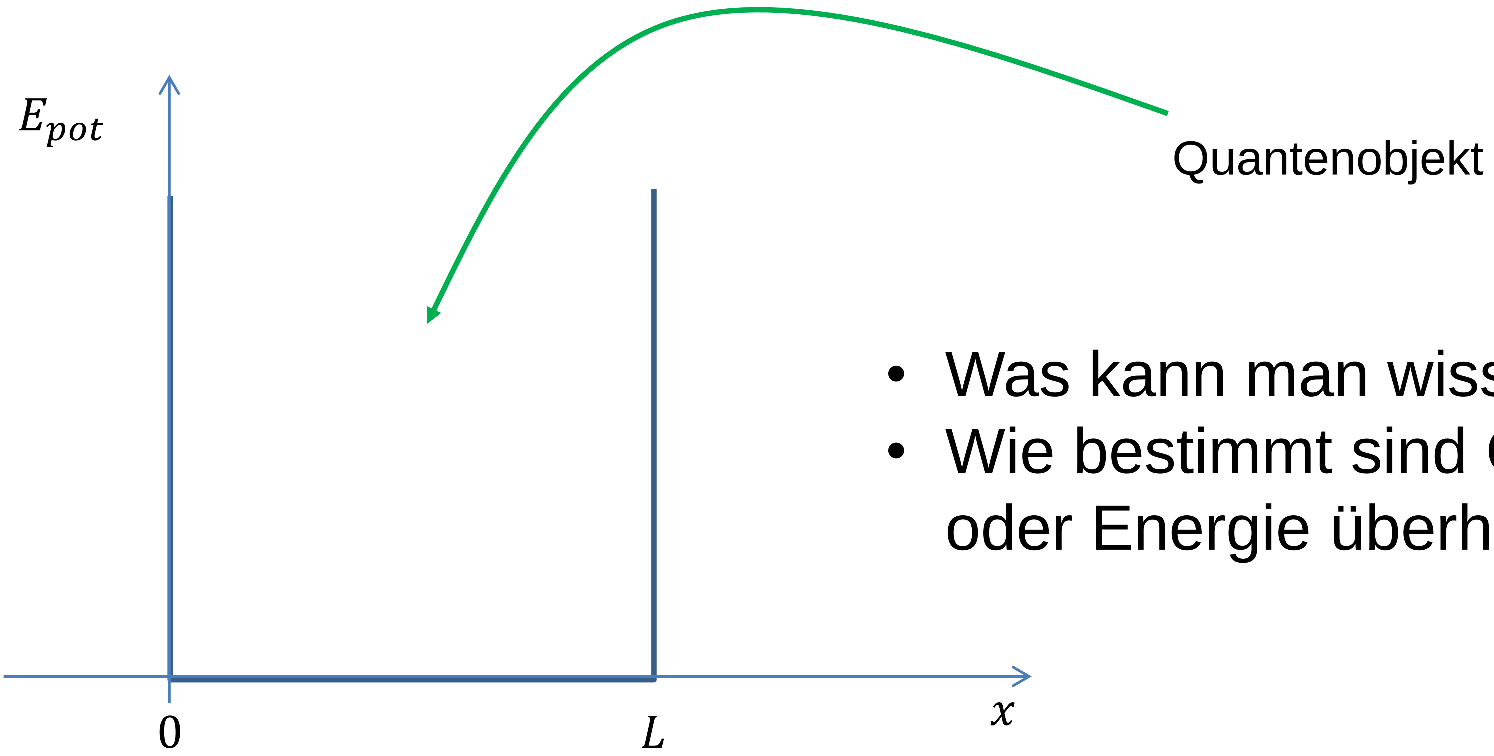
Lösungen für den unendlich hohen eindimensionalen Potentialtopf

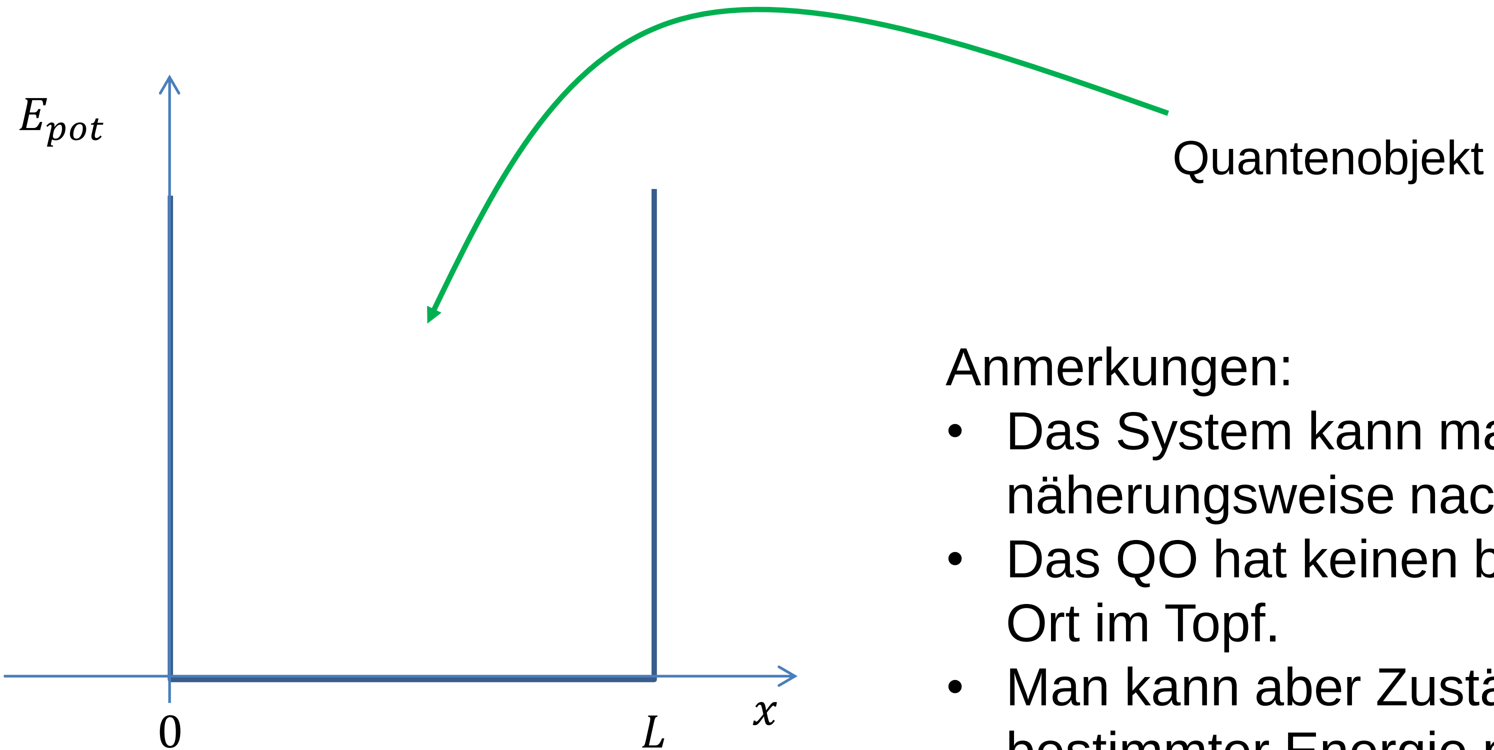
Hergeleitet aus der Schrödingergleichung

Das Quantenobjekt im unendlich hohen eindimensionalen Potentialtopf



- Was kann man wissen?
- Wie bestimmt sind Ort oder Energie überhaupt?

Das Quantenobjekt im unendlich hohen eindimensionalen Potentialtopf



Anmerkungen:

- Das System kann man nur näherungsweise nachbauen.
- Das QO hat keinen bestimmten Ort im Topf.
- Man kann aber Zustände mit bestimmter Energie präparieren.

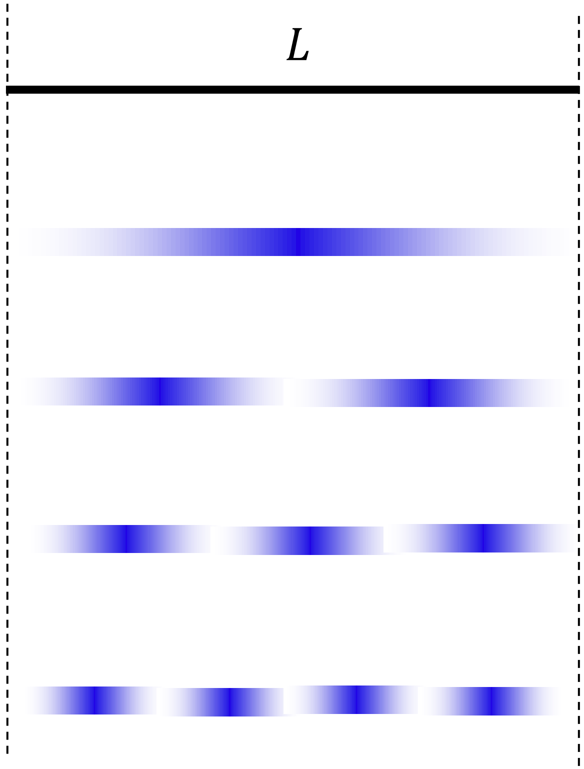
Zeitunabhängige Zustände: Stationäre *P*-Wolken und Energien

Anmerkung: Die Dimension nach oben/unten gibt es nur, weil man eine Linie mit Dicke 0 nicht sehen würde.

Lösung 1: große Nachweiswahrscheinlichkeit in der Mitte.
Geringe Nachweiswahrscheinlichkeit zu den Enden hin.

Lösung 2: Nachweiswahrscheinlichkeit 0 in der Mitte!
Große Nachweiswahrscheinlichkeiten in der Mitte der beiden Hälften.
Geringe Nachweiswahrscheinlichkeit zu den Enden hin.

Zeitunabhängige Zustände:
Stationäre *P*-Wolken und Energien



Lösung 1: ohne Knoten, kleinste Energie

Lösung 2: Ein Knoten, größere Energie

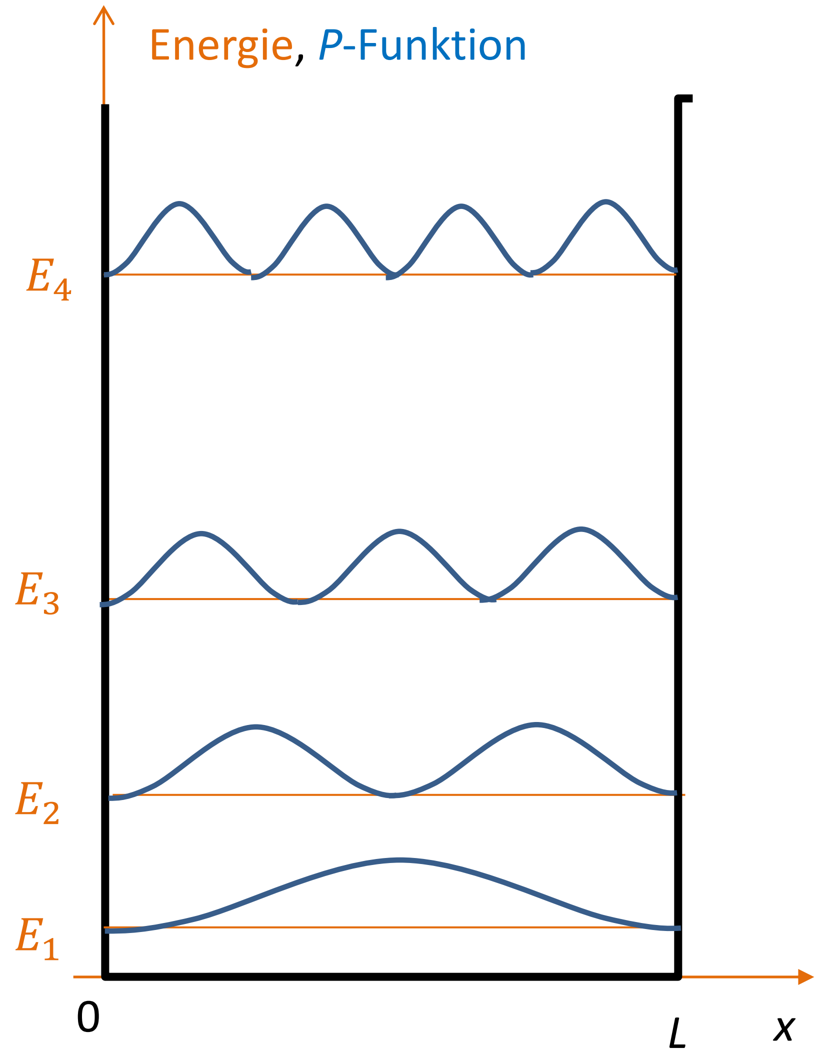
Lösung 3: Zwei Knoten, noch größere Energie

Lösung 4: Drei Knoten, noch größere Energie

usw.   usw.

Modell: Abschnüren eines länglichen Luftballons.
Offensichtlich erfordert jedes weitere Abschnüren Energie.

Zeitunabhängige Zustände: *P*-Funktionen und Energien



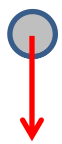
Kann man diese Lösungen vorhersagen?

Ja, mit der Schrödingergleichung!

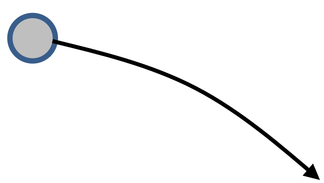
Zum Vergleich: Newtons Bewegungsgleichung

Situation:
Wirkende Kräfte

$$F = m \cdot a$$



$$v(t)$$



Bewegung

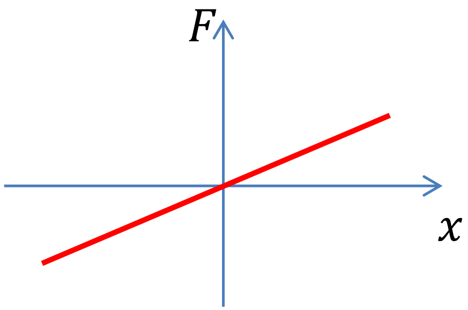
$$s(t)$$

Newton anders geschrieben

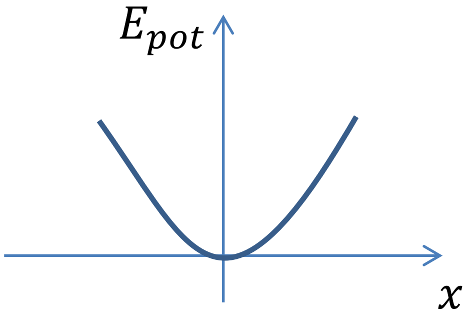
$$F = m \cdot a$$

$$F = m \cdot \ddot{s}$$

$$F = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$



$$\frac{d}{dx} E_{pot} = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$



Die Schrödingergleichung

ist die Bewegungsgleichung für Quantenobjekte

Situation → Schrödingergleichung

beschrieben durch E_{pot}-Funktionen

Schrödingergleichung ↓ $\Psi(x, y, z, t)$

beschreibt zeitliche Entwicklung

$\Psi(x, y, z, t)$ ← Messung

lässt kollabieren

$\Psi(x, y, z, t)$ ↓ $|\Psi(x, y, z, t)|^2$

$|\Psi(x, y, z, t)|^2$

kann mit Messungen verglichen werden

Die Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+E_{pot}(x,y,z)\right]\Psi(x,y,z,t)=\frac{ih}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,z,t)$$

Wie bei der Wellengleichung

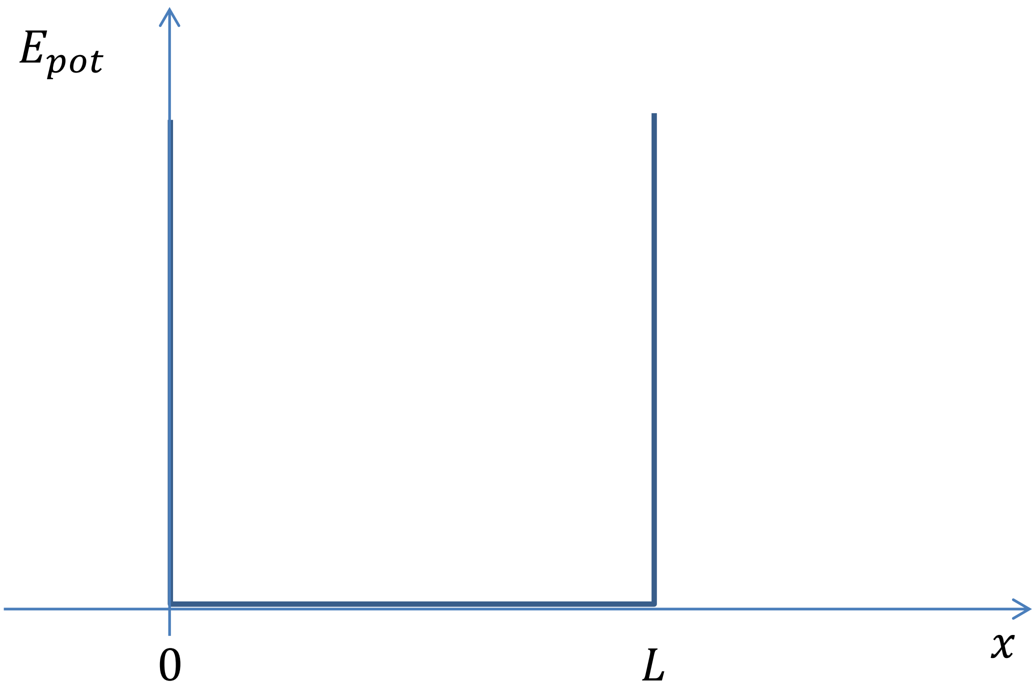
Situation/ „Kräfte“

Gesuchte Funktion

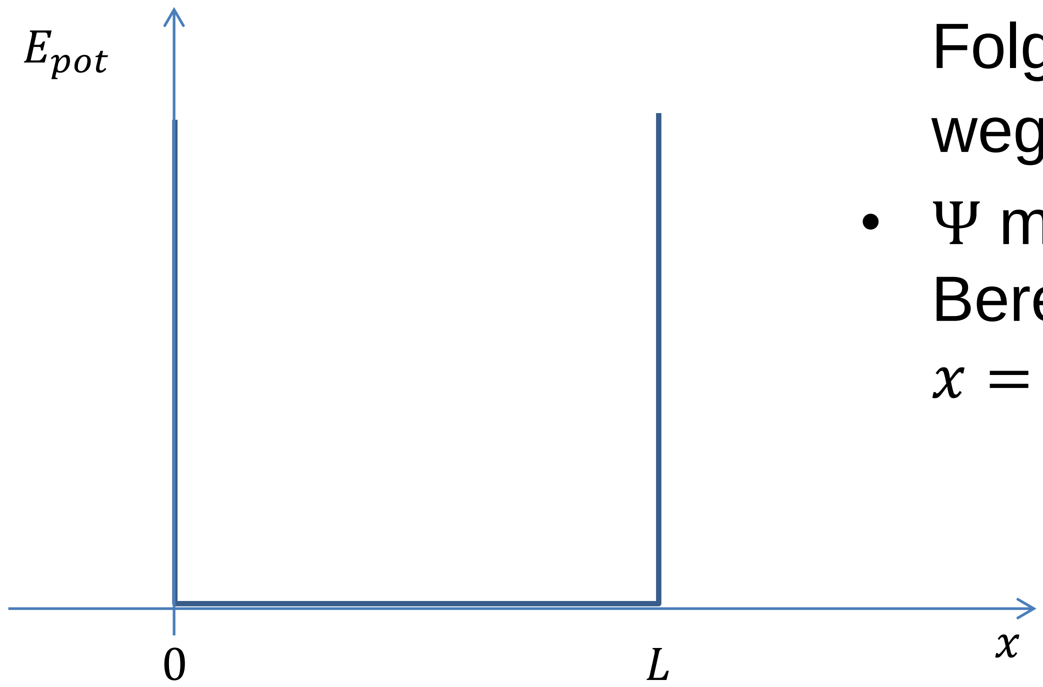
verändert sich i.a. mit der Zeit

Der unendlich hohe eindimensionale Potentialtopf

$$\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+E_{pot}(x,y,z)\right]\Psi(x,y,z,t)=\frac{ih}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,z,t)$$



Der unendlich hohe eindimensionale Potentialtopf



- Für $0 < x < L$ ist $E_{pot} = 0$. Folge: Der E_{pot} -Term fällt weg in der SG.
- Ψ muss außerhalb des Bereichs und für $x = 0$ *und* $x = L$ gleich 0 sein.

Die Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\cdot\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]\Psi(x,t)=\frac{ih}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

Wie für das Elektron im Atom kann man
auch beim Topf Lösungen finden,
deren $|\Psi(x,t)|^2$ nicht von der Zeit abhängt,
man bekommt hier also ein $|\Psi(x)|^2$.
Dazu löst man die zeitunabhängige Schrödingergleichung.

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\cdot\Psi''(x)=E\ \cdot\Psi(x)$$

Dabei ist E die Energie des Quantenobjekts im Potentialtopf.
Sie hat für jede Lösung $\Psi(x)$ einen anderen Wert.

Die Differentialgleichung

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\cdot\Psi''(x) = E_n \cdot\Psi(x)$$

Das kannst du auch!

Suche Funktionen $\Psi(x)$, die zwei Bedingungen erfüllen:

- Sie erfüllen obige Gleichung.
- Sie sind für für $x = 0$ und $x = L$ gleich 0.

Tipp 1:
Schreibe noch einmal auf, wie wir die Gleichung
$m \cdot s''(t) = -D \cdot s(t)$ gelöst haben.

Tipp 2:
Schreibe noch einmal die Lösungen
für eine stehende Welle mit zwei festen Enden auf.

Lösungsweg/gestufte Hinweise

Wir suchen also Funktionen die zweimal abgeleitet wieder sie selbst mal einer negativen Konstanten ergeben.

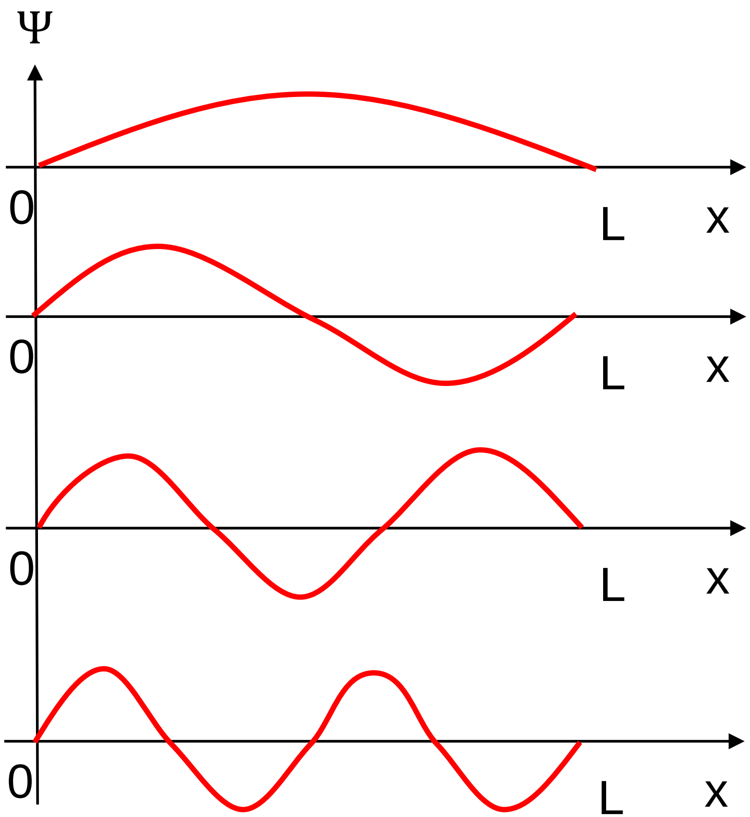
Dazu gehören z.B. Sinus- und Cosinus-Funktionen. Davon sind nur die Sinus-Funktionen für $x = 0$ gleich 0.

$$\Psi(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$$

Damit sie auch für $x = L$ gleich 0 sind, muss L ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein: $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$; mit $n = 1; 2; 3;$ ...

Zwischenergebnis

Wir bekommen also für die Ψ-Funktionen die Sinusfunktionen:



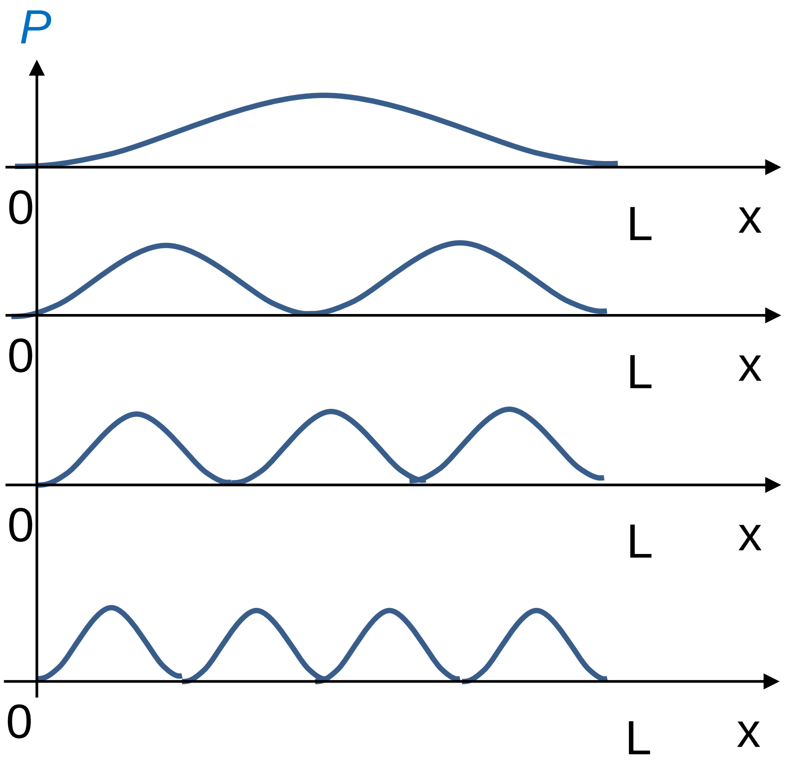
$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$n = 1; 2; 3; ...$$

Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung erfüllen nicht das Superpositionsprinzip

Zwischenergebnis

Die Betragsquadrate ergeben die *P*-Funktionen.



Können wir auch
die Energien
der einzelnen
Zustände vorhersagen?

Lösungsweg/gestufte Hilfen

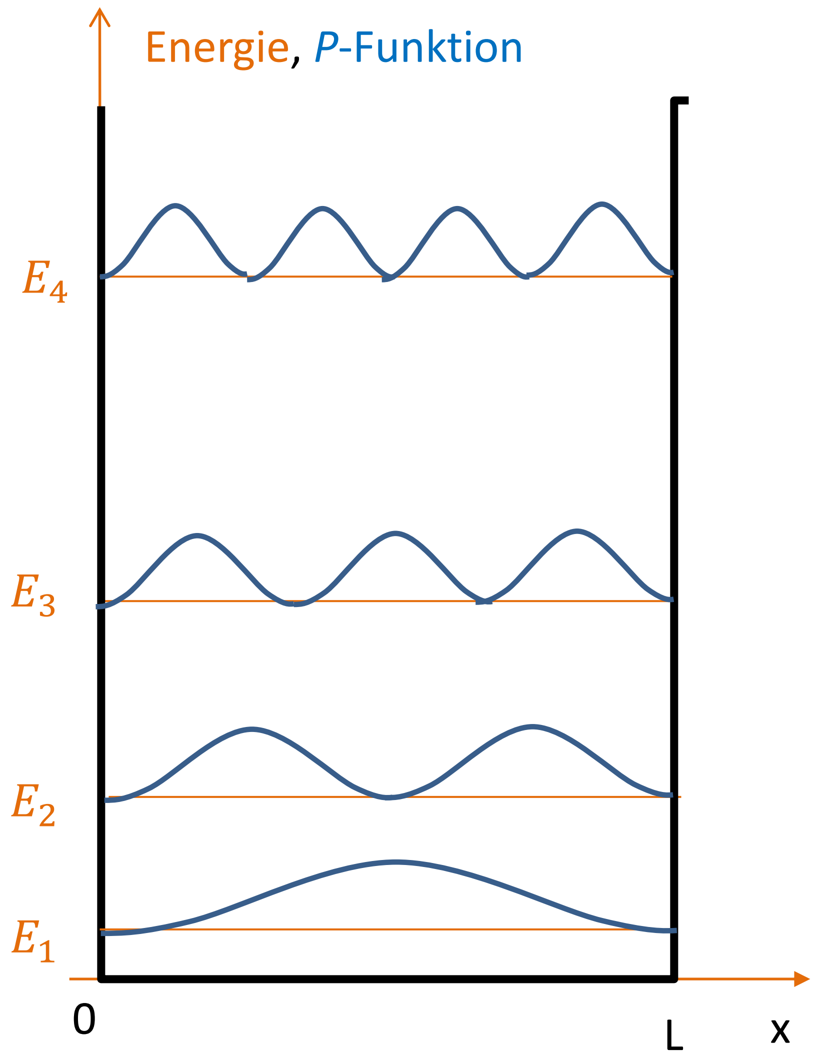
Die zweite Ableitung ergibt den Faktor $-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$

Aus der Differentialgleichung $-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \Psi''(x) = E_n \cdot \Psi(x)$

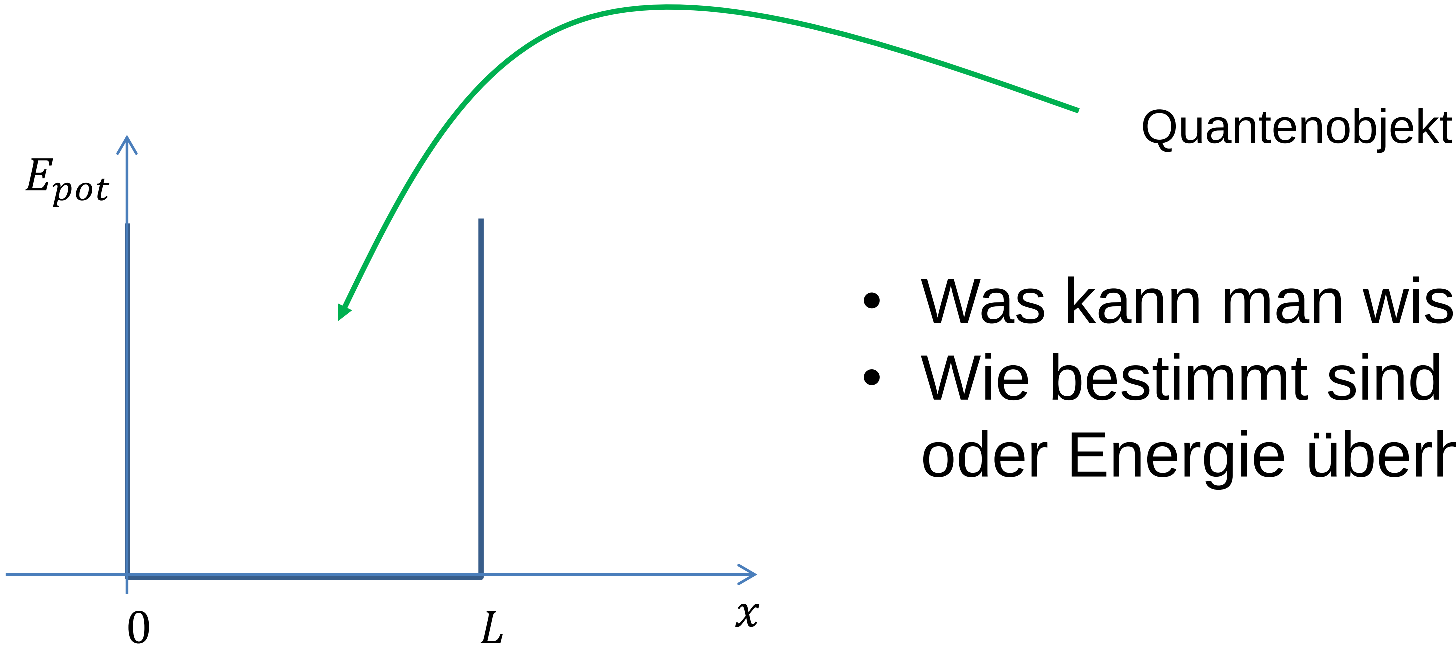
folgt damit: $\frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = E_n$

Mit $\lambda = \frac{2L}{n}$ erhält man: $E_n = \frac{h^2}{8\, m\, L^2} \cdot n^2$ mit $n = 1; 2; 3; ...$

Zeitunabhängige Zustände: *P*-Funktionen und Energien



Das Quantenobjekt im unendlich hohen eindimensionalen Potentialtopf



- Was kann man wissen?
- Wie bestimmt sind Ort oder Energie überhaupt?

- Antwort: Für diese Lösungen ist die Energie bestimmt und der Ort unbestimmt.
- Anmerkung: Es gibt auch Zustände, deren Energie unbestimmt ist und erst durch eine Messung einen bestimmten Wert erhält.