

# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

## Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik: Fachlicher und fachdidaktischer Hintergrund

### Inhaltsverzeichnis

Fachlicher Hintergrund .....	2
Quantenmechanik als Teil der Quantenphysik .....	2
Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion $\psi$ .....	2
Photonen .....	4
Elektronenbeugungsröhre: Gitter-Beugung oder Bragg-Reflexion? .....	5
Fachdidaktischer Hintergrund.....	6
Konsequenzen aus der fachlichen Struktur .....	6
Didaktische Modelle für die Wellenfunktion .....	6
Zustand und Messung .....	8
Detektionswahrscheinlichkeit.....	8
Schülervorstellungen .....	9

Im Folgenden werden nur Aspekte behandelt, die aus der Perspektive des Unterrichtens als Hintergrundwissen für Lehrkräfte wichtig sind. Es sei an dieser Stelle auf die universitären Lehrbücher verwiesen, die sich mit der Quantenmechanik und der Quantenphysik beschäftigen. **Die folgenden Abschnitte sind nicht für den Unterricht mit Schülerinnen und Schülern gedacht, sondern richten sich ausschließlich an Lehrkräfte!**

# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

## Fachlicher Hintergrund

### Quantenmechanik als Teil der Quantenphysik

Der Bildungsplan spricht aufgrund der Vorgabe der KMK-Bildungsstandards (S. 21) von der *quantenmechanischen Wellenfunktion* (3.6.6 (5)).

Die Schrödinger-Gleichung beschreibt das Verhalten massebehafteter Quantenobjekte aufgrund von äußeren Feldern. Dieser Teil der *Quantenphysik* wird meist *Quantenmechanik* genannt.<sup>1</sup> Insbesondere das elektromagnetische Feld wird dabei klassisch beschrieben und nicht quantisiert. Durch diese Beschränkung ist es im Rahmen der Quantenmechanik nicht möglich, die Erzeugung oder Vernichtung von Quantenobjekten zu beschreiben. Insbesondere ist das Photon kein Objekt der Quantenmechanik und kann nicht mit der Schrödinger-Gleichung beschrieben werden. Zur Beschreibung der Erzeugung bzw. Vernichtung von Quantenobjekten benötigt man *Quantenfeldtheorien*, wie z.B. die Quantenelektrodynamik beim Photon. Diese Theorien entwickelten sich aus den Konzepten und Begriffen (wie der Wellenfunktion) der Quantenmechanik.

Da man im Unterricht vor allem Phänomene betrachtet, die sowohl bei massebehafteten Quantenobjekten als auch Photonen ganz ähnlich auftreten, nutzt man sinnvollerweise diese Analogie, ohne den erwähnten grundsätzlichen Unterschied zu thematisieren. Daher sprechen wir im Folgenden allgemein von der Wellenfunktion als Möglichkeit der Beschreibung von Quantenobjekten. Wir beschränken uns in diesem Text dabei auf einzelne Quantenobjekte und behandeln daher z.B. die Verschränkung an anderer Stelle.

### Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion $\psi$

Die folgenden Eigenschaften der Wellenfunktion  $\psi$  sollten die Schülerinnen und Schüler inhaltlich, aber nicht unbedingt in den hier angegebenen Formulierungen anwenden können. Sie ergeben sich aus den Axiomen der Quantenmechanik und der Kopenhagener Deutung.

#### 1. Die Wellenfunktion $\psi$ bestimmt den Zustand eines Quantenobjekts eindeutig.

So wie z.B. in der klassischen Mechanik der Zustand eines Körpers durch seinen Ort und seinen Impuls eindeutig bestimmt ist, bestimmt die Wellenfunktion  $\psi$  den Zustand eines Quantenobjekts vollständig. In der klassischen Physik geht man davon aus, dass die Größen, die den Zustand eines Objekts festlegen, jederzeit gleichzeitig als Messgrößen vollständig bestimmbar sind. In der Quantenphysik ist das grundsätzlich anders: Man muss zwischen Zuständen und Observablen (Messgrößen) unterscheiden.

#### 2. Die Wellenfunktion $\psi$ ist im Allgemeinen komplexwertig.

Die Zustände von Quantenobjekten können nicht mit reellwertigen Funktionen bzw. Vektoren beschrieben werden. Das ist erst mit besonderen Vektorräumen, sogenannten Hilberträumen, möglich. Die Vektoren in diesen Räumen entsprechen physikalischen Zuständen. Einer dieser Hilberträume ist der sogenannte Ortsraum, der häufig anschaulich interpretiert wird. In diesem kann ein Zustandsvektor durch eine komplexwertige Wellenfunktion  $\psi$  dargestellt werden, die selbst keiner direkten Messung zugänglich ist. Die

<sup>1</sup> Die Fachliteratur ist hier bei der Begriffsbildung nicht immer strikt.

# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

Interferenzfähigkeit von Quantenobjekten spiegelt sich im komplexwertige  $\psi$  wider, wie man es auch anhand des Zeigermodells im Unterricht didaktisch reduziert einsetzt.

## 3. In der Quantenphysik superponieren Zustände.

Die Superposition der Zustände entspricht der Addition der entsprechenden Wellenfunktionen. Beispielsweise superponieren beim Doppelspalt die beiden Einzelspalt-Wellenfunktionen  $\psi_{\text{links}}$  und  $\psi_{\text{rechts}}$  zu  $\psi_{\text{res}} = \psi_{\text{links}} + \psi_{\text{rechts}}$ . Hier zeigt sich deutlich, dass das Feldkonzept zur Beschreibung von Quantenobjekten geeignet ist, da auch dort das Prinzip der Superposition zentral ist. Hingegen superponieren in der klassischen Mechanik Zustände nicht. Daher kommt es z.B. beim Doppelspalt-Experiment mit klassischen Teilchen auch nicht zur Interferenz.

## 4. Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion $\psi$ ist durch eine Differentialgleichung (z.B. die Schrödinger-Gleichung) vollständig determiniert.

Es handelt sich immer um eine partielle Differentialgleichung (d.h. sie enthalten Zeit- und Ortsableitungen), die im Rahmen des Unterrichts i.A. nicht gelöst werden kann. Die Schrödinger-Gleichung ist die fundamentale Gleichung der nicht-relativistischen Quantenmechanik und gilt deswegen insbesondere nicht für Photonen. Grundlegend für die Quantenfeldtheorien sind aber andere Gleichungen wie z.B. die Dirac-Gleichung. Entscheidend ist, dass die zeitliche Entwicklung von  $\psi$  wegen der Differentialgleichung vollständig determiniert ist.

## 5. Das Ergebnis einer Messung einer Größe an einem Quantenobjekt ist stets eindeutig. Eine direkt wiederholte Messung der gleichen Größe am selben Quantenobjekt liefert (sofern möglich) dasselbe Ergebnis.

Ungeachtet einer Superposition von Zuständen bei einem Quantenobjekt ist das Ergebnis bei der Messung einer Größe immer eindeutig und niemals „verschwommen“ o.ä. Beispielsweise befindet sich ein Quantenobjekt bei einem Doppelspalt-Versuch im Zustand  $\psi_{\text{links}} + \psi_{\text{rechts}}$ . Stellt man nun je einen Detektor direkt hinter die beiden Spalte, so wird ein Quantenobjekt als Ganzes immer entweder von dem einen oder von dem anderen Detektor nachgewiesen, niemals aber von beiden gleichzeitig ganz oder teilweise o.ä.

Dass eine wiederholte Messung zum gleichen Ergebnis führt, liegt daran, dass der ursprüngliche Zustand des Quantenobjekts durch die Messung instantan zu einem Eigenzustand der gemessenen Größe wird. Üblicherweise wird dies als *Kollaps der Wellenfunktion* beschrieben, aber hier sind auch andere Interpretationen (wie z.B. in der Viele-Welten-Interpretation oder der Bohm'schen Mechanik) möglich. Ob eine wiederholte Messung möglich ist, hängt von der Messapparatur ab. Sie ist aber bei massebehafteten Quantenobjekten prinzipiell immer möglich. Da Photonen bei der Detektion i.A. vernichtet werden, ist eine wiederholte Messung hier unmöglich.<sup>2</sup>

## 6. Ein und derselbe Zustand eines Quantenobjekts kann zu verschiedenen Messergebnissen führen. Dabei entspricht $|\psi|^2$ der Detektionswahrscheinlichkeit.

Aus einem einzelnen eindeutigen Messergebnis lässt sich nicht eindeutig auf den Zustand schließen, in dem sich das Quantenobjekt direkt vor der Messung befand. Z.B. ist die

<sup>2</sup> Bei einem Polarisationsfilter in Durchlassrichtung gibt es keine Wechselwirkung zwischen Photon und Filter, sodass man hier eigentlich nicht von einer wiederholten Messung reden kann.

# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

erfolgreiche Detektion „rechter Spalt“ mit  $\psi_{\text{links}} + \psi_{\text{rechts}}$  und mit  $\psi_{\text{rechts}}$  vereinbar. (Dieser Aspekt lässt sich mit Delayed-Choice-Experimenten näher beleuchten.) Umgekehrt führt derselbe Zustand nicht immer zu denselben Messergebnissen. Im Beispiel kann  $\psi_{\text{links}} + \psi_{\text{rechts}}$  zu einer erfolgreichen Ortsmessung „rechter Spalt“ oder „linker Spalt“ führen.

Zu einer sinnvollen Verbindung zwischen Zuständen und Observablen gelangt man durch die *Bornsche Wahrscheinlichkeitsdeutung*: Mit  $|\psi|^2$  lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Ergebnisse einer Ortsmessung berechnen.<sup>3</sup> Wenn man das exakt gleiche Experiment häufig durchführt, so ergibt sich bei den Messergebnissen eine Häufigkeitsverteilung, die man mit der mit  $|\psi|^2$  bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung vergleichen und so Rückschlüsse auf den ursprünglichen Zustand des Quantenobjekts ziehen kann.

## Photonen

Photonen „erben“ nicht nur Eigenschaften einer klassischen elektromagnetischen Welle. In einigen Punkten ist ihr Verhalten doch komplexer als man auf den ersten Blick meint. Drei Aspekte seien hier genannt:

- Die Beobachtungen beim lichtelektrischen Effekt zeigen deutlich das Scheitern der klassischen Wellentheorie und lassen sich mit der Einsteinschen Lichtquantenhypothese erklären. Eine umfassende theoretische Beschreibung der experimentellen Beobachtungen zum lichtelektrischen Effekt (z.B. Einstein-Gleichung, Wirkungsquerschnitte, direktes Einsetzen des Fotostroms auch bei geringer Intensität) erzwingt eine Quantisierung des elektromagnetischen Felds, d.h. die Einführung des Photonen-Begriffs. Wird nur die Einstein-Gleichung betrachtet, ist fachlich die nichtrelativistische Quantenmechanik zur Erklärung ausreichend<sup>4</sup>, d.h. die Einführung des Photons ergibt sich hier nicht zwingend. Behandelt man den lichtelektrischen Effekt zu Beginn der Quantenphysik und führt daran den Begriff des Photons ein, sollte man daher über die Einstein-Gleichung hinaus gehen und z.B. das direkte Einsetzen des Fotostroms auch bei geringer Intensität thematisieren.
- Häufig wird der Eindruck vermittelt, elektromagnetische Strahlung bestehe aus einem Strom von Photonen. Das ist fachlich im Allgemeinen komplizierter: Photonen vermitteln im Rahmen der Quantenelektrodynamik die elektrodynamische Wechselwirkung. Dabei werden sie erzeugt bzw. vernichtet, d.h. es gibt Zustände mit verschiedenen Photonenzahlen. Da quantenphysikalische Zustände superponieren können, gibt es auch Zustände mit unbestimmter Photonenzahl. Eine unbestimmte Photonenzahl gibt es z.B. bei kohärentem Laserlicht („Glauber-Zustände“), während Zustände mit bestimmter Photonenzahl („Fock-Zustände“) erst aufwendig präpariert werden müssen. Das ist ein Grund, warum die Erzeugung von Einzelphotonen so schwierig ist.
- Es gibt einen weiteren Grund für die Schwierigkeit, Einzelphotonen aus thermischem Licht zu erzeugen, ist das sogenannten *Bunching*: Bei einer thermischen Lichtquelle ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Photonen gleichzeitig oder in einem kurzen Zeitabstand hintereinander emittiert werden, wesentlich größer, als dass einzelne Photonen ausgesendet werden. Da Photonen scheinbar aneinander „kleben“, spricht man vom *Bunching*. Daher lassen sich Einzelphotonen nicht durch den Einsatz

<sup>3</sup> Da der Ort fast immer eine kontinuierlich verteilte Messgröße ist, handelt sich bei  $|\psi|^2$  um eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

<sup>4</sup> Wentzel, G. Zur Theorie des photoelektrischen Effekts. Z. Physik 40, 574–589 (1926). <https://doi.org/10.1007/BF01390456>

# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

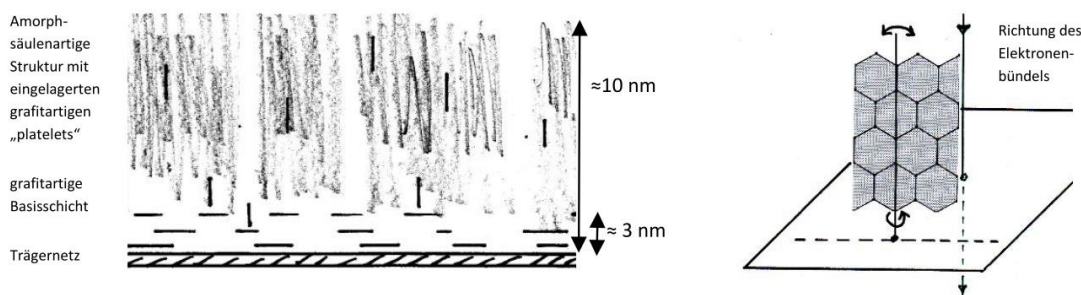
abschwächender Graufilter o.ä. herstellen. Die Erzeugung von Photonen ist experimentell nach wie vor eine große Herausforderung. Entsprechende Aufbauten kosten über 10000 €.

## Elektronenbeugungsröhre: Gitter-Beugung oder Bragg-Reflexion?

Wenn in Schulbüchern die Elektronenbeugungsröhre quantitativ behandelt wird, wird die Entstehung des Interferenzmusters üblicherweise mit der Bragg-Reflexion erklärt. Beim ersten Nachweis der Elektroneninterferenz 1927 durch C. Davisson und L. Germer war es auch eine solche. Dort wurde aber die Streuung von langsamen Elektronen (ca. 50 eV) an einer geschliffenen Nickeloberfläche untersucht, d.h. es handelte sich um einen ganz anderen Aufbau als beim „Durchstrahlen“ der Graphitfolie in der Elektronenbeugungsröhre mit Elektronen im Bereich von 2-5 keV. Welche Interferenzerscheinungen an der Folie auftreten, hängt vom konkreten Aufbau der verwendeten Folie ab, der sich aus dem Herstellungsprozess ergibt.

Michael Rode, ein langjähriger Fortbildner in Niedersachsen, hat sich mit diesem Thema theoretisch und experimentell beschäftigt<sup>5</sup>. Die folgenden Absätze stellen u.a. Teile seiner Ergebnisse kurz dar.

Die in Elektronenbeugungsröhren eingesetzten Folien bestehen aus einem Kupfernetz, auf dem Kohlenstoff aufgedampft wird. Die Abb. gibt eine Übersicht über den Aufbau der Folie. Beim Aufdampfen entsteht eine Basisschicht, deren (etwa zehn) Lagen parallel zum Trägernetz ausgerichtet und ähnlich wie Graphen strukturiert sind, d.h. es gibt dort die bekannte hexagonale Struktur, aber die einzelnen Lagen sind unterschiedlich orientiert und befinden sich anders als bei Graphit nicht in einem festen Abstand zueinander. An dieser Basisschicht kann es zu einer Gitterbeugung kommen, die aufgrund der zufälligen Orientierung zu einem ringförmigen Interferenzmuster führt. Oberhalb der Basisschicht gibt es orthogonal dazu ausgerichtete, säulenartige Kohlenstoffstrukturen. Diese Schicht besteht zum größten Teil aus amorphem oder Graphen-artig aufgebautem Kohlenstoff. In diesem Bereich kann es zur Bragg-Reflexion kommen. In der gesamten Folie kommt es darüber hinaus zu weiteren komplizierten Interferenzeffekten. Eine genauere Untersuchung der Folie mit Röntgenstrahlung ( $K_\alpha$ -Strahlung von Kupfer) zeigt, dass der Beitrag der Gitterbeugung überwiegt.<sup>6</sup>



Zum Aufbau der Kohlenstoffschicht (M. Rode, [CC BY 4.0](#))

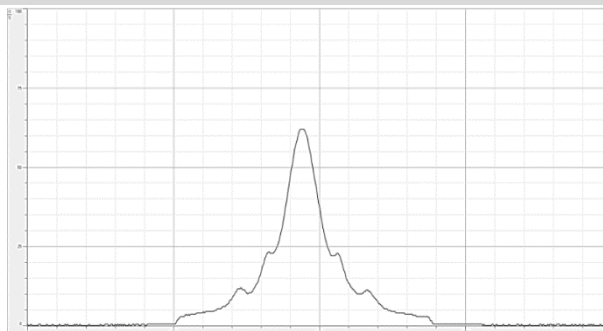
<sup>5</sup> M. Rode: Elektronenbeugung! Aber wie modellieren? Unterricht Physik, 189/190, 2022, 92-95

M. Rode: Beugung an zweidimensionalen Gittern als Modell für die Elektronenbeugung. MNU-Journal 04.2022, 309-314 und das dortige Online-Material

<sup>6</sup> M. Rode, persönliche Mitteilung, 01/2023

# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

Aus dem Aufbau der Folie ergibt sich, dass man mit einem Interferenzmuster rechnen muss, dass sich aus den verschiedenen Beiträgen (Gitter, Bragg und weitere Effekte) zusammensetzt. Das zeigt sich auch im beobachteten Interferenzmuster der Elektronenbeugungsröhre. Wie die Aufnahme der Intensitätsverteilung bei einem radialen Schnitt durch das Interferenzmuster mit einer einzelnen CCD-Kamera von M. Rode zeigt, handelt es sich eben nicht um einfaches Linienspektrum, wie man es aus der Optik kennt. (Immerhin sind die Ringe als lokale Maxima zu erkennen.)



Intensitätsverteilung des Interferenzmusters  
(M. Rode, [CC BY 4.0](#))

Wenn man die Intensitätsmaxima aufgrund der Gitter-Beugung und der Bragg-Reflexion berechnet, ergeben sich für kleine Winkel aufgrund der dort gültigen Näherung  $2 \cdot \sin(\alpha) \approx \sin(2\alpha)$  ähnliche Werte. Da die Röhren der Lehrmittelhersteller bauartbedingt nur Winkel bis etwa  $20^\circ$  zulassen, ist im Rahmen der Messgenauigkeit eine Unterscheidung grundsätzlich nicht möglich. Die gemessenen Werte sind mit Gitter-Beugung und Bragg-Reflexion vereinbar. (Zusätzlich nimmt die Intensität mit zunehmendem Winkel so stark ab, dass ab ca.  $12^\circ$  praktisch keine Maxima erkennbar sind, sodass selbst die Kleinwinkelnäherung zu ähnlichen Ergebnissen führt.)

Aus den Überlegungen und Messergebnissen ergibt sich für den Unterricht die Notwendigkeit einer didaktischen Reduktion. Wenn man das Interferenzmuster quantitativ auswertet, empfehlen wir, sich auf die Gitter-Beugung zu beschränken, da diese den Schülerinnen und Schülern schon bekannt ist und diese (anders als die Bragg-Reflexion) Teil des Bildungsplans ist. Die Interpretation der Ringe als Interferenzmuster ist an dieser Stelle Herausforderung genug.

## Fachdidaktischer Hintergrund

### Konsequenzen aus der fachlichen Struktur

#### Didaktische Modelle für die Wellenfunktion

Da  $\psi$  eine komplexwertige Lösung einer partiellen Differentialgleichung ist, kann die Wellenfunktion im Rahmen des Unterrichts im Allgemeinen nicht berechnet werden. Um die oben genannten grundlegenden Eigenschaften der Wellenfunktion den Schülerinnen und Schülern zugänglich zu machen, muss es eine didaktische Reduktion geben.

Dass die Bezeichnung *Wellenfunktion* für  $\psi$  legt die Analogie zur klassischen Wellenfunktion nahe. Durch eine frühzeitige Behandlung der De-Broglie-Wellenlänge wird dies für die Schülerinnen und Schüler greifbar. Andererseits muss es auch eine deutliche Abgrenzung zur klassischen Wellenfunktion geben.

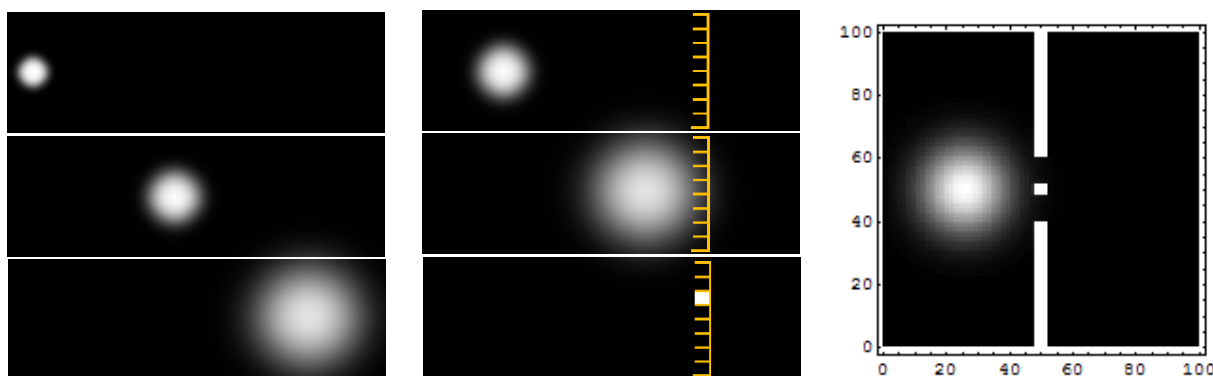
Auch wenn den Schülerinnen und Schülern der Zugang zu komplexwertigen Funktionen fehlt, ist ihnen intuitiv klar, dass die Addition  $\psi_{\text{links}} + \psi_{\text{rechts}}$  als Superposition der beiden Zustände zu verstehen ist. Hier hilft der mathematische Vergleich zur Beschreibung elektromagnetischer Wellen und legt auch aus Perspektive der Schülerinnen und Schüler die Übernahme des

# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

**Zeigermodells** nahe. Da die Zeiger komplexe Zahlen anschaulich darstellen, ist dieser Schritt fachlich korrekt und erlaubt grundlegende Betrachtungen wie z.B. die Erklärung der Interferenzfähigkeit anhand der Superposition.

Im Gegensatz zu  $\psi$  ist  $|\psi|^2$  reellwertig und wird als Detektionswahrscheinlichkeitsdichte im Ortsraum interpretiert. Das legt nahe, sich im Unterricht vor allem hiermit zu beschäftigen. Mit den Schülerinnen und Schülern sollte exemplarisch die Notwendigkeit einer Wahrscheinlichkeitsdichte besprochen werden, sodass man sonst davon sprechen kann, dass  $|\psi|^2$  z.B. der Detektionswahrscheinlichkeit entspricht oder man sie mit  $|\psi|^2$  bestimmen/berechnen kann.

Eine Möglichkeit der Veranschaulichung von  $|\psi|^2$  ist das **Wolkenmodell**, bei dem die Detektionswahrscheinlichkeitsdichte in Abbildungen durch Wolken mit entsprechendem Dichteverlauf dargestellt werden. Fachdidaktisch wird diese Darstellung durchaus kontrovers diskutiert, da sie schlussendlich mit klassischen Vorstellungen in der Atomphysik, wie z.B. den Bohr'schen Bahnen, vergleichbar ist. Wenn man sich dafür entscheidet, sollte man das Modell reflektiert inklusive seiner Grenzen behandeln.



Bildquellen:

$|\psi|^2$  bei freiem Quantenobjekt,  $|\psi|^2$  bei Detektion: C.-J. Pardall

$|\psi|^2$  am Doppelspalt: The original uploader was Jean-Christophe BENOIST at French Wikipedia. (<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Slits.gif>), „Slits“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (06.02.23)

Für das Wolkenmodell sind drei Eigenschaften zentral (vgl. Abb.):

- Ohne äußeren Einfluss bewegt sich eine  $|\psi|^2$ -Wolke mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Dabei breitet sie sich immer mehr aus.
- Bei der Detektion kollabiert die  $|\psi|^2$ -Wolke instantan (ohne zeitliche Entwicklung) auf die Größe des Detektors.
- Wenn eine  $|\psi|^2$ -Wolke sich z.B. beim Doppelspalt in zwei aufspaltet,<sup>7</sup> die sich anschließend wieder überlappen, kommt es zur Superposition und evtl. zur Interferenz.

Gerade die letzten beiden Eigenschaften offenbaren deutlich das Versagen dieses anschaulichen Modells. Die Grenzen des Wolkenmodells müssen wegen der trotzdem naheliegenden Interpretation von  $|\psi|^2$  als „reale Wolke“ mit den Schülerinnen und Schülern thematisiert werden: Der Kollaps der Wolke ist kein Prozess. Die Interferenz kann nur durch zusätzliche Eigenschaften erklärt werden. In diesem Sinne bietet sich dieses begrenzt gültige Modell auch an, die Eigenschaften der Wellenfunktion und den Begriff „Materiewelle“ im Unterricht nochmals zu reflektieren.

<sup>7</sup> Fachlich handelt es sich hier nicht um eine einfache Aufspaltung, sondern um eine Verschränkung mit dem Doppelspalt.

# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

Eine weitere Grenze des Wolkenmodells ist, dass  $|\psi|^2$  in der Regel nicht räumlich begrenzt ist, aber durch eine willkürliche Setzung bei der Darstellung so erscheint. Das Problem tritt in ähnlicher Weise bei der Darstellung der Detektionswahrscheinlichkeitsdichte bei Atomen auf.

## Zustand und Messung

Im Gegensatz zur klassischen Physik lässt eine Messung in der Quantenphysik keinen eindeutigen Rückschluss auf den Zustand des Quantenobjekt zu. Dies sollte daher im Unterricht behandelt werden. Was allerdings genau beim Messvorgang passiert, ist zum einen Gegenstand der aktuellen Forschung, bei der z.B. verschiedene Erweiterungen der Theorie vorgeschlagen werden, zum anderen aber auch in der Beschreibung innerhalb der bestehenden Quantenphysik abhängig davon, welche Interpretation man verwendet. Beide Aspekte finden sich aus gutem Grunde nicht im Bildungsplan.

Daher ist es sinnvoll, im Unterricht die **Ensemble-Interpretation**<sup>8</sup> als Minimalkonsens zwischen den verschiedenen Interpretationen zu verwenden: In den Beobachtungen bei Experimenten mit einzelnen Quantenobjekten zeigt sich immer wieder das Zusammenspiel der determinierten Entwicklung von  $\psi$  und den indeterminierten Messergebnissen, für die man mit  $\psi$  Wahrscheinlichkeiten berechnen kann. Wenn man nicht Einzelmessungen, sondern nur Messungen an gleichartig präparierten Ensembles von Quantenobjekten betrachtet, verkleinert man zwar den Betrachtungsbereich der Quantenphysik, benötigt aber über die **Bornsche Wahrscheinlichkeitsdeutung** von  $|\psi|^2$  hinaus keine weiteren Annahmen über den Messprozess.

Die Wellenfunktion enthält alle Informationen über die zeitliche Entwicklung des Zustands eines Quantenobjekts bzw. eines Systems mehrerer Objekte. Misst man eine Größe (Ort, Wellenlänge, ...), so stellt man eine „Frage“ an das System. Dabei gibt es i.A. keine eindeutige Zuordnung von Zustand und Messung. Das zeigt sich zu Beginn an den streuenden Messwerten. Im weiteren Verlauf des Unterrichts wird das Verständnis hierfür durch Delayed-Choice-Experimente vertieft.

## Detektionswahrscheinlichkeit

Wir verwenden den Begriff *Detektionswahrscheinlichkeit* aus folgenden Gründen:

- Die Begriffe „Aufenthaltswahrscheinlichkeit“ oder „Antreffwahrscheinlichkeit“ suggerieren, dass sich das Quantenobjekt schon zuvor am Nachweisort aufgehalten hat und die Wahrscheinlichkeitsverteilung nur durch das subjektive Nichtwissen beim Messen zustande kommt. Dies wiederum legt eine Beschreibung mit lokalen verborgenen Variablen nahe, die aufgrund der Verletzung der Bellschen Ungleichung nicht korrekt ist.
- Da Photonen bei der Detektion vernichtet werden, halten sie sich anschließend nirgends auf, sodass der Begriff „Aufenthaltswahrscheinlichkeit“ nicht zielführend ist. Im Rahmen der Quantenelektrodynamik kann daher einem Photon kein Ort zugewiesen werden.<sup>9</sup> Beispielsweise kann bei einem Doppelspaltexperiment lediglich die Aussage getroffen werden, dass der Zugang des Photons durch den Doppelspalt erfolgte und es im Detektor nachgewiesen wurde. Weitere Aussagen bezüglich des Ortes können streng genommen nicht gemacht werden. Eine durch ein Photonendetektor-Array

<sup>8</sup> Eine fachdidaktische Einführung hierzu bietet: H. Wiesner, R. Müller, [Die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik \(1\)](#), Physik in der Schule 34, 343, 379 (1996).

<sup>9</sup> Es lassen sich Hilfsgrößen konstruieren, die zu endlichen Wahrscheinlichkeiten führen. Diese Größen sind in den Quantenfeldtheorien aber nicht so zentral wie  $\psi$  in der Quantenmechanik.



# Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

gemessene Häufigkeitsverteilung lässt sich aber bei genügend großen Zahlen als Detektionswahrscheinlichkeit interpretieren.

## Schülervorstellungen<sup>10</sup>

Die meisten der im Folgenden geschilderten Vorstellungen sind fachlich falsch, sodass für die Lernenden ein echter Konzeptwechsel notwendig ist. Dies kann hier nur dadurch geschehen, dass die Schülerinnen und Schüler sich mit ihren eigenen Vorstellungen und dem Modell der Quantenphysik im Zusammenhang mit verschiedenen experimentellen Ergebnissen auseinandersetzen. Dazu ist es immer wieder notwendig, sie zur Diskussion hierüber herauszufordern.

- **Koexistenz von Wellen- und Teilchenmodell**

Viele Schülerinnen und Schüler akzeptieren ein Teilchenmodell von Licht und benutzen gleichzeitig die Vorstellung der elektromagnetischen Welle. Die Akzeptanz der Teilchenvorstellung ist dabei ähnlich stark wie bei Elektronen. Die Lösung besteht für die Lernenden häufig in einem oberflächlichen „heute so, morgen so“-Dualismus. Z.B. ist für sie das Licht beim lichtelektrischen Effekt eben ein Teilchen, aber am Doppelspalt eine Welle.

Für den Lernprozess ist es daher zentral, auf eine fachlich adäquate Interpretation der Wellenfunktion hinzuwirken und die Welleneigenschaften immer wieder zu thematisieren, auch in Bereichen, in denen auf den ersten Blick ein Teilchenmodell genügt, wie z.B. beim lichtelektrischen Effekt oder beim Compton-Effekt.

- **Wahrscheinlichkeit als Ungenauigkeit**

Dass man beim Würfeln nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen kann, liegt im Modell der klassischen Physik daran, dass man die Anfangsbedingungen nicht genügend genau kennt. Dies wird von Schülerinnen und Schülern auf die in der Quantenphysik auftretenden Wahrscheinlichkeiten übertragen, d.h. diese entstehen für die Lernenden auch durch subjektive Unkenntnis und Messungenauigkeit. Das entspricht fachlich dem Wunsch nach der Existenz von lokalen verborgenen Parametern, deren Existenz durch die erfolgte experimentelle Falsifizierung der Bell'schen Ungleichung ausgeschlossen werden kann.

Entsprechend muss die und vollständig determinierte Zustandsbeschreibung durch  $\psi$  im Gegensatz zu den Wahrscheinlichkeitsaussagen bei der Messung behandelt werden und darüber hinaus die Bedeutung der identischen Präparation eines Zustands.

- **Bahnbegriff**

Wenn man ein Elektron bei wiederholter Messung häufiger an einer Stelle nachweist, dann ist die Vorstellung naheliegend, dass es sich auch ohne Messung dort häufiger aufhält als an einer Stelle mit kleinerer Detektionswahrscheinlichkeit, d.h. sich eigentlich einen Ort und damit eine Bahn hat, die deterministisch festgelegt ist. („Irgendwo

<sup>10</sup> Einen Überblick gibt hier: R. Müller, H. Schecker: Schülervorstellungen zur Quanten- und Atomphysik. In: H. Schecker, T. Wilhelm, M. Hopf, R. Duit (Hrsg.): Schülervorstellungen und Physikunterricht, <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57270-2> (2018), 210-224

## Die Wellenfunktion $\psi$ in der Quantenphysik

muss das Elektron ja sein.“) Die Darstellung von Atomen mit um den Atomkern kreisenden Elektronen in populär(wissenschaftlich)en Darstellungen zementieren dies.

Diese Auffassung wird durch die Begriffe Antreff- bzw. Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Zusammenhang mit  $|\psi|^2$  unterstützt die man daher vermeiden sollte (s.o.).

- **Übeneralisierung bei den Eigenschaften verschiedener Quantenobjekten**

Die Schülerinnen und Schülern unterscheiden teilweise nicht zwischen den Eigenschaften von Photonen und den massebehafteten Quantenobjekten. (z.B.: „Wenn man ein Elektron durch einen Polarisationsfilter schickt, ...“)

Beim zielführenden Ausnutzen der Gemeinsamkeiten muss man hier daher auch die Unterschiede deutlich machen.