

Die quantenmechanische Wellenfunktion ψ

Erlasstagung Physik

01.-03.02.2023

C.-J. Pardall [CC BY 4.0](#)

Überblick

- Fachlicher und fachdidaktischer Hintergrund
 - Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion ψ
 - Elektronenbeugungsröhre
 - Fachdidaktische Aspekte
- Struktur des Lernprozesses
- Überblick über die Materialien zu ψ

Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion ψ

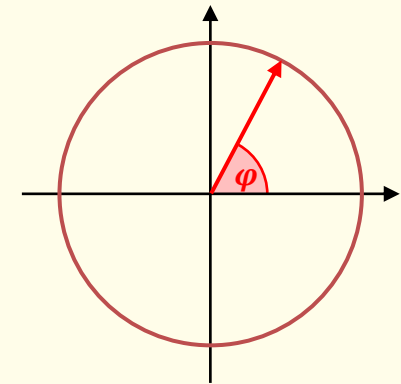
- Schrödinger-Gleichung (nicht-relativistische Quantenmechanik)
 - massebehaftete Quantenobjekte in äußeren Feldern
 - keine Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, keine Photonen
- Quantenfeldtheorien
 - Quantenelektrodynamik: Quantisierung des el.-magn. Feldes, Photonen!
 - Erzeugung und Vernichtung von Quantenobjekten
- Grundlage für das Folgende:
Axiome der Quantenmechanik, Kopenhagener Deutung

Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion ψ

1. Die Wellenfunktion ψ bestimmt den Zustand eines Quantenobjekts eindeutig.
2. Die Wellenfunktion ψ ist im Allgemeinen komplexwertig.
3. In der Quantenphysik superponieren Zustände.
4. Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion ψ ist durch eine Differentialgleichung (z.B. die Schrödinger-Gleichung) vollständig determiniert.
5. Das Ergebnis einer Messung einer Größe an einem Quantenobjekt ist stets eindeutig. Eine direkt wiederholte Messung der gleichen Größe am selben Quantenobjekt liefert (sofern möglich) dasselbe Ergebnis.
6. Ein und derselbe Zustand eines Quantenobjekts kann zu verschiedenen Messergebnissen führen. Dabei entspricht $|\psi|^2$ der Detektionswahrscheinlichkeit.

Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion ψ

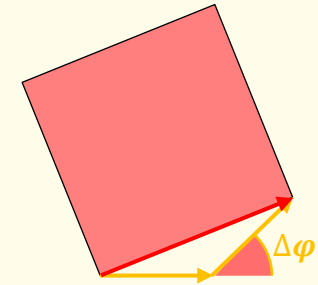
1. Die Wellenfunktion ψ bestimmt den Zustand eines Quantenobjekts eindeutig.
 - klass. Physik: Alle Zustandsgrößen sind immer gleichzeitig messbar.
 - Quantenphysik: Man muss zwischen Zustand und Messung unterscheiden.
2. Die Wellenfunktion ψ ist im Allgemeinen komplexwertig.
 - math. Struktur: Hilberträume
 - didaktische Reduktion: Zeigermodell



Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion ψ

3. In der Quantenphysik superponieren Zustände.

- Bsp.: Doppelspalt $\psi_{\text{res}} = \psi_{\text{links}} + \psi_{\text{rechts}}$
- Basiskonzept: Superposition beim elektromagnetischen Feld
- klass. Mechanik: keine Superposition von Zuständen



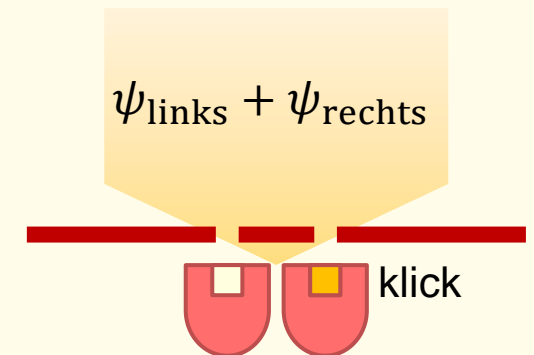
4. Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion ψ ist durch eine Differentialgleichung (z.B. die Schrödinger-Gleichung) vollständig determiniert.

- im Unterricht nicht lösbar
- Determiniertheit in der Quantenphysik!

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion ψ

5. Das Ergebnis einer Messung einer Größe an einem Quantenobjekt ist stets eindeutig. Eine direkt wiederholte Messung der gleichen Größe am selben Quantenobjekt liefert (sofern möglich) dasselbe Ergebnis.
- nichts „Verschwommenes“
 - „Kollaps der Wellenfunktion“
6. Ein und derselbe Zustand eines Quantenobjekts kann zu verschiedenen Messergebnissen führen. Dabei entspricht $|\psi|^2$ der Detektionswahrscheinlichkeit.
- $\psi_{\text{links}} + \psi_{\text{rechts}} \rightarrow$ Detektion entweder „links“ oder „rechts“
 - einzelne Detektion „rechts“: $\psi_{\text{links}} + \psi_{\text{rechts}}$ oder ψ_{rechts} ?
 - Bornsche Wahrscheinlichkeitsdeutung

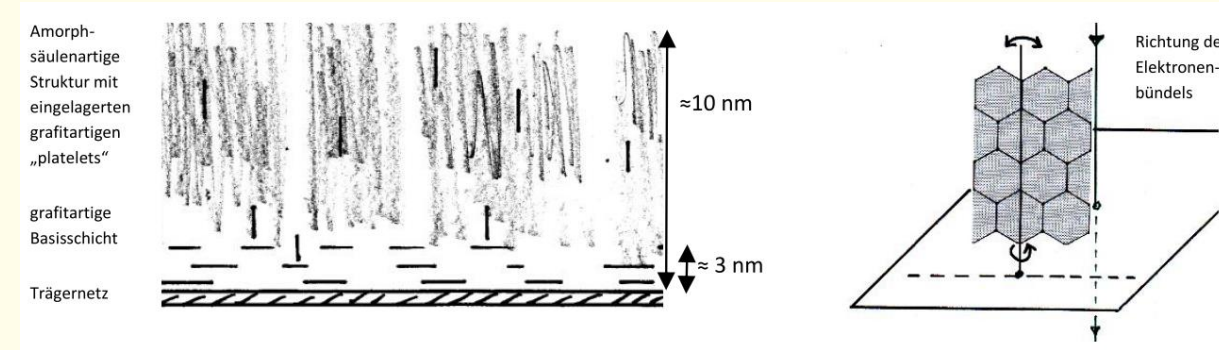


Grundlegende Eigenschaften der Wellenfunktion ψ

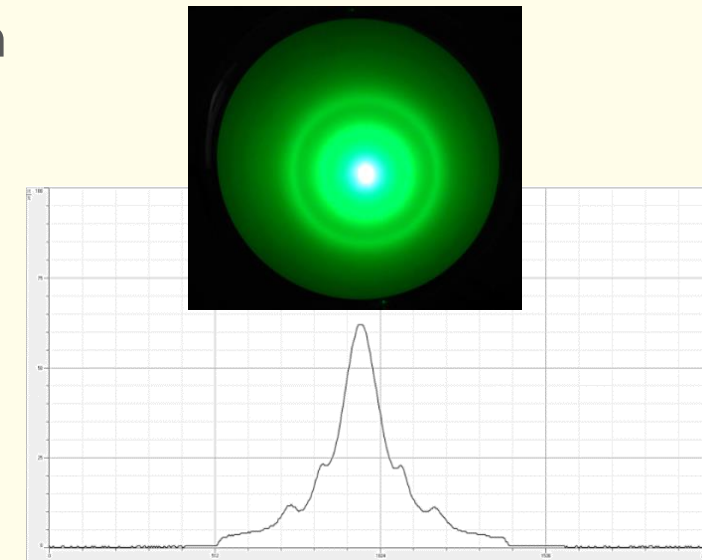
1. Die Wellenfunktion ψ bestimmt den Zustand eines Quantenobjekts eindeutig.
2. Die Wellenfunktion ψ ist im Allgemeinen komplexwertig.
3. In der Quantenphysik superponieren Zustände.
4. Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion ψ ist durch eine Differentialgleichung (z.B. die Schrödinger-Gleichung) vollständig determiniert.
5. Das Ergebnis einer Messung einer Größe an einem Quantenobjekt ist stets eindeutig. Eine direkt wiederholte Messung der gleichen Größe am selben Quantenobjekt liefert (sofern möglich) dasselbe Ergebnis.
6. Ein und derselbe Zustand eines Quantenobjekts kann zu verschiedenen Messergebnissen führen. Dabei entspricht $|\psi|^2$ der Detektionswahrscheinlichkeit.

Elektronenbeugungsröhre

- Gitter-Beugung oder Bragg-Reflexion?
- Untersuchungen von M. Rode:
 - Aufbau der Folie: Trägernetz, Basisschicht, säulenartige Struktur
 - Gitter-Beugung, Bragg-Reflexion und weitere Interferenzeffekte!
 - bisher keine Messungen, die einen Beitrag eindeutig ausschließen
- im Unterricht
 - didaktische Reduktion notwendig!
 - einfachstes Modell: Gitter-Beugung



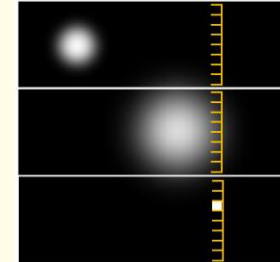
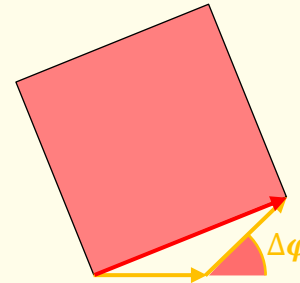
Zum Aufbau der Kohlenstoffschicht (M. Rode, [CC BY 4.0](#))



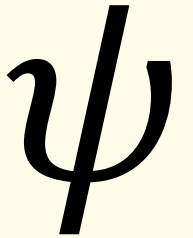
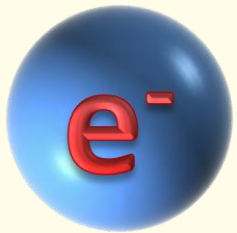
Interferenzmuster und entsprechende Intensitätsverteilung (M. Rode, [CC BY 4.0](#))

Fachdidaktische Aspekte

- Didaktische Modelle für die Wellenfunktion
 - Zeigermodell
 - Wolkenmodell
- Zustand und Messung
 - Bornsche Wahrscheinlichkeitsdeutung
 - Ensemble-Interpretation
- „Detektionswahrscheinlichkeit“
- Schülervorstellungen
 - Koexistenz von Wellen- und Teilchenmodell
 - Wahrscheinlichkeit als Ungenauigkeit
 - Bahnbegriff
 - Übergeneralisierung bei den Eigenschaften verschiedener Quantenobjekten

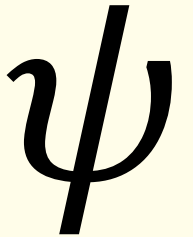
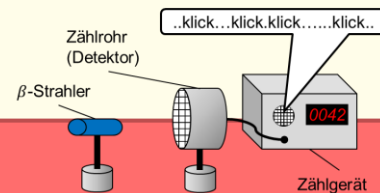
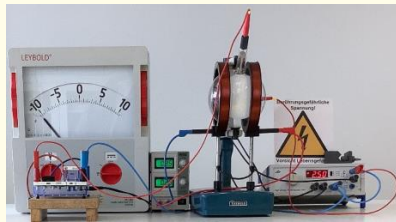


Struktur des Lernprozesses



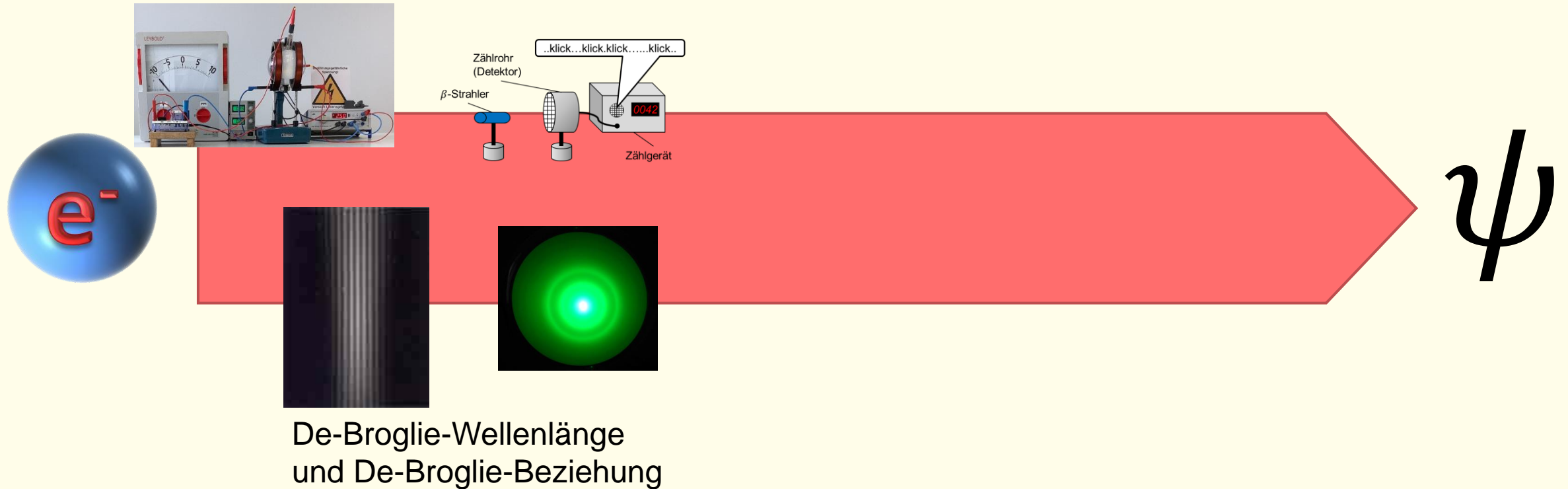
Struktur des Lernprozesses

Wiederholung und Ausblick:
Eigenschaften des Elektrons



Struktur des Lernprozesses

Wiederholung und Ausblick:
Eigenschaften des Elektrons



De-Broglie-Wellenlänge
und De-Broglie-Beziehung

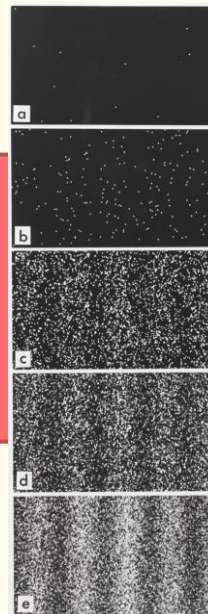
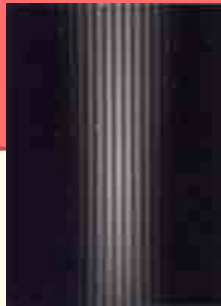
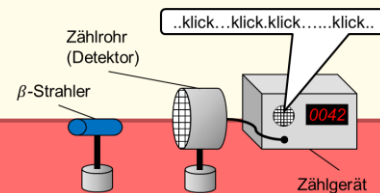
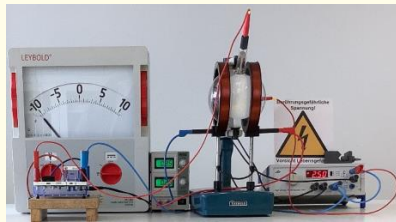
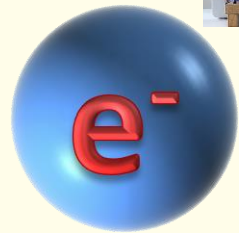
Bildquellen:

Elektron, Perrin-Röhren, Zählrohr-Versuch: C.-J. Pardall [CC BY 4.0](#); Elektronen am Doppelspalt: Prof Dr. Claus Jönsson (<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5337106>), „Claus Jönsson Interferenz“ (12.11.22); Elektronenbeugung: M. Rode [CC BY 4.0](#)

Struktur des Lernprozesses

Wiederholung und Ausblick:
Eigenschaften des Elektrons

Was bedeutet „Wellenfunktion“
in der Quantenphysik?



ψ

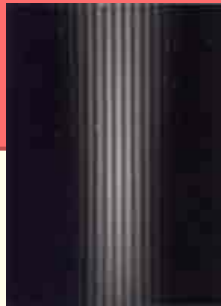
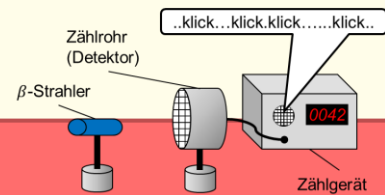
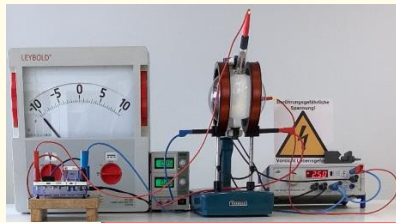
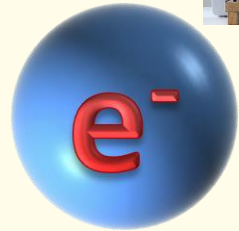
De-Broglie-Wellenlänge
und De-Broglie-Beziehung

Bildquellen:
Elektron, Perrin-Röhren, Zählrohr-Versuch: C.-J. Pardall [CC BY 4.0](#); Elektronen am Doppelspalt: Prof Dr. Claus Jönsson (<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5337106>), „Claus Jönsson Interferenz“ (12.11.22); Elektronenbeugung: M. Rode [CC BY 4.0](#); Einzelelektronen-Interferenz: user:Belsazar (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit_experiment_results_Tanamura_2.jpg), „Double-slit experiment results Tanamura 2“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (14.11.22)

Struktur des Lernprozesses

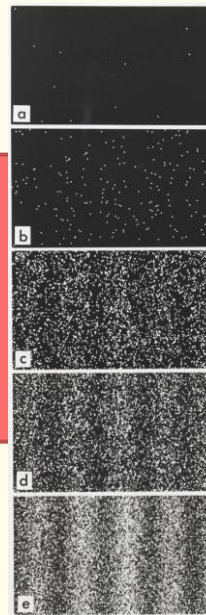
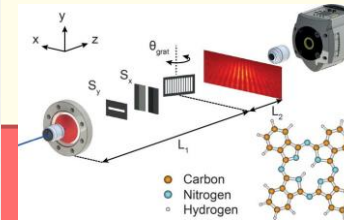
Was bedeutet „Wellenfunktion“
in der Quantenphysik?

Wiederholung und Ausblick:
Eigenschaften des Elektrons



De-Broglie-Wellenlänge
und De-Broglie-Beziehung

Weitere Quantenobjekte



ψ

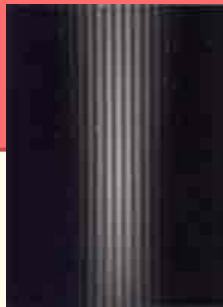
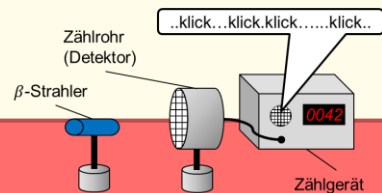
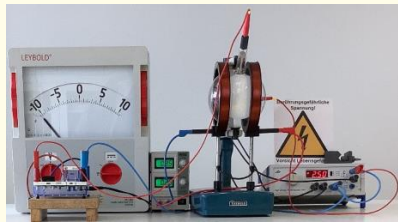
Bildquellen:

Elektron, Perrin-Röhren, Zählrohr-Versuch, C.-J. Pardall [CC BY 4.0](#); Elektronen am Doppelspalt: Prof Dr. Claus Jönsson (<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5337106>), „Claus Jönsson Interferenz“ (12.11.22); Elektronenbeugung: M. Rode [CC BY 4.0](#); Einzelelektronen-Interferenz: user:Belsazar (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit_experiment_results_Tanamura_2.jpg), „Double-slit experiment results Tanamura 2“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (14.11.22); Molekül-Interferenz: C. Brand, S. Troyer, C. Knobloch et al.: Single-, double-, and triple-slit diffraction of molecular matter waves. American Journal of Physics 89, 1132 (2021); doi: [10.1119/5.0058805](https://doi.org/10.1119/5.0058805) (16.11.22), [CC BY 4.0](#)

Struktur des Lernprozesses

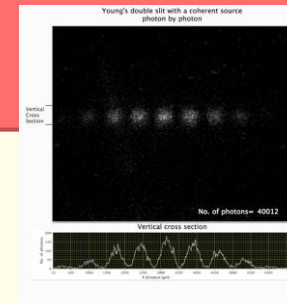
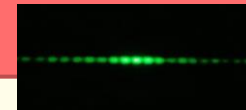
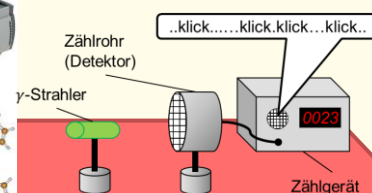
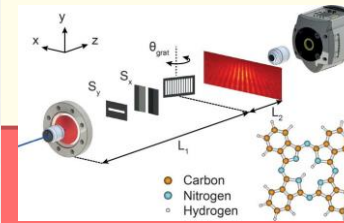
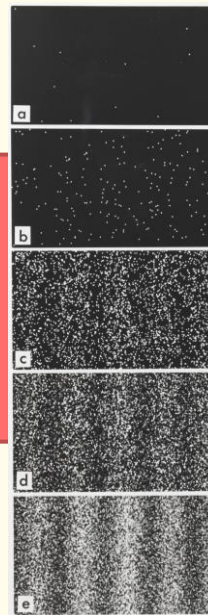
Was bedeutet „Wellenfunktion“
in der Quantenphysik?

Wiederholung und Ausblick:
Eigenschaften des Elektrons

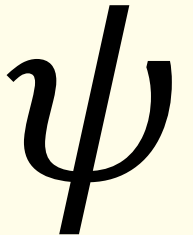


De-Broglie-Wellenlänge
und De-Broglie-Beziehung

Weitere Quantenobjekte



Photonen



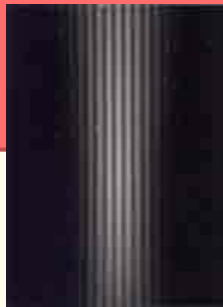
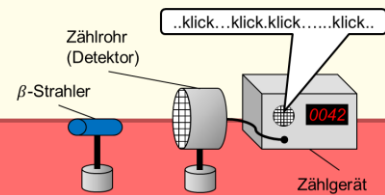
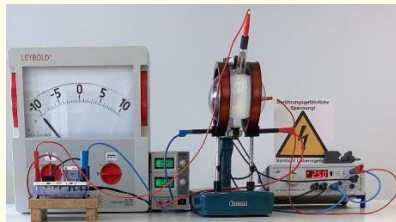
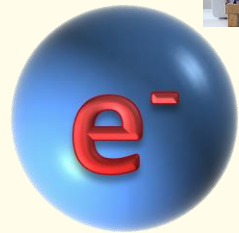
Bildquellen:

Elektron, Perrin-Röhren, Zählrohr-Versuche, Laser-Interferenzmuster: C.-J. Pardall [CC BY 4.0](#); Elektronen am Doppelspalt: Prof Dr. Claus Jönsson (<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5337106>), „Claus Jönsson Interferenz“ (12.11.22);
Elektronenbeugung: M. Rode [CC BY 4.0](#); Einzelelektronen-Interferenz: user:Belsazar (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit_experiment_results_Tanamura_2.jpg), „Double-slit experiment results Tanamura 2“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (14.11.22); Molekül-Interferenz: C. Brand, S. Troyer, C. Knobloch et al.: Single-, double-, and triple-slit diffraction of molecular matter waves. American Journal of Physics 89, 1132 (2021); doi: [10.1119/5.0058805](https://doi.org/10.1119/5.0058805) (16.11.22), [CC BY 4.0](#); Einzelphotonen: R.S. Aspden, M.J. Padgett, G.C. Spalding. Video recording true single-photon double-slit interference. American Journal of Physics 84, 671 (2016); doi: [10.1119/1.4955173](https://doi.org/10.1119/1.4955173) (20.11.22) [CC BY 4.0](#)

Struktur des Lernprozesses

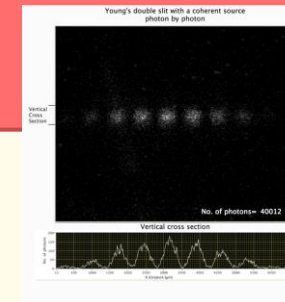
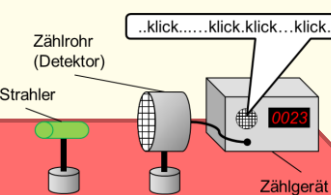
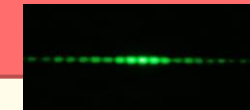
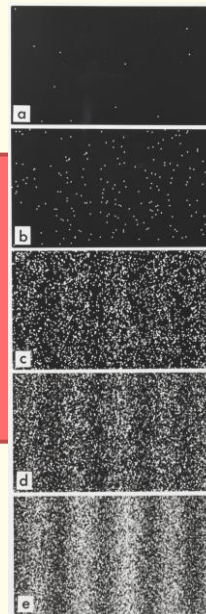
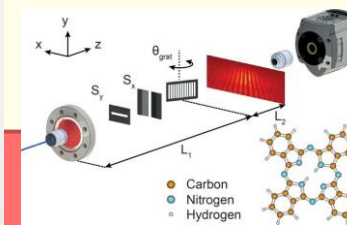
Was bedeutet „Wellenfunktion“
in der Quantenphysik?

Wiederholung und Ausblick:
Eigenschaften des Elektrons



De-Broglie-Wellenlänge
und De-Broglie-Beziehung

Weitere Quantenobjekte



Photonen

ψ

Bildquellen:

Elektron, Perrin-Röhren, Zählrohr-Versuche, Laser-Interferenzmuster: C.-J. Pardall [CC BY 4.0](#); Elektronen am Doppelspalt: Prof Dr. Claus Jönsson (<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5337106>), „Claus Jönsson Interferenz“ (12.11.22);
Elektronenbeugung: M. Rode [CC BY 4.0](#); Einzelelektronen-Interferenz: user:Belsazar (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit_experiment_results_Tanamura_2.jpg), „Double-slit experiment results Tanamura 2“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (14.11.22); Molekül-Interferenz: C. Brand, S. Troyer, C. Knobloch et al.: Single-, double-, and triple-slit diffraction of molecular matter waves. American Journal of Physics 89, 1132 (2021); doi: [10.1119/5.0058805](https://doi.org/10.1119/5.0058805) (16.11.22), [CC BY 4.0](#); Einzelphotonen: R.S. Aspden, M.J. Padgett, G.C. Spalding. Video recording true single-photon double-slit interference. American Journal of Physics 84, 671 (2016); doi: [10.1119/1.4955173](https://doi.org/10.1119/1.4955173) (20.11.22) [CC BY 4.0](#)

Beispiele für Aufgaben auf Abiturniveau

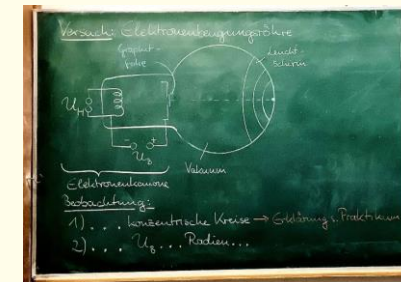
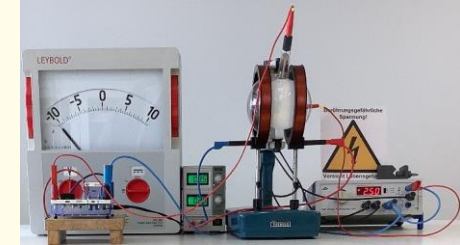
Hinweis: In den Aufgaben wird nicht explizit nach ψ gefragt, sondern nach der sich daraus ergebenden Beschreibung von Quantenobjekten.

- [IQB-Beispielaufgaben:](#)
Grundlegende Aspekte der Quantenphysik am Doppelspalt
Interferenz von Molekülen
Quantenobjekte am Doppelspalt
- [Abituraufgaben Niedersachsen:](#)
Abitur 2017 I: Interferenz mit He-Atomen
Abitur 2021 I: Elektronenbeugungsröhre
- [Abituraufgaben Bayern:](#)
Abitur 2020: Experiment von Davisson und Germer
Abitur 2021: Eigenschaften von Quantenobjekten
Abitur 2022: Doppelspaltexperiment mit Neutronen

Überblick über die Materialien zu ψ

Hintergrund und Überblick

- Die Wellenfunktion ψ in der Quantenphysik: Fachlicher und fachdidaktischer Hintergrund (4103_hintergrund_psi_wellenfunktion)
- Die Wellenfunktion ψ im Unterricht (4104_unterricht_psi_wellenfunktion)
 - Bezug zu Bildungsplan, Jahresplanung und IQB-Materialien
 - Struktur des Lernprozesses
 - mögliche Experimente
 - Hinweise zum Unterricht: Methodisches, Tafelbilder, ...

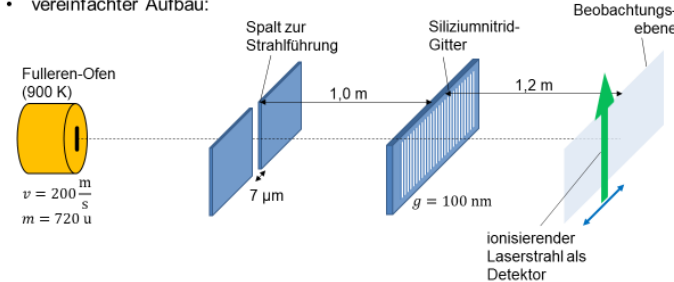


Überblick über die Materialien zu ψ

- Präsentationen für den Unterricht mit passenden AB

Weitere Quantenobjekte

- O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger: Fullere an einem Gitter, Wien 2002
- vereinfachter Aufbau:



- Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge.
- Bestimmen Sie damit den Abstand zweier benachbarter Maxima.
- Schätzen Sie begründet ab, wie breit der Laserstrahl höchstens sein darf.

Bildquelle: C.-J. Pardall
C.-J. Pardall (CC BY 4.0)

6

- weitere Materialien zur Schüleraktivierung

Eigenschaften des Elektrons

1. Sie haben im Unterricht schon verschiedene Eigenschaften des Elektrons kennen gelernt.
 - a) Fassen Sie diese Eigenschaften zusammen. Verwenden Sie hierbei insbesondere Ihre Unterlagen und das Schulbuch als Quelle.
 - b) Geben Sie zu jeder Eigenschaft ein Experiment (am besten aus dem Unterricht) an, mit dem sie nachgewiesen werden kann. Falls es eine Eigenschaft ist, die mit einem Zahlenwert verknüpft ist, beschreiben Sie, wie dieser sich aus den Messwerten bestimmen lässt.
2. a) Lesen Sie auf https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_01.html den ersten Abschnitt „1.1 Atomic Mechanics“. (Es handelt sich um die Einleitung zur Quantenphysik eines klassischen Lehrbuchs für die Universität.)
 - b) Im Text werden mehrere Eigenschaften genannt, die ein Elektron hat bzw. nicht hat. Zählen Sie die genannten Eigenschaften auf.
 - c) Vergleichen Sie diese Eigenschaften mit denen Ihnen schon bekannten (s. 1.a)).

C.-J. Pardall CC BY 4.0 1/1

Überblick über die Materialien zu ψ

- 4110_loesungshinweise_psi_wellenfunktion
- 4111_ab_eigenschaften_elektron: Arbeitsblatt zum Einstieg
- 4112_up_joensson-experiment: Unterrichtspräsentation zum Jönsson-Experiment
- 4113_ab_joensson-experiment: passendes Arbeitsblatt zu 4112
- 4114_ab_struktur_interferenzmuster: Praktikum zum Interferenzmuster bei der Elektronenbeugungsröhre
- 4115_ab_modell_bragg_gitter: Arbeitsblatt zur Modellierung bei der Elektronenbeugungsröhre (Vertiefung)
- 4116_up_psi_wellenfunktion: Unterrichtspräsentation zur Einführung von ψ (Einzelelektronen am Doppelspalt)
- 4117_ab_psi_wellenfunktion: passendes Arbeitsblatt zu 4116
- 4118_ab_born_wellenfunktion: Arbeitsblatt zur statistischen Interpretation von ψ
- 4119_ab_psi_spiel: Lernspiel zur Vernetzung
- 4120_up_weitere_quantenobjekte: Unterrichtspräsentation zu ψ bei weiteren Quantenobjekten
- 4121_ab_weitere_quantenobjekte: passendes Arbeitsblatt zu 4120
- 4122_up_em_strahlung_quantenobjekt: Unterrichtspräsentation zu Photonen als Quantenobjekten
- 4123_ab_em_strahlung_quantenobjekt: passendes Arbeitsblatt zu 4122
- 4124_up_filme_realteil_psiquadrat_musil: Unterrichtspräsentation mit animierten graphischen Darstellungen von ψ