

# Gedämpfte und erzwungene Schwingung (LF)

Konzeptionsgruppe Physik 2023

C.-J. Pardall [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

# Überblick

- Gedämpfte Schwingung
  - Grundlagen
  - Umsetzung im Unterricht
- Erzwungene Schwingung
  - Grundlagen
  - Umsetzung im Unterricht
- Überblick über die Materialien

# Gedämpfte Schwingung

# Gedämpfte Schwingung: Bildungsplan usw.

- BW BP 2016.V2  
„3.6.3 (3) die zeitlich abnehmende *Amplitude* einer *gedämpften Schwingung* mathematisch beschreiben (geschwindigkeitsproportionale Reibung)“
- Jahresplanung: Gedämpfte Schwingungen 3 h
- KMK/IQB: Inhaltliche Vereinbarungen zur Gestaltung der Aufgaben  
„nicht vorausgesetzt: Kenntnisse zum Kriechfall, zum aperiodischen Grenzfall und zur dämpfungsabhängigen Frequenz“
- **Abituraufgaben zur mathematischen Beschreibung sind möglich!**  
IQB-Beispielaufgabe: Dämpfung von Schwingungen bei Wolkenkratzern

# Gedämpfte Schwingung: Fachlicher Hintergrund

- ungedämpfte harmonische Schwingung (1-dim.):  
Lineare Rückstellkraft  $F(t) = -D \cdot s(t)$   
(Voraussetzung für eine einfache analytische Lösung der Dgl.)
- gedämpfte harmonische Schwingung:  
 $F(t) = -D \cdot s(t) + F_R$   
 $F_R$ : Reibungskraft, immer entgegen der Bewegungsrichtung
- geschwindigkeitsproportionale Reibung:  $F_R = -k \cdot v(t) = -k \cdot \dot{s}(t)$ 
  - automatisch immer entgegen der Bewegungsrichtung
  - bei konstanter Reibungskraft oder Luftwiderstand ( $F_R \sim v^2$ ):  
abschnittsweise Definition je nach Vorzeichen von  $v$  notwendig!

# Gedämpfte Schwingung: Fachlicher Hintergrund

- Differentialgleichung bei geschwindigkeitsproportionaler Reibung:

$$\ddot{s}(t) + \frac{k}{m} \cdot \dot{s}(t) + \frac{D}{m} \cdot s(t) = 0$$

- allg. Lösungsfunktion:  $s(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (s_1 \cdot e^{i\omega t} + s_2 \cdot e^{-i\omega t})$

- $s_1$  und  $s_2$  entspr. der Anfangsbedingungen;  $\delta = \frac{k}{2m}$

- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  mit  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

- $\omega_0^2 > \delta^2$ : schwache Dämpfung; harmonische (!) Schwingung

- $s(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (s_1 \cdot e^{i\omega t} + s_2 \cdot e^{-i\omega t}) \Rightarrow s(t) = \hat{s}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

- $\omega < \omega_0$ , d.h. durch die Dämpfung wird  $T$  größer!

aber: für kleine  $\delta = \frac{k}{2m}$  ist  $\omega \approx \omega_0$  („schwache“ schwache Dämpfung)

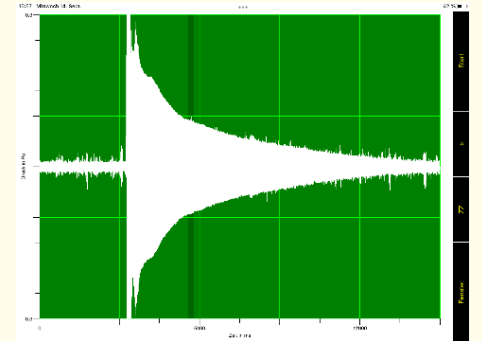
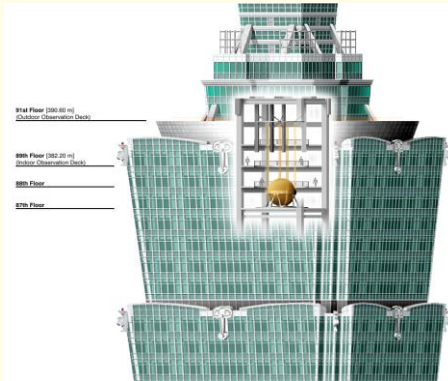
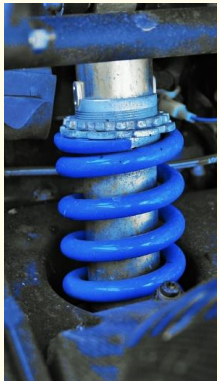
# Gedämpfte Schwingung: Fachlicher Hintergrund

Beispiele für  $F_R = -k \cdot v(t)$

- häufig als Modell, auch wenn  $F_R \neq -k \cdot v$
- Bremsen mit Wirbelströmen: Modell  $F_R = \frac{(Bd)^2}{R} \cdot v$
- Stokes-Reibung für sphärische Körper in Fluiden:  $F_R = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$ 
  - Voraussetzung: Reynolds-Zahl  $Re = \frac{\rho v r}{\eta} \lesssim 1$
  - Tritt selten auf! (z.B. in Luft und Wasser meist Newton-Reibung ( $F_R \sim v^2$ ))
- laminare Rohrströmungen ( $Re = \frac{\rho v d}{\eta} \lesssim 2300$ )  
z.B. Flüssigkeitssäule im U-Rohr

# Gedämpfte Schwingung: Kontexte

- Alltagsbeispiele, z.B. als Einstieg:  
Schaukel, Klavier, Stimmgabel
- technische Anwendungen: Stoßdämpfer, Schwingungstilger  
Schwierigkeit: aperiodischer Grenzfall gewünscht!

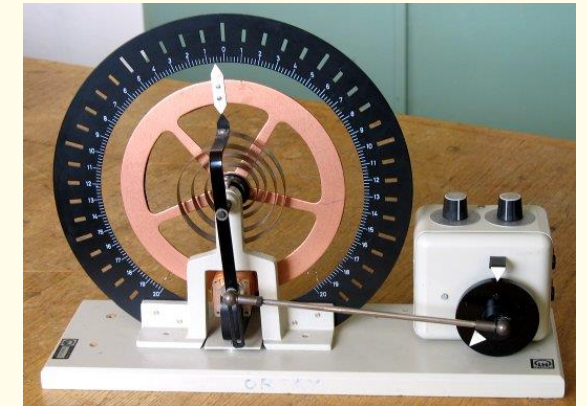
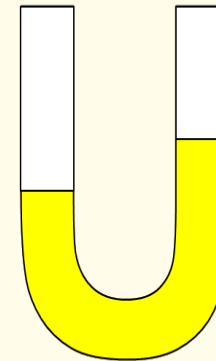
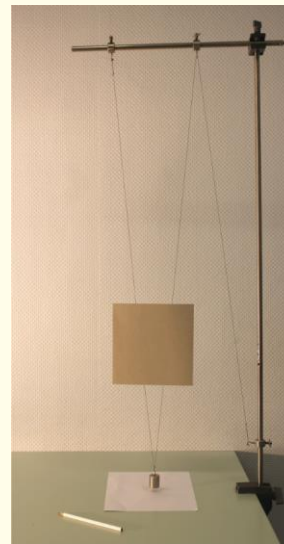
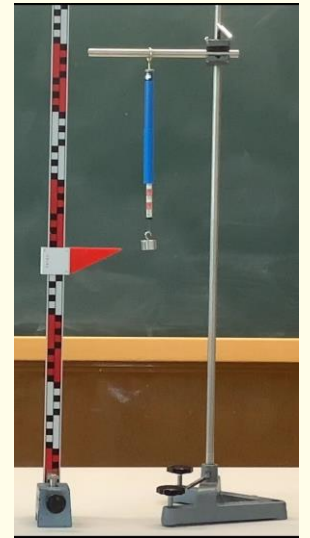
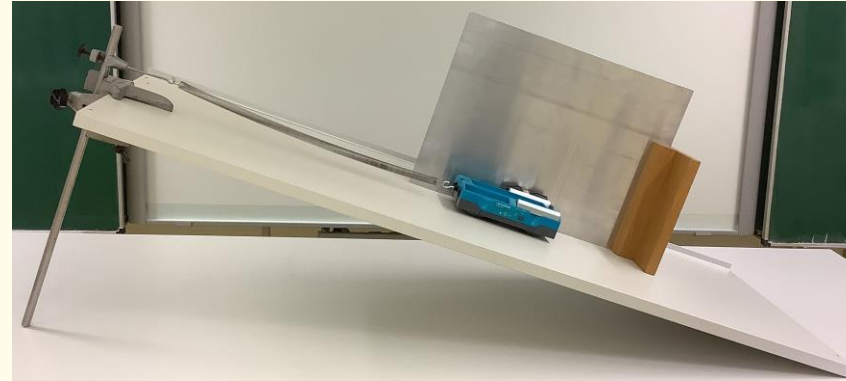


Bildquellen: Schaukel: Bild von [Frederik Hake](#) auf [Pixabay](#) (27.12.22); Klaviersaiten: von [Vlad Vasnetsov](#) auf [Pixabay](#) (27.12.22); Screenshot Schallanalysator (<https://spaichinger-schallpegelmesser.de/schallanalysator.html>): C.-J. Pardall; Stoßdämpfer: Bild von [Barbara Bonanno](#) auf [Pixabay](#); (27.12.22); Aufbau Taipei 101: von Someformofhuman - Eigenes Werk, [CC BY-SA 4.0](#), <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3799263> (27.12.22)



# Gedämpfte Schwingung: Experimente

- Federpendel mit Festkörperreibung, Wirbelstrom, Luft, Wasser, Glycerin
  - analog
  - digital: Videoanalyse, Ortsmessung mit Sensor-Rädern, Ultraschall- oder Laserbewegungssensor, Kraftsensor, Beschleunigungssensor
- Einsatz der App MechanikZ:  
[https://spaichinger-schallpegelmesser.de/Experimente\\_MechanikZ.pdf](https://spaichinger-schallpegelmesser.de/Experimente_MechanikZ.pdf)  
Folien 56-109
- bifilares Fadenpendel mit „Segel“
- Wassersäule im U-Rohr
- Drehpendel nach Pohl



Bildquellen:

Pendel auf schiefer Ebene, Kraftmesser-Pendel, U-Rohr: C.-J. Pardall [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/); Fadenpendel: IQB [CC BY 3.0 DE](https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/de/) (27.12.22); Drehpendel nach Pohl: Original uploader was Dbfls at fr.wikipedia ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pendule\\_Pohl\\_photo.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pendule_Pohl_photo.jpg)), „Pendule Pohl photo“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (27.12.22)

# Gedämpfte Schwingung: Mathematisierung

- Kräftebetrachtung bei konstanter Reibungskraft:  $F(t) = -D \cdot s(t) + F_R$ 
  - Anknüpfen: Reibung (Kl. 10), ungedämpfte Schwingung
  - Diskussion der Richtung von  $F_R$ : Amplitudenabnahme, Vorzeichenwechsel
- Kräftebetrachtung bei geschwindigkeitsproportionale Reibung:  
 $F(t) = -D \cdot s(t) - k \cdot v(t)$ 
  - Unterschiede zur konstanten  $F_R$ : „automatisch“ korrekte Richtung, evtl. Stetigkeit in den Umkehrpunkten
- Man kann die abnehmende Amplitude dann folgendermaßen beschreiben:  
 $s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow s(t) = \hat{s}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ 
  - Diskussion der Anfangsbedingungen und  $\delta \sim k$  (qualitativ)
  - keine Diskussion der Frequenzänderung
  - qualitativ: starke Dämpfung ohne periodische Bewegung

# Gedämpfte Schwingung: Geogebra-Anwendungen

- Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibungskraft
  - Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibungskraft:  $s$ - $t$ -Schaubild  
<https://www.geogebra.org/m/p2g8ffet>
  - Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibungskraft:  $E$ - $s$ -Schaubild  
<https://www.geogebra.org/m/f5zqgtrd>
  - Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibungskraft:  $E$ - $t$ -Schaubild  
<https://www.geogebra.org/m/hymv4hfu>
- Gedämpfte Schwingung mit Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit
  - Gedämpfte Schwingung mit Reibungskraft proportional zu  $v$ :  $s$ - $t$ -Schaubild  
<https://www.geogebra.org/m/ekmsjvwp>
  - Gedämpfte Schwingung mit Reibungskraft proportional zu  $v$ :  $E$ - $t$ -Schaubild:  
<https://www.geogebra.org/m/jg88nkwt>

# Gedämpfte Schwingung: Mathematisierung

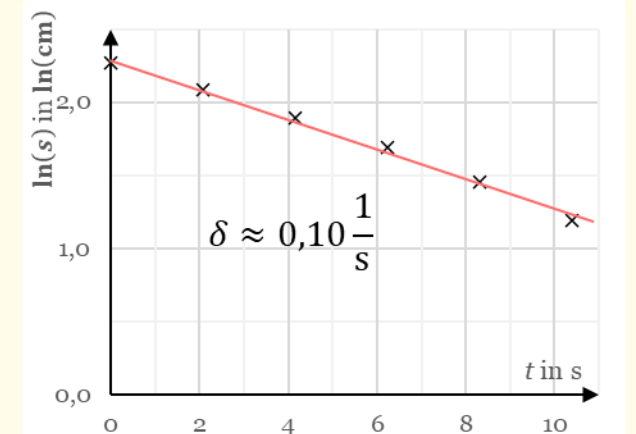
- Nachweis des exponentiellen Zusammenhangs bei einer Messung mit dem WTR

**möglicher Abiturinhalt!**

- 1. Möglichkeit: Halblogarithmische Darstellung
  - Linearisieren:  $\hat{s}(t) = \hat{s}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \Rightarrow \ln(\hat{s}(t)) = -\delta \cdot t + \ln(\hat{s}_0)$
  - Liste 1:  $n \cdot T$ ; Liste 2:  $\hat{s}(n \cdot T)$
  - Liste 3:  $\ln(\text{Liste 2})$
  - Darstellung in  $\ln(\hat{s}(n \cdot T))$ - $t$ -Diagramm:
    - näherungsweise linear  $\Rightarrow$  sinnvolle Modellierung
    - $-\delta \hat{=}$  Steigung im Diagramm
  - Alternativ: Lineare Regression „ $ax + b$ “



$t$ in s	$\hat{s}$ in cm	$\ln(\hat{s})$ in $\ln(\text{cm})$
0	9,7	2,27
2,08	8,1	2,09
4,16	6,6	1,89
6,24	5,4	1,69
8,32	4,3	1,46
10,40	3,3	1,19



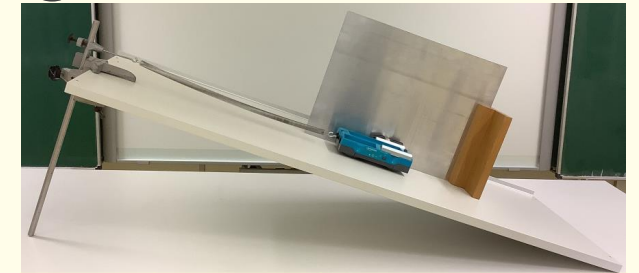
# Gedämpfte Schwingung: Mathematisierung

- Nachweis des exponentiellen Zusammenhangs bei einer Messung mit dem WTR

**möglicher Abiturinhalt!**

- 2. Möglichkeit: Regression mit Exponentialfunktion

- Liste 1:  $n \cdot T$ ; Liste 2:  $\hat{s}(n \cdot T)$
- Regression „ $ab^x$ “
- Vergleich von gemessenen und berechneten Werten: kleine Abweichungen  $\Rightarrow$  sinnvolle Modellierung
- Bestimmen der Dämpfungskonstante  $\delta$ :  
Vergleich WTR-Darstellung und math. Ansatz:  
 $a \cdot b^x = \hat{s}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \Rightarrow \delta = -\ln(b)$



$t$ in s	$\hat{s}$ in cm	$\hat{s}_{\text{reg}}$ in cm
0	9,7	9,95
2,08	8,1	8,06
4,16	6,6	6,53
6,24	5,4	5,28
8,32	4,3	4,28
10,40	3,3	3,46

WTR

*Regression mit  $a \cdot b^x$  ergibt:*

*$a \approx 9,953$ ;  $b \approx 0,9035$*

*Messwerte und berechnete Werte stimmen gut überein.*

*$\delta = -\ln(b) \approx 0,10 \frac{1}{\text{s}}$*

# Gedämpfte Schwingung: Mathematisierung

- Nachweis des exponentiellen Zusammenhangs bei einer Messung mit dem WTR  
**möglicher Abiturinhalt!**

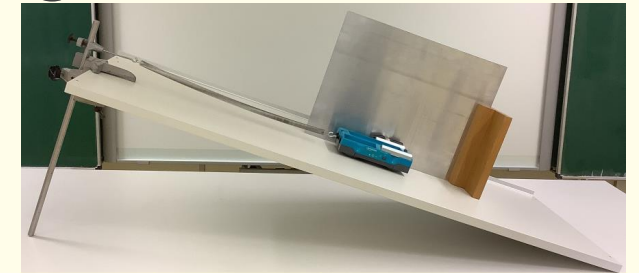
- 3. Möglichkeit: Quotientenbildung  $\frac{\hat{s}_n}{\hat{s}_{n+1}}$

- Theorie:  $\frac{\hat{s}_n}{\hat{s}_{n+1}} = \frac{\hat{s}_0 \cdot e^{-\delta \cdot n \cdot T}}{\hat{s}_0 \cdot e^{-\delta \cdot (n+1) \cdot T}} = \frac{1}{e^{-\delta \cdot T}} = e^{\delta \cdot T}$  konstant!

- $\frac{\hat{s}_n}{\hat{s}_{n+1}}$  für alle  $n$  näherungsweise konstant  $\Rightarrow$  sinnvolle Modellierung

- Bestimmen der Dämpfungskonstante  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{\hat{s}_n}{\hat{s}_{n+1}}\right)}{T} \text{ mit } \overline{\frac{\hat{s}_n}{\hat{s}_{n+1}}}: \text{Mittelwert über alle Quotienten}$$



$t$ in s	$\hat{s}$ in cm	$\frac{\hat{s}_n}{\hat{s}_{n+1}}$
0	9,7	1,20
2,08	8,1	1,23
4,16	6,6	1,22
6,24	5,4	1,26
8,32	4,3	1,30
10,40	3,3	-

*Die Quotienten sind fast konstant.*

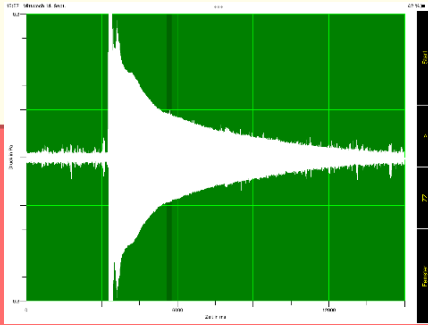
Mittelwert: 1,24

$$\delta = \frac{\ln(1,24)}{2,08 \text{ s}} \approx 0,10 \frac{1}{\text{s}}$$

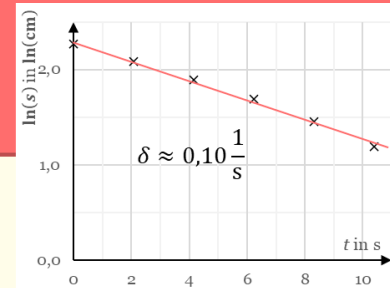
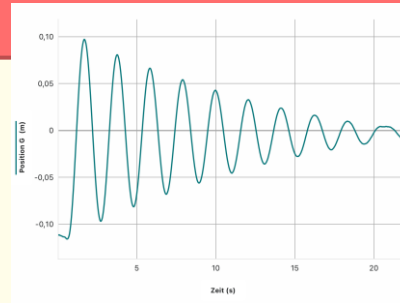
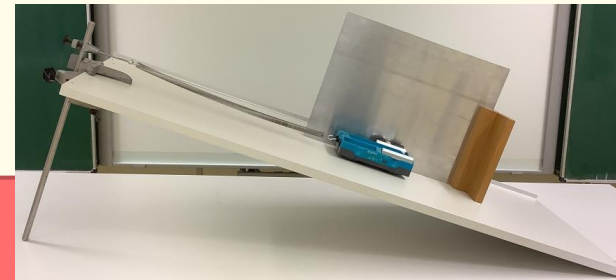
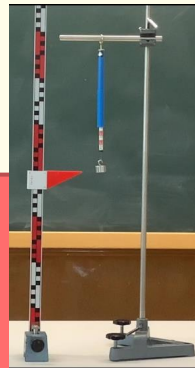


# Gedämpfte Schwingung: Struktur des Lernprozesses

Kontextbezug schaffen



Modellierung und Mathematisierung



Anschluss zur erzwungenen Schwingung



Bildquellen:  
Schaukel: Bild von [Frederik Hake](#) auf [Pixabay](#) (27.12.22); Klaviersaiten: von [Vlad Vasnetsov](#) auf [Pixabay](#) (27.12.22); Screenshots (<https://spaichinger-schallpegelmesser.de/schallanalysator.html>), Kraftmesser-Pendel, Pendel auf schiefer Ebene: C.-J. Pardall [CC BY 4.0](#)

# Erzwungene Schwingung



# Erzwungene Schwingung: Bildungsplan usw.

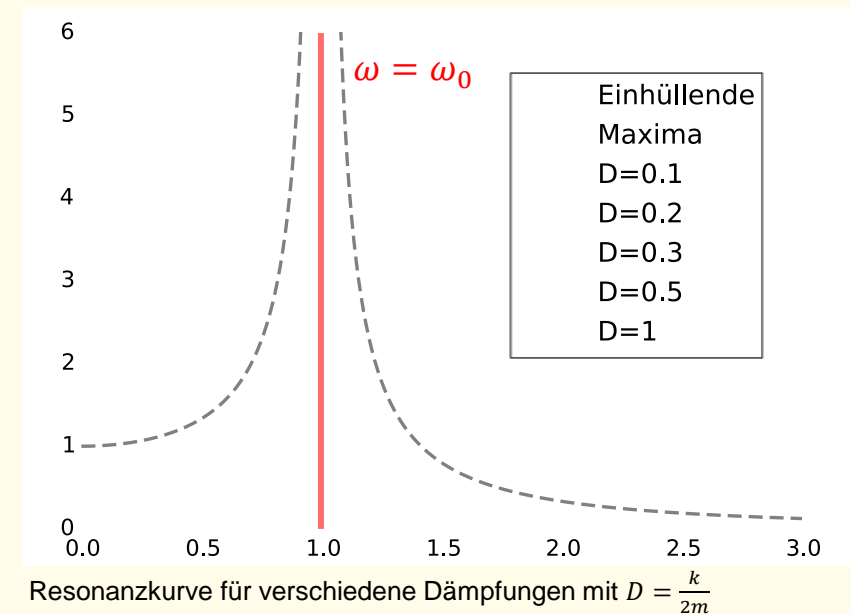
- BW BP 2016.V2  
„3.6.3 (10) Resonanz bei erzwungenen Schwingungen beschreiben (*Eigenfrequenz*, *Erregerfrequenz*)“
- Jahresplanung: Erzwungene Schwingungen 3 h
- KMK/IQB: Inhaltliche Vereinbarungen zur Gestaltung der Aufgaben  
„Zusätzliche Inhalte für das erhöhte Anforderungsniveau:  
Resonanz bei erzwungenen Schwingungen (nur phänomenologische Betrachtung)“

# Erzwungene Schwingung: Fachlicher Hintergrund

- sinusförmige Anregung einer gedämpften Schwingung
  - Kräftebetrachtung und Differentialgleichung:  

$$F(t) = -D \cdot s(t) - k \cdot \dot{s}(t) + \hat{F}_{\text{ext}} \cdot \cos(\omega t)$$
  - Beobachtung: Nach einer Einschwingphase schwingt das System phasenverschoben mit der Erregerfrequenz:  $s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
  - $\Rightarrow \hat{F}_{\text{ext}} \cdot \cos(\omega t) = (D - m\omega^2) \cdot \hat{s} \cos(\omega t + \varphi) - k\omega \cdot \hat{s} \sin(\omega t + \varphi)$
- Resonanz  $\Leftrightarrow$  Energieaufnahme maximal
  - $P = F_{\text{ext}} \cdot \dot{s}$  maximal  $\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$  und  $\omega^2 = \frac{D}{m} = \omega_0^2$
  - Alternativ: Resonanz  $\Leftrightarrow$  maximale Amplitude

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{k}{m} \right)^2}, \text{ d.h. } \omega_R < \omega_0$$



Bildquelle: Geek3 ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mplwp\\_resonance\\_D\\_envelope.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mplwp_resonance_D_envelope.svg)), „Mplwp resonance D envelope“, Ergänzung  $\omega = \omega_0$ : C.-J. Pardall, <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/legalcode> (27.12.22)

# Erzwungene Schwingung: Fachlicher Hintergrund

- Resonanzkatastrophe
  - ständig  $\Delta E_{\text{auf}} > \Delta E_{\text{ab}} \Rightarrow \hat{s}$  und  $E_{\text{ges}}$  nehmen immer weiter zu  $\Rightarrow$  Zerstörung des Systems
  - Ursache: Dämpfung zu klein, sodass es keinen Gleichgewichtszustand gibt
- häufig verursacht durch Rückkopplungseffekte
  - Bsp.: Millennium Bridge London  
Fußgänger synchronisieren ihre Schritte
  - Bsp.: Tacoma Bridge – komplex!  
Auslöser ist die Resonanz bei einer Luftströmung,  
nicht die Resonanz der Brücke selbst



Millenium Bridge London

Bildquelle: Jan Kameníček ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:London Millennium Bridge from Saint Paul's.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:London_Millennium_Bridge_from_Saint_Paul's.jpg)), „London Millennium Bridge from Saint Paul's“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (22.11.22)

# Erzwungene Schwingung: Kontexte

- Schaukeln
  - Kann man ein Glas „zersingen“?
  - Resonanzkatastrophen und Schwingungstilger
- 
- Prinzip der Magnetresonanztomographie
  - elektrodynamischer Lautsprecher
  - Analogie angeregter Schwingkreis: RFID, induktives Laden



Bildquellen:  
Schaukel: Bild von [Frederik Hake](https://pixabay.com/users/frederik-hake/) auf [Pixabay](https://pixabay.com/) (27.12.22);; Millenium Bridge London: Jan Kameníček ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:London Millennium Bridge from Saint Paul's.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:London_Millennium_Bridge_from_Saint_Paul's.jpg)), „London Millennium Bridge from Saint Paul's“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (22.11.22); Zerstörung eines Weinglases mit einem Lautsprecher: Acs272 ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Breaking glass with sound using resonance.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Breaking_glass_with_sound_using_resonance.png)), Ausschnitt von C.-J. Pardall, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode> (22.11.22)

# Erzwungene Schwingung: Experimente

- Heimexperiment: Resonanz beim Fadenpendel
- gedämpftes Federpendel mit Aufhängungskopplung
- Drehpendel nach Pohl
- Modellexperimente zur Magnetresonanztomografie
- Kennlinie eines Basslautsprechers
- Analogie elektromagnetische Schwingung: Siebkette mit veränderbarer Kapazität
- mögliche Vertiefung: gekoppelte Pendel

**Praktikum: Erzwungene Schwingung**

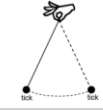
**Ziel**  
Sie beschäftigen sich mit der erzwungenen Schwingung eines Fadenpendels. Dabei untersuchen Sie, wie die Frequenz, die Amplitude und die Phasenlage des Pendels von der Frequenz der erregenden Schwingung abhängen.

**Material:** Faden (ca. 1,2 m), Pendelkörper, Metronom oder Metronom-App, Lineal

**Hinweis:** Das Metronom bzw. die App gibt in der Musik das Tempo vor. Die Zahlenangaben beziehen sich immer auf „bpm“ (beats per minute / Schläge pro Minute).


**Arbeitsauftrag:**

- 1. Freie Schwingung: „Eigenfrequenz“**  
Stellen Sie das Metronom auf 60 bpm.  
Bestimmen Sie die Pendellänge so, dass das Metronom in jedem Umkehrpunkt tickt (s. Abb.).



**WICHTIG:** Die folgenden Versuche müssen mit dieser Pendellänge durchgeführt werden!

- 2. Langsame Schwingung**  
Stellen Sie das Metronom auf ca. 40 bpm.  
Bewegen Sie die Hand im Takt einige Zentimeter hin und her (s. Abb.). Beobachten Sie Frequenz, Amplitude und Phasenlage des Pendels im Vergleich zur Bewegung der Hand.



- 3. Schnellere Schwingung**  
Stellen Sie das Metronom auf ca. 80 bpm.  
Wiederholen Sie 2., entsprechend.

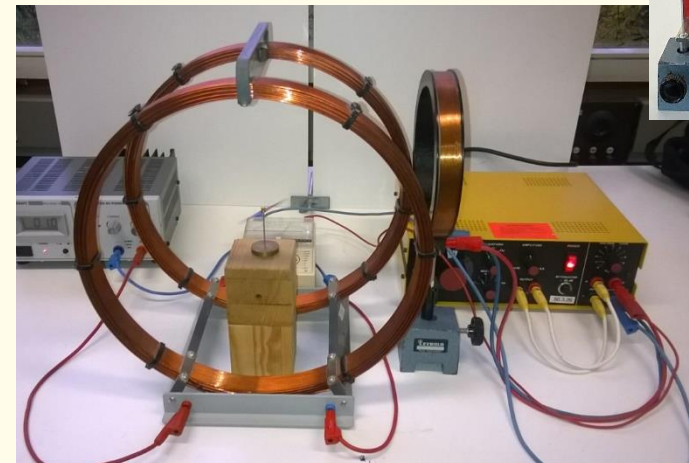
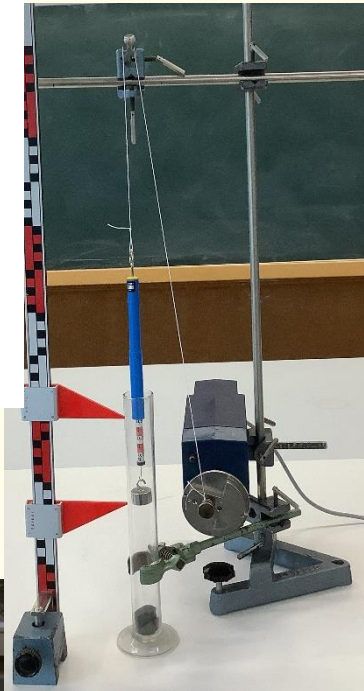
- 4. Erregerfrequenz = Eigenfrequenz**  
Stellen Sie das Metronom auf ca. 60 bpm.  
Wiederholen Sie 2., entsprechend.

- 5. Weitere Möglichkeiten (freiwillig)**
  - Untersuchen Sie das Verhalten des Pendels bei anderen Frequenzen.
  - Eigene Ideen?

**Auswertung**

- Geben Sie den Zusammenhang zwischen Periodendauer und Pendellänge beim Fadenpendel an. Überprüfen Sie damit den Messwert bei 1. Messgenauigkeit?
- Skizzieren Sie ein Amplitude-Frequenz-Diagramm der erzwungenen Schwingung. Markieren Sie darin die Eigenfrequenz des Pendels. Stellen Sie den Zusammenhang zu Ihren Messungen her.
- Informieren Sie sich über die Begriffe „erzwungene Schwingung“, „Resonanzkurve“, „Phasenlage bei erzwungenen Schwingungen“ und „Resonanzkatastrophe“. Ordnen Sie Ihre Versuchsergebnisse anhand dieser Begriffe ein.

C.-J. Pardall CC BY 4.0



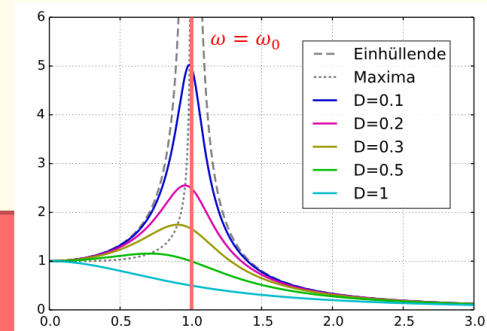
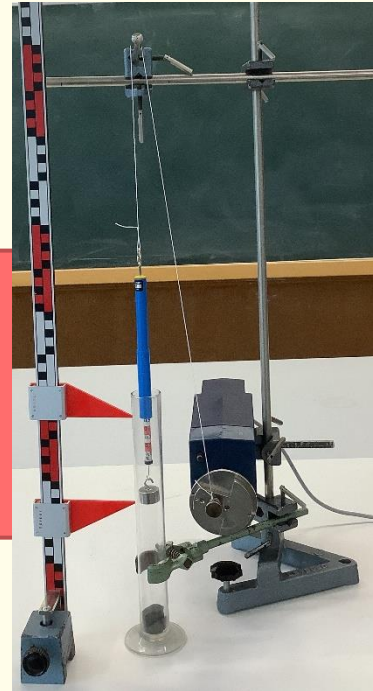


# Erzwungene Schwingung: Geogebra-Anwendungen

- Erzwungene mechanische Schwingungen mit Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit
  - Erzwungene Schwingung:  $s$ - $t$ -Schaubild  
<https://www.geogebra.org/m/x4uavxdw>
  - Erzwungene Schwingung: Amplitude-Frequenz-Schaubild  
<https://www.geogebra.org/m/fvxkyvtb>
  - Erzwungene Schwingung: Phasenverschiebung-Frequenz-Schaubild  
<https://www.geogebra.org/m/kszvdijt>

# Erzwungene Schwingung: Struktur des Lernprozesses

Resonanz beschreiben  
und erklärbar machen



Anschluss an  
gedämpfte  
Schwingung

**Praktikum: Erzwungene Schwingung**

**Ziel**  
Sie beschäftigen sich mit der erzwungenen Schwingung eines Fadenpendels. Dabei untersuchen Sie, wie die Frequenz, die Amplitude und die Phasenlage des Pendels von der Frequenz der erzwungenen Schwingung abhängen.

**Material:** Faden (ca. 1,2 m), Pendelkörper, Metronom oder Metronom-App, Lineal

**Hinweis:** Das Metronom bzw. die App gibt in der Musik das Tempo vor. Die Zeitangaben beziehen sich immer auf „Jahre“ (Beats per minute / Schläge pro Minute).

**Aufgabestellung:**

- 1. Freie Schwingung „Eigenfrequenz“**  
Stellen Sie das Metronom auf 60 bpm.  
Bestimmen Sie die Periodendauer  $T_0$ , indem Sie das Metronom in jedem Umlaufpunkt (M) (s. Abb.) auslenken.

**WICHTIG:** Die folgenden Versuche müssen mit dieser Periodendauer durchgeführt werden!

- 2. Langsame Schwingung**  
Stellen Sie das Metronom auf ca. 40 bpm.  
Bewegen Sie die Hand mit dem Finger ein- und auslenkend hin und her (s. Abb.). Beobachten Sie Frequenz, Amplitude und Phasenlage des Pendels im Vergleich zur Bewegung der Hand.
- 3. Schnelle Schwingung**  
Stellen Sie das Metronom auf ca. 80 bpm.  
Wiederholen Sie 2. entsprechend.
- 4. Erregerfrequenz = Eigenfrequenz**  
Stellen Sie das Metronom auf ca. 60 bpm.  
Wiederholen Sie 2. entsprechend.
- 5. Weitere Möglichkeiten (freiwillig)**
  - Untersuchen Sie das Verhalten des Pendels bei anderen Frequenzen.
  - Eigene Ideen!

**Auswertung:**

- (a) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Periodendauer und Pendellänge beim Fadenpendel an. Überprüfen Sie durch das Messen bei 1. Messgenauigkeit!
- (b) Skizzieren Sie ein Amplituden-Frequenz-Diagramm der erzwungenen Schwingung. Markieren Sie die Eigenfrequenz des Pendels.  
Stimmen Sie den Zusammenhang an Ihrem Messgerät her.
- (c) Erläutern Sie sich über die Begriffe „erzwungene Schwingung“, „Resonanzkurve“, „Phasenlage bei erzwungenen Schwingungen“ und „Resonanzkatastrophe“. Ordnen Sie Ihre Versuchsergebnisse anhand dieser Begriffe zu.

© 2. Parallel CC BY 4.0

komplexe  
Kontexte  
zugänglich  
machen



Bildquellen:

Schaukel: Bild von [Frederik Hake](#) auf [Pixabay](#) (27.12.22); Anleitung Fadenpendel, Kraftmesser-Pendel: C.-J. Pardall [CC BY 4.0](#); Resonanzkurve für verschiedene Dämpfungen mit  $D = \frac{k}{2m}$ : Geek3 ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mplwp\\_resonance\\_D\\_envelope.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mplwp_resonance_D_envelope.svg)), „Mplwp resonance D envelope“, Ergänzung  $\omega = \omega_0$ : C.-J. Pardall, <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/legalcode> (27.12.22); Millenium Bridge London: Jan Kameniček ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:London\\_Millennium\\_Bridge\\_from\\_Saint\\_Paul's.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:London_Millennium_Bridge_from_Saint_Paul's.jpg)), „London Millennium Bridge from Saint Paul's“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (22.11.22); Zerstörung eines Weinglases mit einem Lautsprecher: Acs272 ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Breaking\\_glass\\_with\\_sound\\_using\\_resonance.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Breaking_glass_with_sound_using_resonance.png)), Ausschnitt von C.-J. Pardall, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode> (22.11.22)

# Überblick über die Materialien: Schwingungen

## Hintergrund und Überblick

- Gedämpfte und erzwungene Schwingung: Fachlicher Hintergrund (3102\_hintergrund\_schwingungen)
- Gedämpfte und erzwungene Schwingung: Unterrichtshilfen (3103\_unterricht\_schwingungen)
  - Bezug zu Bildungsplan, Jahresplanung und IQB-Materialien
  - Kontexte
  - mögliche Experimente
  - Struktur des Lernprozesses
  - Hinweise zum Unterricht: Methodisches, ...

**Gedämpfte und erzwungene Schwingung**

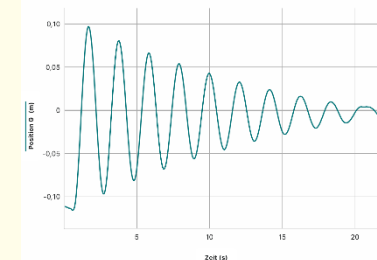
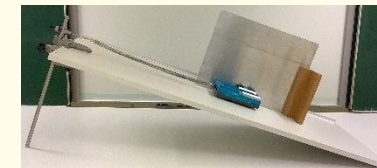
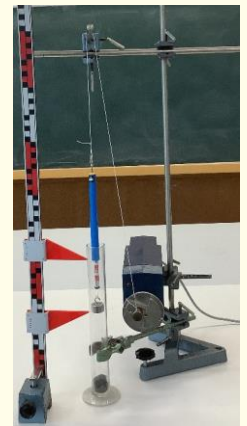
Die äußere Kraft entspricht also der Hebungskraft, d.h. die aufgenommene Energie wird sofort in thermische Energie umgewandelt. Für die Amplitude gilt dann:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

Die Amplitude ist also vollständig durch die vorgegebenen Größen festgelegt, insbesondere ist sie antiproportional zur Dämpfungsstärke  $b$ .

- **Resonanzfrequenz**  
Für kleine  $b$  kann man bei der Kräfteübertragung die Terme mit  $-b\omega$  vernachlässigen, sodass näherungsweise gilt:  
$$F_{\text{eff}}(\omega) \approx \kappa - m\omega^2$$
  
Für diesen Fall ist  $\omega = 0$ , d.h. es gibt eine phasengleiche Bewegung von Erreger und schwingendem Körper. Steigt  $b$  an, so ist die Amplitude von beiden nach gleich.  
Die  $F_{\text{eff}}(\omega)$  ist  $\omega = \sqrt{\kappa/m}$  und damit um  $\pi/2$  phasenverschoben zu  $F_{\text{eff}}(\omega)$  ist, wobei  $F = F_{\text{eff}}(\omega) \cdot A(\omega)$  jede Vektorkomponente des Vektors, sodass es nach der Errebergleichung keine Energieaufnahme gibt.
- **Gedämpfte Erzwungene**  
Für große  $b$  ist bei der Kraft nur noch der Term mit  $\omega^2$  entscheidend, d.h.  
$$F_{\text{eff}}(\omega) \approx -m\omega^2$$
  
Hierbei muss  $\omega = \omega_0$  sein, sodass es zu einer phasengleichen Bewegung von Erreger und schwingendem Körper kommt. Da  $b = \frac{1}{2} \sqrt{4\kappa m}$ , nimmt die Amplitude mit wachsen der Frequenz immer weiter ab. Wegen  $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$  ist  $A(\omega)$  bei weitem die Phasenverschiebung zu  $F_{\text{eff}}(\omega)$  keine Energieaufnahme möglich.  
Die Energieaufnahme des schwingenden Körpers während einer Periode hängt von der Phasenverschiebung  $\varphi$  ab:  
$$E(\varphi) = \int_0^T F_{\text{eff}}(\omega) \cdot v \, dt = \int_0^T F_{\text{eff}}(\omega) \cdot \dot{x} \, dt = -F_{\text{eff}}(\omega) \cdot x \Big|_0^T = -F_{\text{eff}}(\omega) \cdot x(T) - (-F_{\text{eff}}(\omega) \cdot x(0))$$
  
Dementsprechend ist eine Energieaufnahme nur für  $\varphi = \pi$  möglich, d.h. in konstanter Phase genau dann, wenn die Energie dem schwingenden Körper zuzunehmen und somit an ihm zuleit. Für  $0 < \varphi < \pi$  würde der Körper Energie an den Erreger abgeben.

**Leistung- und Amplitudenresonanz**  
Die oben beschriebene Leistungsaufnahme (auch Phasenresonanz genannt) tritt immer bei der Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung auf. Die maximale Amplitude tritt ebenfalls bei einer kleineren Frequenz auf. Sie ist abhängig von der Dämpfung. Aus der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung erhält man:  
$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$$
  
Ansonsten lässt sich dies ebenfalls an einem Plot  $A(\omega)$  der Phasenverschiebung für die Energieaufnahme nicht so genau ablesen.  
© J. Pardall CC BY 4.0





# Überblick über die Materialien: Schwingungen

- Materialien zur Schüleraktivierung: AB, Praktikum, ...

**Wie stößt man eine Schaukel richtig an?**

**Ziel**  
Kinder auf Schaukeln werden immer wieder umgestülpt, damit sie überhaupt schaukeln. Sie lernen an diesem Beispiel wesentliche Voraussetzungen für die Resonanz bei einer erzwungenen Schwingung kennen.

**Falls Sie Zeit und Lust haben: Gehen Sie auf einen Sprunplatz und probieren Sie es selbst aus!**

1. Erklären Sie mit einer Energieumwandlung, wann ein dies wesentliche Anzeichen notwendig ist, damit die Amplitude beim Schaukeln konstant bleibt.

**Im Physik Unterricht kommt es zu einer Diskussion:**  
Ben decket auf die Markierung in der Abbildung: "Wenn man die Schaukel anschiebt, wenn sie sich vom höchsten Lenkelpunkt zur Gleichgewichtslage bewegt, ist es am besten!"  
Anna: "Man kann aber auch von vorne stößen!"  
Lara: "Ja, aber wenn man sich umgedreht anschiebt, kann man leicht Anzeichen für Schaukel Energie entnehmen."  
Die Sportlehrer sagt: "Es ist im Prinzip egal, wo man die Schaukel anschiebt, solange man in die richtige Richtung schaut!"

2. Diskutieren Sie die vier Aussagen.

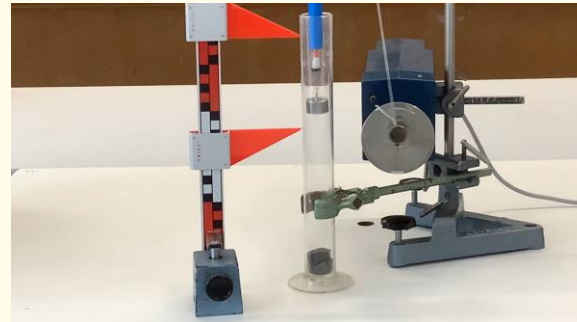
Die Frequenz, mit der die Schaukel ohne weitere Einflüsse schwingt, nennt man **Eigenfrequenz**. Die Frequenz, mit der sie an die gleiche Stelle in gleicher Weise immer wieder angestoßen wird, heißt **Erzwingfrequenz**.  
Eine **Physikerkollegin** sagt: "Zur Resonanz kann es nur kommen, wenn Eigenfrequenz und Erzwingfrequenz übereinstimmen."

3. Schützen Sie die Aussage:  
Beschreiben Sie dabei, was geschieht, wenn man die Erzwingfrequenz direkt zu klein oder zu groß wählt.

4. Tatsächlich ist die Aussage beim Anstoßen einer Schaukel nicht ganz richtig. Formulieren Sie eine korrigierte Fassung. Begründen Sie Ihre Lösung.

Skripturen: Foto: Bild von Pixabay/Debi; WP:Praktikum: Gf 11.02; Zeichnung: C.-J. Pardall  
C.-J. Pardall CC BY 4.0

- Stumme Videos



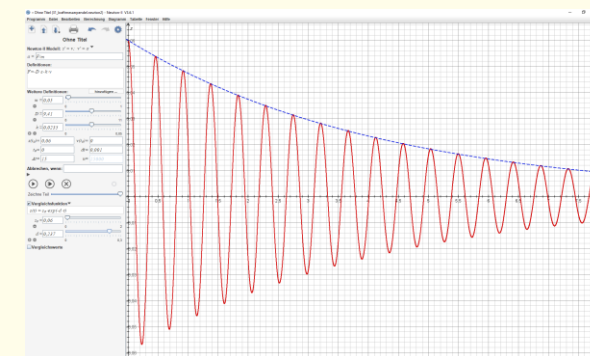
- Präsentation, Modellierung

## Gedämpfte Schwingung

- Schwingungen sind fast immer gedämpft.
- Die Amplitude ist nicht mehr konstant, sondern nimmt mit der Zeit ab.
- Erklären Sie, wie die Dämpfung jeweils zustande kommt.
- Beschreiben Sie, wovon es abhängt, wie stark die Dämpfung ist.



Skripturen: Skripturen: von Pixabay/Debi; WP:Praktikum: Gf 11.02; Zeichnung: C.-J. Pardall  
C.-J. Pardall CC BY 4.0



# Überblick über die Materialien: Schwingungen

- 3110\_loesungshinweise\_schwingungen
- 3111\_up\_gedaempfte\_schwingung: Unterrichtspräsentation zum Einstieg
- 3112\_kraftmesserpendel.mp4: Stummes Video – Kraftmesserpendel
- 3113\_kraftmesserpendel.newton2: Newton-II-Simulation
- 3114\_praktikum\_gedaempfte\_schwingung: Praktikum zur gedämpften Schwingung
  
- 3115\_ab\_erzwungene\_schaukel: Arbeitsblatt zum Einstieg
- 3116\_praktikum\_resonanz\_pendel: Praktikum zur Resonanz beim Fadenpendel
- 3117\_erzwungene\_schwingung.mp4:  
Stummes Video – erzwungene Schwingung beim Kraftmesserpendel