{\geq 0 \text{ für } x \geq 4} \geq \underbrace{\sqrt{2x-5}}_{\geq 0} \quad |(\ldots)^2$ ist Äquiv.umf. für $x \geq 4$

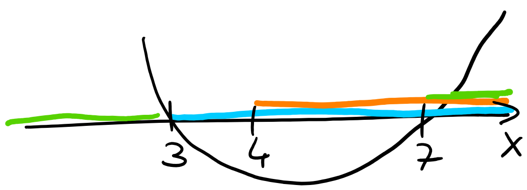
1. Fall: $x \geq 4$

$x^2 - 8x + 16 \geq 2x - 5 \quad |-2x+5$

$x^2 - 10x + 21 \geq 0$

bei Gleichheit: $x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 21}}{2}$

$x_1 = 7 \quad ; \quad x_2 = 3$



$L_1 = [7; +\infty)$

2. Fall: $x < 4$

$\underbrace{x-4}_{<0} \geq \underbrace{\sqrt{2x-5}}_{>0}$ $\lightning$ keine weiteren Lösungen 1

5,5

$\mathbb{L} = [7; +\infty)$

4. a) $a_1 = 1$; $a_n = (2a_{n-1} + 1) \cdot \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{3}{2}$; $a_3 = 2$; $a_4 = \frac{5}{2}$ 1

b) $a_1 = -\frac{1}{3}$; $a_2 = +\frac{2}{5}$; $a_3 = -\frac{3}{7}$; $a_4 = +\frac{4}{9}$; ...

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$ 1–

c) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{i+1}{i+2} = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n+2}$ 1–

4

5. zu zeigen: $a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ für $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$

Ind.anf.: $n = 0$: $a^0 = 1$

$\frac{1-a^{0+1}}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} = 1$ ✓ 1

Annahme: Es gelte $a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ –

Ind.schritt: zu zeigen: Dann gilt auch

$a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$ 1

$$\text{l.S.} \overset{\text{(Ann.)}}{=} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1}$$ 1

$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + \frac{a^{n+1} \cdot (1-a)}{1-a}$$ –

$$= \frac{1-a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1-a}$$ –

$$= \frac{1-a^{n+2}}{1-a} = \text{r.S.}$$ –

Ind. schluss: Somit gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$ /5