

Lösungshinweise zu ψ

Im Folgenden handelt es sich um Lösungshinweise für die Hand der unterrichtenden Lehrkraft, nicht um vollständige Lösungen.

Die Aufgaben sind Lernaufgaben für den Einsatz im Unterricht, z.B. in Partner- oder Gruppenarbeiten. Da sie teilweise aufeinander aufbauen und nicht auf ein summatives Feedback zielen, eignen sie sich in dieser Form kaum für den Einsatz in Klassenarbeiten.

Inhalt

4111_ab_eigenschaften_elektron: Arbeitsblatt zum Einstieg	2
4112_up_joensson-experiment: Unterrichtspräsentation zum Jönsson-Experiment; 4113_ab_joensson-experiment: passendes Arbeitsblatt zu 4112	3
4116_up_psi_wellenfunktion: Unterrichtspräsentation zur Einführung von ψ (Einzelelektronen am Doppelspalt)	
4117_ab_psi_wellenfunktion: passendes Arbeitsblatt zu 4116	4
4118_ab_born_wellenfunktion: Arbeitsblatt zur statistischen Interpretation von ψ	6
4120_up_weitere_quantenobjekte: Unterrichtspräsentation zu ψ bei weiteren Quantenobjekten	
4121_ab_weitere_quantenobjekte: passendes Arbeitsblatt zu 4120.....	7
4122_up_em_strahlung_quantenobjekt: Unterrichtspräsentation zu Photonen als Quantenobjekten	
4123_ab_em_strahlung_quantenobjekt: passendes Arbeitsblatt zu 4122	10

Lösungshinweise zu ψ

4111_ab_eigenschaften_elektron: Arbeitsblatt zum Einstieg

1. Sie haben im Unterricht schon verschiedene Eigenschaften des Elektrons kennen gelernt.
 - a) Fassen Sie diese Eigenschaften zusammen. Verwenden Sie hierbei insbesondere Ihre Unterlagen und das Schulbuch als Quelle.
 - vgl. 4104_unterricht_psi_wellenfunktion
abhängig vom vorangegangenen Unterricht
 - b) Geben Sie zu jeder Eigenschaft ein Experiment (am besten aus dem Unterricht) an, mit dem sie nachgewiesen werden kann. Falls es eine Eigenschaft ist, die mit einem Zahlenwert verknüpft ist, beschreiben Sie, wie dieser sich aus den Messwerten bestimmen lässt.
 - vgl. 4104_unterricht_psi_wellenfunktion
abhängig vom vorangegangenen Unterricht
 - z.B. Fadenstrahlrohr, Millikan-Versuch, WIEN-Filter, Elementarladung, Elektronenmasse, Geschwindigkeit
2.
 - a) Lesen Sie auf https://www.feynmanlectures.caltech.edu/III_01.html den ersten Abschnitt „1-1 Atomic Mechanics“. (Es handelt sich um die Einleitung zur Quantenphysik eines klassischen Lehrbuchs für die Universität.)
 - Schüleraktivität
 - b) Im Text werden mehrere Eigenschaften genannt, die ein Elektron hat bzw. nicht hat. Zählen Sie die genannten Eigenschaften auf.
 - Teilchen- und Welleneigenschaften, aber „keines von beiden“
 - Elektronen verhalten sich wie Licht, gilt für atomare Objekte.

Lösungshinweise zu ψ

4112_up_joensson-experiment: Unterrichtspräsentation zum Jönsson-Experiment;

4113_ab_joensson-experiment: passendes Arbeitsblatt zu 4112

Erklären Sie, warum die Durchführung des Doppelspalt-Versuch mit Elektronen technisch wesentlich schwieriger ist als bei Licht.

- Notwendigkeit des Vakuums
- Notwendigkeit materiefreier Spalte
- evtl.: Was bedeutet „Wellenlänge“ und „Kohärenz“ bei Elektronen?

Stellen Sie eine begründete Hypothese zum Versuch auf.

- Individuelle Lösung,
z.B. zwei helle Flecken aufgrund des Modells des Elektrons als elektrisch geladenes Masseteilchen

1. Ein Doppelspalt-Versuch mit Elektronen wurde erstmals 1961 von Claus Jönsson in Tübingen durchgeführt. Die Abbildung zeigt einen vereinfachten Aufbau und das Versuchsergebnis:

a) Diskutieren Sie das Versuchsergebnis. Stellen Sie dabei den Bezug zu Ihrer Hypothese her.

- Interferenzerscheinung wie beim Doppelspalt bei Licht;
- Ergebnis nicht im Modell des Elektrons als elektrisch geladenes Masseteilchen erklärbar; im Widerspruch dazu zeigen Elektronen Welleneigenschaften
- Bezug zur Hypothese: individuelle Lösung

b) Berechnen Sie die Wellenlänge der Elektronen.

- Kleinwinkelnäherung: 5,4 pm

2. Elektronen verhalten beim Jönsson-Versuch wie Wellen: Sie haben eine **De-Broglie-Wellenlänge** λ_B . Die Idee, dass sich Materie wie eine Welle verhält, formulierte Louis de Broglie als Erster 1924.

a) Ein Gitter für Licht habe eine Gitterkonstante von 10 μm .

Schätzen Sie begründet ab, welche Gitterkonstante ein entsprechendes Gitter für Elektronen haben müsste.

- Bereich der Wellenlänge von Licht: 0,4 μm – 0,8 μm
- Die Gitterkonstante ist 12,5 bis 25-mal größer.
- Bei $\lambda_B = 5,4 \text{ pm}$ ergibt sich 0,0675 nm bis 0,135 nm

b) Folgern Sie daraus, wie man ein solches Elektronen-Gitter realisieren könnte.

- Atomgitter

Lösungshinweise zu ψ

4116_up_psi_wellenfunktion: Unterrichtspräsentation zur Einführung von ψ (Einzelelektronen am Doppelspalt)

4117_ab_psi_wellenfunktion: passendes Arbeitsblatt zu 4116

Vergleichen Sie die Beobachtungen beim Doppelspalt-Versuch mit Licht und Elektronen.

- **Gemeinsamkeiten:** u.a. Interferenzmuster
- **Unterschiede:** u.a. Größenordnungen, Nachweismethoden

Beschreiben Sie, wie man die Intensitätsverteilung bei Licht mit dem Zeigermodell berechnen kann.

- **Lösung entsprechend des vorangegangenen Unterrichts**

Erklären Sie, wie Ben aufgrund der Ergebnisse zu seiner Aussage kommt.

- **Teilchen:** lokalisierter Nachweis einzelner Elektronen mit dem Zählrohr
- **Wellen:** Interferenz am Doppelspalt, De-Broglie-Wellenlänge
- **Beide Modelle widersprechen sich**
- **evtl.: stochastischer Aspekt wird von der Aussage nicht berücksichtigt**

Die Arbeitsgruppe von Akiro Tonomura führte 1989 den Doppelspaltversuch mit einzelnen Elektronen durch.

Begründen Sie, dass dieser Versuch Bens Frage beantworten könnte.

- **bisher kein Nachweis einzelner Elektronen beim Doppelspalt**
- **Interferenz könnte durch die Wechselwirkung zwischen Elektronen entstehen**
- **mögliche Entscheidung zw. den beiden Modellen**

Stellen Sie eine Hypothese zum Ausgang von Tonomuras Versuch auf.

- **individuelle Lösung**

1. Fassen Sie die Beobachtungen beim Doppelspalt-Versuch mit Einzelelektronen zusammen.

- **Detektion einzelner Elektronen zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort (Lokalisation)**
- **Es ist unmöglich für ein Elektron den exakten Detektionsort vorherzusagen. Man kann nur eine Detektionswahrscheinlichkeit angeben.**
- **Die Intensität bei vielen Elektronen entspricht Detektionswahrscheinlichkeit.**
- **Das Interferenzmuster ist daher erst bei genügend vielen Detektionen sichtbar, da erst dann die relative Häufigkeit etwa der Detektionswahrscheinlichkeit entspricht.**

2. Ben sagt: „Elektronen verhalten sich manchmal wie Teilchen und manchmal wie Wellen. Wann tun sie das eine oder das andere?“

Diskutieren Sie Bens Äußerung vor dem Hintergrund der Versuchsergebnisse.

- **Beide klassischen Modelle (Teilchen bzw. Welle) sind ungeeignet, um die Beobachtungen zu erklären.**

Lösungshinweise zu ψ

- Erklärung nur möglich, wenn jedem Elektron Teilchen-, Wellen- und darüber hinausgehende Eigenschaften (stochastischer Aspekt) zugeordnet werden
- evtl.: Determiniertheit der Wellenfunktion

3. Sara sagt: „In der Quantenphysik ist alles purer Zufall.“ Lene entgegnet: „Nein, im Prinzip kann man alles exakt berechnen.“

Erläutern Sie die Aussagen von Sara und Lene. Gehen Sie dabei auch auf die Rolle der Wellenfunktion ψ ein.

- kein purer Zufall: Unmöglichkeit einer Vorhersage für einzelne Elektronen, aber Detektionswahrscheinlichkeit ist berechenbar
- keine exakte Berechenbarkeit: Determiniertheit der Wellenfunktion erlaubt die exakte Berechnung der Detektionswahrscheinlichkeit, aber mehr nicht

Lösungshinweise zu ψ

4118_ab_born_wellenfunktion: Arbeitsblatt zur statistischen Interpretation von ψ

1. a) Nennen Sie mindestens ein weiteres „bestens bekanntes experimentelles“ Ergebnis, das Schrödingers Vorschlag widerspricht.
 - Einzelelektronen am Doppelspalt
- b) Erklären Sie, welche Argumente und experimentellen Ergebnisse Schrödinger zu seinem Vorschlag führten.
 - experimentelle Ergebnisse: Interferenzerscheinungen bei Quantenobjekten
 - Argumente: Verzicht auf Teilchenvorstellung
vermeidet den Widerspruch von Teilchen- und Wellenmodell und die Determiniertheit der Wellenfunktion bleibt erhalten, d.h. es gibt nicht nur Wahrscheinlichkeitsaussagen
2. Born nutzt eine Analogie, um das Verhalten der Elektronen zu beschreiben.
 - a) Erstellen Sie eine Skizze zu dem bei der Wasserwelle beschriebenen Verhalten. Begründen Sie, wie es zu diesem Phänomen kommt.
 - Beugung (Elementarwelle, Huygenssches Prinzip, je nach Unterricht: Babinet)
 - b) Erklären Sie in eigenen Worten, was Born unter der statistischen Interpretation versteht. Gehen Sie dabei darauf ein, warum er von einem „Schwarm von Elektronen“ spricht.
 - keine Aussage über einzelne Objekte möglich
 - nur Detektionswahrscheinlichkeiten berechenbar
 - daher nur bei ausreichend großer Wiederholung Aussagen möglich
 - „Schwarm“ als Gegensatz zu Einzelobjekt
 - c) Vergleichen Sie das Verhalten der Wasserwelle und der Elektronen. Halten Sie dazu Gemeinsamkeiten und Unterschiede in einer Tabelle fest.
 - Gemeinsamkeiten: wellenartiges Verhalten (Beugung); gleiche mathematische Beschreibung (Zeiger)
 - Unterschiedliche Interpretation: Schwingung der Wasseroberfläche und Intensität vs. Detektionswahrscheinlichkeit

Lösungshinweise zu ψ

4120_up_weitere_quantenobjekte: Unterrichtspräsentation zu ψ bei weiteren Quantenobjekten

4121_ab_weitere_quantenobjekte: passendes Arbeitsblatt zu 4120

Erläutern Sie mindestens zwei Gründe, warum ein solches Experiment wesentlich schwieriger ist als z.B. mit Elektronen.

- Größere Masse, daher kleinere De-Broglie-Wellenlänge und entsprechend schwieriger nachzuweisende Interferenz
- Elektrisch neutral, daher keine Beschleunigung durch elektrische Felder möglich
- Bereitstellung von Fullerenen wesentlich schwieriger als bei Elektronen (z.B. glühelektrischer Effekt)

1. a) Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge.

- $\lambda_B = 2,7 \mu\text{m}$

b) Bestimmen Sie damit den Abstand zweier benachbarter Maxima.

- Kleinwinkelnäherung: $33 \mu\text{m}$

c) Schätzen Sie begründet ab, wie breit der Laserstrahl höchstens sein darf.

- Der Laserstrahl zeigt eine über seine Breite gemittelte Detektionshäufigkeit, d.h. er muss möglichst schmal sein.
- Wäre er so breit wie der Abstand zweier benachbarter Maxima, wären daher praktisch keine Minima und Maxima erkennbar, d.h. er muss schmäler als $33 \mu\text{m}$ sein.
- Da bei der Messung zumindest das Minimum 1. Ordnung deutlich zu erkennen ist, aber nicht auf 0 liegt, sollte die Breite erkennbar kleiner als $33 \mu\text{m}$ sein. Die Ortsauflösung (Messpunkte!) liegt bei wenigen μm , d.h. eine Breite von $5 \mu\text{m}$ bis $15 \mu\text{m}$ wäre möglich.
- Hinweis: tatsächliche effektive Breite: $8 \mu\text{m}$

2. Die Abbildung unten zeigt das Messergebnis.

a) Beurteilen Sie das Ergebnis.

- sieht aus wie Häufigkeitsverteilung mit kleinen Abweichungen von einer „glatten“ Kurve, die eine Detektionswahrscheinlichkeitsdichte darstellt und regelmäßige Maxima und Minima wie ein Interferenzmuster besitzt. Das entspricht den Erwartungen bei einer quantenphysikalischen Messung.
- Abstand zu beiden Maxima 1. Ordnung entspricht der Berechnung bei 1. b)
- keine weiteren Maxima höherer Ordnung erkennbar (2. Ordnung ansatzweise), Detektionshäufigkeit nimmt nach außen monoton ab
- Interferenztypische Verteilung und Lage der Maxima 1. Ordnung spricht für eine grundsätzlich korrekte Erklärung
- Die weiteren Beobachtungen können noch nicht erklärt werden.

Bildquellen:

Modell des C60-Moleküls: Sponk (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Buckminsterfullerene_animated.gif), „Buckminsterfullerene animated“, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode> (16.11.22)

vereinfachter Aufbau, Messwerte: C.-J. Pardall; Messwerte aus: O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger: Quantum interference experiments with large molecules. American Journal of Physics 71, 319 (2003); doi: [10.1119/1.1531580](https://doi.org/10.1119/1.1531580) (16.11.22)

Lösungshinweise zu ψ

b) Vergleichen Sie mit den Ergebnissen anderer Interferenzexperimente.

- Individuelle Lösung, mögliche sinnvolle Aspekte:
- Gitter (sinnvoller als Doppelspalt!) z.B. bei Licht: einzelne Maxima mit hoher Intensität, dazwischen praktisch nichts; Lage der Maxima ergibt sich aus der Wellenlänge und der Geometrie der Anordnung; Anzahl der Maxima abhängig von Wellenlänge und Spaltmittenabstand; Intensitätsverteilung ohne statistische Abweichung
- Gitter bei Fullerenen: kontinuierliche Häufigkeitsverteilung, eher wie bei einem Doppelspalt als bei einem Gitter; statistische Abweichungen; Lage der Maxima 1. Ordnung berechenbar; theoretisch müssten viel mehr Maxima sichtbar sein
- Doppelspalt mit Einzelspalteinfluss: Abnahme der Intensität nach außen wie bei den Fullerenen

c) Diskutieren Sie, welche Ursachen die Abweichungen haben könnten.

- auch hier individuelle Lösung, da von b) abhängig
- kontinuierliche Verteilung:
 - Breite des Fullerenstrahls: wenn nur wenige Gitterspalte getroffen werden, ergibt sich eher eine Mehrfachspaltmuster. Das ist hier aber nicht der Fall, da der Strahl mit $7\ \mu\text{m}$ (s. Zeichnung) wesentlich breiter als der Spaltmittenabstand ($100\ \text{nm}$) ist.
 - Breite des Laserstrahls: Da der Laserstrahl bei der Detektion die relative Häufigkeit über seine Breite mittelt, ergibt sich eine „verschmierte“ Verteilung, auch wenn es scharfe Maxima gäbe, d.h. das ist eine mögliche Ursache
- nur Maxima 1. Ordnung erkennbar
 - Einzelspalteinfluss: Nach dem Einzelspaltminimum 1. Ordnung müsste es wieder einen Anstieg der Detektionshäufigkeit geben. Das ist hier nicht erkennbar, könnte aber durch andere Effekte oder evtl. durch die statistischen Abweichungen verdeckt werden, die aber relativ klein erscheinen.
 - keine einheitliche Geschwindigkeit der Fullerene: Aus der damit verbundenen Verteilung der De-Broglie-Wellenlänge ergibt sich eine entsprechende Verteilung der Lage der Maxima, sodass die beobachtete Verteilung aus der Überlagerung verschiedener „scharfer“ Maxima-Lagen ergibt. Je höher die Ordnung der Maxima desto weiter liegen sie auseinander. Daher sind sie bei der Mittelung nicht mehr erkennbar Das wäre möglich.

3. Die Abbildung zeigt die Geschwindigkeitsverteilung der C_{60} -Moleküle.

a) Erklären Sie, warum diese Geschwindigkeitsverteilung das Interferenzmuster teilweise „verschwinden“ lässt.

- s. Lösung 2. c), letzter Punkt

Ein verbesserter Aufbau führt zu den darunter dargestellten Messwerten.

b) Bestimmen Sie aus der Intensitätsverteilung die Geschwindigkeit der C_{60} -Moleküle.

- Aus dem Diagramm: Abstand zweier benachbarter Maxima: ca. $45\ \mu\text{m}$
- $\lambda_B = 3,75\ \text{pm}$
- $v = 147\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Lösungshinweise zu ψ

c) Ben fragt: „Wenn der Durchmesser eines C_{60} -Moleküls etwa 1 nm ist, woher weiß es dann, dass es durch ein Gitter fliegt?“ Antworten Sie ihm.

- Die Wellenfunktion des Moleküls ist entscheidend: Ist sie für mehrere Spalte nicht 0, kommt es zur Superposition und es „weiß“, dass es sich um ein Gitter handelt.
- Zum einen sind Ort und Durchmesser zwei unterschiedliche Messgrößen. Durch die Wellenfunktion ist der Ort hier nicht eindeutig bestimmt. Zum anderen ergibt sich der Durchmesser des Moleküls auch nur durch Messung.

Erklären Sie, warum man die Interferenz bei immer größeren Molekülen nachweisen möchte.

- abhängig vom vorausgehenden Unterricht
- Gibt es eine prinzipielle Grenze zwischen Quantenobjekten mit kleiner Masse und „klassischen“ Objekten mit großer Masse?
- Bis zu welcher Grenze lässt sich die Kohärenz aufrecht erhalten?
- technische Weiterentwicklung: Interferenz bei immer kleineren De-Broglie-Wellenlängen

4. Eine weitere Arbeitsgruppe aus Wien untersuchte 2021 die Beugung an einem drehbaren Gitter bei dem Farbstoff Phthalocyanin ($m = 515$ u).

a) Beschreiben Sie den Versuchsaufbau und die Intensitätsverteilungen. Gehen Sie auf den Drehwinkel ein.

- Moleküle werden ausgelöst; durch die beiden Spalte nur Moleküle mit entsprechender Flugrichtung ausgewählt; passieren das drehbare Gitter; Ortsdetektion auf einem Schirm orthogonal zur „optischen“ Achse
- Drehwinkel 0° : eng beieinander liegende Maxima ($\Delta d \approx 15 \mu\text{m}$), nur bis 1. Ordnung erkennbar, fast keine Trennung der Maxima, starke Abnahme der Verteilung nach außen
- Drehwinkel 40° : Abstand der Maxima etwas größer ($\Delta d \approx 20 \mu\text{m}$), größere Ordnungen (bis 5.) erkennbar, bessere Trennung der Maxima, weniger starke Abnahme nach außen
- Drehwinkel 60° : Abstand der Maxima noch größer ($\Delta d \approx 30 \mu\text{m}$), Ordnungen bis zum Rand des Schirms erkennbar, noch bessere Trennung der Maxima, noch schwächere Abnahme nach außen
- Erklärung (nicht gefordert!): Durch die Drehung nehmen der effektive Spaltmittenabstand und die effektive Spaltbreite ab.

b) Erklären Sie, warum die Maxima im Interferenzmuster im unteren Teil des Schirms weiter auseinander liegen.

- größerer Abstand \rightarrow größere De-Broglie-Wellenlänge \rightarrow kleinere Geschwindigkeit (vgl. Beschriftung in der Abb.)
- kleinere Geschwindigkeit \rightarrow längere Flugzeit \rightarrow längere Einwirkung der Gewichtskraft \rightarrow größere Abweichung nach unten
- genauere Erklärung: Beim Auslösen der Moleküle fliegen diese mit unterschiedlichen Geschwindigkeitsbeträgen in verschiedene Richtungen. Durch den ersten Kollimationsspalt treten Moleküle mit entsprechender Flugkurve: Je steiler die anfängliche Richtung nach oben weist, desto kleiner muss die Anfangsgeschwindigkeit sein, damit dies gelingt. Anschließend fallen genau diese Moleküle weiter nach unten

Lösungshinweise zu ψ

4122_up_em_strahlung_quantenobjekt: Unterrichtspräsentation zu Photonen als Quantenobjekten

4123_ab_em_strahlung_quantenobjekt: passendes Arbeitsblatt zu 4122

Erläutern Sie, warum die beiden Versuchsergebnisse widersprüchliche Aussagen über elektromagnetische Strahlung nahelegen.

- Interferenz am Doppelspalt: Welleneigenschaften
- Detektion der Gamma-Strahlung mit dem Zählrohr: Teilcheneigenschaften und stochastischer Aspekt

Ein Physiklehrer sagt: „Wenn elektromagnetische Strahlung aus Quantenobjekten besteht, gibt es diesen Widerspruch nicht.“ Erklären Sie diesen Satz.

- Quantenobjekte zeigen Wellen- und Teilcheneigenschaften und verhalten sich bei Nachweis stochastisch.

Geben Sie begründet ein Experiment an, mit dem man untersuchen kann, ob elektromagnetische Strahlung aus Quantenobjekten besteht.

- Doppelspalt-Experiment mit sehr geringer Intensität und entsprechendem Detektor

Auch elektromagnetische Strahlung besteht aus Quantenobjekten, den Photonen.

1. Vergleichen Sie die Eigenschaften von Photonen mit denen anderer Quantenobjekte wie Elektronen oder Neutronen. Gehen Sie auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede ein.

- Gemeinsamkeiten: zeigen Wellen- und Teilcheneigenschaften (Interferenzfähigkeit, Lokalisation bei der Messung, stochastisches Verhalten); werden durch eine Wellenfunktion (Zeiger) beschrieben; haben Wellenlänge, Impuls, Energie (Frequenz wird bei massebehafteten Quantenobjekten selten betrachtet)
- Unterschiede:
Photonen haben keine Masse, sind Teil des elektromagnetischen Feldes; können polarisiert werden; bewegen sich immer mit Lichtgeschwindigkeit; für sie gilt $c = \lambda \cdot f$
Elektronen usw. haben Masse, sind kein Teil eines „Feldes“ (im Rahmen des in der Schule betrachteten Modells); können beschleunigt werden; für sie gilt $c = \lambda \cdot f$ nicht