VK Mathematik Klausur Nr. 2 23.05.17 (AP)

4 A1 1) Induktionsanfang: $n=1$ $\quad 0^2 = \frac{1}{6}\cdot\underbrace{(1-1)}_{0}\cdot 1\cdot(2\cdot 1-1)$

$0^2 = 0$ ✓

2) Induktionsschritt:

Für ein $k\in\mathbb{N}$ gilt $1^2+2^2+\dots+(k-1)^2 = \frac{1}{6}(k-1)\cdot k\cdot(2k-1)$ $(*)$

z.z. $1^2+2^2+\dots+(k+1-1)^2 = \frac{1}{6}(k+1-1)\cdot(k+1)\cdot(2(k+1)-1)$

$1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{1}{6}\cdot k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)$

$\underbrace{1^2+2^2+\dots+(k-1)^2}_{\frac{1}{6}(k-1)\cdot k\cdot(2k-1)} + k^2 \overset{(*)}{=} \frac{1}{6}(k-1)\cdot k\cdot(2k-1)+k^2$

$= \frac{1}{6}k\cdot\left((k-1)\cdot(2k-1)+6k\right) = \frac{1}{6}k\cdot(2k^2-3k+1+6k)$

$= \frac{1}{6}k\cdot(2k^2+3k+1) = \frac{1}{6}k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)$ ✓

3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

4 A2 1) Induktionsanfang: $n=6$ $\quad 3^6 > 2\cdot 6^3$

$729 > 432$ ✓

2) Induktions~~schluss~~schritt:

Für ein $k\in\mathbb{N}$ mit $k\geqq 6$ gilt $3^k > 2\cdot k^3$ $(*)$

z.z. $3^{k+1} > 2\cdot(k+1)^3 = 2(k^3+3k^2+3k+1)$

$3^{k+1} = 3\cdot 3^k \underset{(*)}{>} 3\cdot 2\cdot k^3 = 6k^3 = 2\cdot 3k^3$

$= 2\cdot(k^3+k^3+k^3) = 2\cdot(k^3+\underbrace{k\cdot k^2}_{\geqq 6k^2}+\underbrace{k^2\cdot k}_{\geqq 36k})$

$\geqq 2\cdot(k^3+\underbrace{6k^2}_{>3k^2}+\underbrace{36k}_{>3k+1}) > 2(k^3+3k^2+3k+1)$ ✓

3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

8 VP

6 A3 3 a) $x^5 - 8x^3 - 9x = 0$

$x \cdot (x^4 - 8x^2 - 9) = 0 \qquad x_1 = 0$

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Subst.: $x^2 = u$

$u^2 - 8u - 9 = 0$

$(u-9)\cdot(u+1) = 0 \qquad u_1 = 9 \quad u_2 = -1$

Resub.: $x^2 = 9 \Rightarrow x_2 = -3 \quad x_3 = 3$

$x^2 = -1$ ↯ keine weiteren Lösungen

$L = \{-3; 0; 3\}$

3 b) $(2x^3 - 8x^2 + 2x + 12) : (x-2) = 2x^2 - 4x - 6$

$-\ \underline{2x^3 - 4x^2}$

$-4x^2 + 2x$

$-\ \underline{-4x^2 + 8x}$

$-6x + 12$

$-\ \underline{-6x + 12}$

0

$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad |:2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)\cdot(x+1) = 0$

$x_2 = 3 \quad x_3 = -1$

$L = \{-1; 2; 3\}$

4 A4 $2x^3 - tx^2 + 8x = x \cdot (2x^2 - tx + 8) = 0$

$x_1 = 0$ für alle $t \in R$

$2x^2 - tx + 8 = 0 \qquad D = (-t)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8$

$D = t^2 - 64$

$D < 0$ keine weiteren Lösungen $t^2 - 64 < 0 \Rightarrow -8 < t < 8$

$D = 0$ eine weitere Lösung und zwar: $\frac{t \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{t}{4} \neq 0$

$t_1 = -8 \ ; \ t_2 = 8$

d.h. eine echte neue Lösung.

$D > 0$ zwei weitere Lösungen für $t > 8$ oder $t < -8$

$x_{2;3} = \frac{-t \pm \sqrt{D}}{4} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2-64}}{4} \neq 0$ da $\sqrt{t^2-64} < t$

Für $-8 < t < 8$ gibt es genau eine Lösung.

Für $t = -8$ und $t = 8$ gibt es zwei Lösungen

Für $t > 8$ oder $t < -8$ gibt es drei Lösungen

10VP

13 AS $_{3,5}$ a) $D = [-\frac{4}{3}; +\infty)$

$$3x + \sqrt{4+3x} = x + 19$$
$$\sqrt{4+3x} = 19 - 2x \quad |(\ )^2$$
$$4 + 3x = 361 - 76x + 4x^2$$
$$0 = 4x^2 - 79x + 357$$

$$D = 79^2 - 4 \cdot 4 \cdot 357 = 6241 - 5712 = 529$$

$$x_{1;2} = \frac{79 \pm \sqrt{529}}{8} = \frac{79 \pm 23}{8} \qquad x_1 = \frac{102}{8} = \frac{51}{4} = 12{,}75$$
$$x_2 = \frac{56}{8} = 7$$

Probe: $3 \cdot \frac{51}{4} + \sqrt{4 + \frac{153}{4}} = \frac{51}{4} + 19$

$$\frac{153}{4} + \underbrace{\sqrt{4 + \frac{153}{4}}}_{>0} = \frac{127}{4} \quad \text{f} \qquad \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$$

muss aber nicht berechnet werden.

$$3 \cdot 7 + \sqrt{4 + 3 \cdot 7} = 7 + 19$$
$$21 + \sqrt{25} = 26$$
$$21 + 5 = 26 \ ✓ \qquad L = \{7\}$$

2,5 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{2x-1}{x+1} - x = \frac{x}{5} - 1 \quad | +x$$
$$\frac{2x-1}{x+1} = \frac{6x}{5} - 1 \quad | \cdot 5 \cdot (x+1)$$
$$10x - 5 = 6x \cdot (x+1) - 5(x+1)$$
$$10x - 5 = 6x^2 + 6x - 5x - 5$$
$$0 = 6x^2 - 9x \qquad L = \{0; 1{,}5\}$$
$$0 = 3x \cdot (2x - 3) \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 1{,}5$$

4 c) $\cancel{\sqrt{3-}}$ $D = [-2; 3]$

$$\sqrt{3-x} - 1 = \sqrt{x+2} \quad | +1$$
$$\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1 \quad |(\ )^2$$
$$3 - x = x + 2 + 2\sqrt{x+2} + 1$$
$$-2x = 2\sqrt{x+2} \quad | : 2$$
$$-x = \sqrt{x+2} \quad |(\ )^2$$

13VP

5c) $x^2 = x+2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)\cdot(x+1) = 0 \qquad x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

Probe: $\sqrt{3-2} - 1 = \sqrt{2+2}$

$1 - 1 = 2$ ↯

$\sqrt{3-(-1)} - 1 = \sqrt{-1+2}$

$\sqrt{4} - 1 = \sqrt{1}$

$2 - 1 = 1$ ✓ $\qquad L = \{-1\}$

3d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 2\}$

$$\frac{3-x}{(2x+1)\cdot(x-2)} = 1 - \frac{2x-2}{2x+1} \quad \Big| \cdot (2x+1)\cdot(x-2)$$

$3 - x = (2x+1)\cdot(x-2) - (2x-2)\cdot(x-2)$

$3 - x = (x-2)\cdot(2x+1-(2x-2))$

$3 - x = (x-2)\cdot 3$

$3 - x = 3x - 6$

$9 = 4x \qquad x_1 = \frac{9}{4} \qquad L = \{\frac{9}{4}\}$

5 A6$_2$a) $3^{x-1} = 3^{x+1} - 72$

$3^{x-1} = 9\cdot 3^{x-1} - 72 \quad | +72 - 3^{x-1}$

$72 = 8\cdot 3^{x-1} \quad | : 8$

$9 = 3^{x-1}$

$3^2 = 3^{x-1} \Rightarrow x-1 = 2 \qquad x_1 = 3$

3b) $4^x = 3\cdot 2^x + 4$

$(2^x)^2 - 3\cdot 2^x - 4 = 0$

Subst. $2^x = u$

$u^2 - 3u - 4 = 0$

$(u-4)\cdot(u+1) = 0$

$u_1 = 4 \quad u_2 = -1$

Resub: $2^x = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

$2^x = -1$ ↯

SVP

8 A7 3a) $\left| \frac{4x-6}{3} \right| = \frac{1}{3}x + 7$

<u>Fall 1:</u> $4x-6 \geqq 0$ also $x \geqq 1{,}5$

$$\frac{4x-6}{3} = \frac{1}{3}x + 7 \quad |\cdot 3$$
$$4x-6 = x + 21$$
$$3x = 27 \qquad x_1 = 9 \checkmark$$

<u>Fall 2:</u> $x < 1{,}5$

$$-\frac{4x-6}{3} = \frac{1}{3}x + 7 \quad |\cdot 3$$
$$-(4x-6) = x + 21$$
$$-4x + 6 = x + 21 \qquad L = \{-3; 9\}$$
$$-15 = 5x \qquad x_2 = -3 \checkmark$$

5 b) $\left| \frac{4x-6}{3} \right| = \frac{1}{3}x + a$

<u>Fall 1:</u> $x \geqq 1{,}5$ (s. o.)

$$\frac{4x-6}{3} = \frac{1}{3}x + a \quad |\cdot 3$$
$$4x-6 = x + 3a$$
$$3x = 3a + 6$$
$$x_1 = a + 2 \qquad a \geqq -0{,}5 \checkmark$$
$$a < -0{,}5 \; ↯$$

<u>Fall 2:</u> $x < 1{,}5$

$$-\frac{4x-6}{3} = \frac{1}{3}x + a \quad |\cdot 3$$
$$-(4x-6) = x + 3a$$
$$-4x + 6 = x + 3a$$
$$6 - 3a = 5x$$
$$\frac{6-3a}{5} = x_2 \qquad 6 - 3a < 7{,}5$$
$$-1{,}5 < 3a$$
$$-0{,}5 < a \checkmark$$
$$a < -0{,}5 \; ↯$$

8VP

Für $a < -0{,}5$ $L_a = \{\ \}$

Für $-0{,}5 \leq a$ $L_a = \{a+2; \frac{6-3a}{5}\}$

Für $a = -0{,}5$ $L_{-0{,}5} = \{1{,}5\}$

Σ 44VP