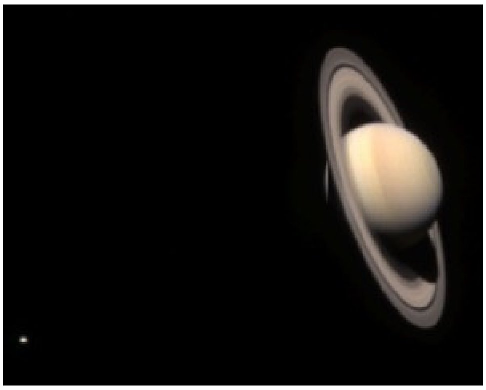
Aufgaben zum Keplerumlauf (WiS!-Material zu SuW 9/2005)
(siehe: http://www.wissenschaft-schulen.de/artikel/785398)

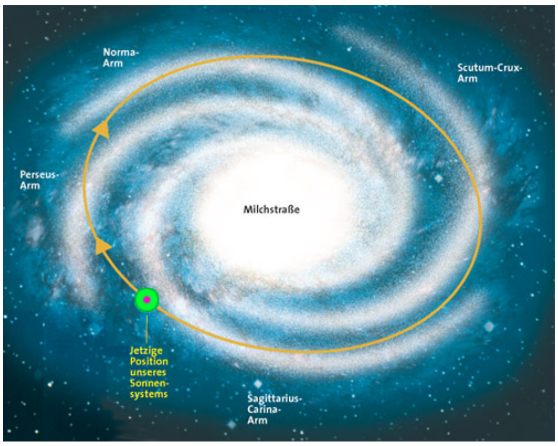
1.) Wie lang wäre ein Jahr, wenn die Sonne die vierfache Masse hätte? Welche Abstände müssten die Erde und die anderen solaren Planeten haben, wenn sie bei unveränderten Umlaufzeiten um eine Sonne von vierfacher Masse kreisen würden?

2.) Gegeben sind die Umlaufzeit des Jupitermonds Io (T=1,769 d) und der mittlere Abstand Jupiter-Io (r=421300 km). Diesen Werten kann man sich übrigens durch eigene Beobachtungen mit einem Fernrohr gut annähern. Man bestimme aus dem Umlauf von Io die Masse von Jupiter.

3.) Aus dem Durchmesser von Saturn (ca. 120.000 km) und der Kenntnis der Dichte von Jupiter (1.326 kg/m³) könnte man die Masse von Saturn bestimmen, wenn man davon ausgehen würde, dass beide Planeten ähnlich zusammengesetzt sind. Man bestimme die Masse von Saturn auf diese Weise und vergleiche sie mit der Masse, die sich aus dem Keplerumlauf des Saturnmondes Titan (Umlaufzeit T=15,945d, mittlerer Abstand Saturn-Titan r=1.221.850 km) ergibt. Das Ergebnis ist zu diskutieren!



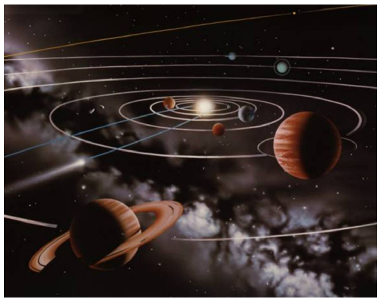
4.) Die Sonne läuft mit einer aus Beobachtungen abgeleiteten Geschwindigkeit von etwa 200 km/s in 8,5 kpc Entfernung um das Zentrum des Milchstraßensystems. Beobachtungen der sichtbaren Materie erbrachten, dass sich innerhalb der Sonnenbahn etwa 50 Mrd Sonnenmassen befinden.
Vergleichen Sie die aus Beobachtungen abgeleitete Umlaufgeschwindigkeit mit der, die notwendig ist, damit die Sonne auf einer Kreisbahn um die eingeschlossene Masse umläuft.



Wie lange dauert ein „galaktisches Jahr“? Bemerkungen: Die innerhalb der Sonnenbahn eingeschlossene Masse kann als zentrale Punktmasse betrachtet werden. Die außerhalb der Sonnenbahn befindliche Masse bleibt ohne Wirkung.

Aufgaben zum Keplerumlauf - Lösungen

1.) Wie lang wäre ein Jahr, wenn die Sonne die vierfache Masse hätte? Welche Abstände müssten die Erde und die anderen solaren Planeten haben, wenn sie bei unveränderten Umlaufzeiten um eine Sonne von vierfacher Masse kreisen würden?



<u>Geg.:</u> Sonnenmasse $M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg
Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}}$
siderisches Jahr (360°-Umlauf) $T_S = 3{,}1558 \cdot 10^7$ s
mittlerer Abstand Sonne-Erde $r_S = 1$ AE $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

<u>Ges.:</u> andere siderische Jahreslänge T in „normalen" siderischen Jahren

<u>Lös.:</u> Annahmen: Betrachtung im Mittelpunktssystem der Sonne, d. h. Vernachlässigung der Erdmasse (im 3. keplerschen Gesetz erscheint dann nur die Zentralkörpermasse), Kreisbahnumlauf der Erde

$$F_{\mathrm{Grav}} = F_{\mathrm{Zentri}} \quad \rightarrow \quad \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Mit $v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$ und $M = 4 \cdot M_S$: $\quad \dfrac{2\pi \cdot r}{T} = \sqrt{\dfrac{\gamma \cdot 4 \cdot M_S}{r}}.$

Mit $r = r_S$: $\quad T = \sqrt{\dfrac{1}{4}} \cdot \sqrt{\dfrac{4\pi^2 \cdot r_S^3}{\gamma \cdot M_S}},$

$$T = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^3}{6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1} m^3\, s^{-2}} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}1558 \cdot 10^7\,\mathrm{s} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot T_S}}.$$

Wenn die Sonne die vierfache Masse hätte, würde sich die Umlaufzeit der Erde halbieren.

Mit $T = T_S$: $\quad r = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{\gamma \cdot M_S \cdot T_S^2}{4\pi^2}},$

$$r = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1} m^3\, s^{-2}} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot (3{,}1558 \cdot 10^7\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}}$$

$$\approx \sqrt[3]{4} \cdot 1{,}4959 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \approx \underline{\underline{1{,}6 \cdot r_S}}.$$

Bei gleich bleibenden Umlaufzeiten müssten sich die Abstände der Planeten um den Faktor von ca. 1,6 vergrößern.

2.) Gegeben sind die Umlaufzeit des Jupitermonds Io (T=1,769 d) und der mittlere Abstand Jupiter-Io (r= 21300 km). Diesen Werten kann man sich übrigens durch eigene Beobachtungen mit einem Fernrohr gut annähern. Man bestimme aus dem Umlauf von Io die Masse von Jupiter.

Geg.: Siderische Umlaufzeit von Io (360°-Umlauf) $T = 1{,}769$ d
mittlerer Abstand Jupiter-Io $r = 421300$ km
Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{kg^{-1}\ m^3\ s^{-2}}$

Ges.: Jupitermasse M

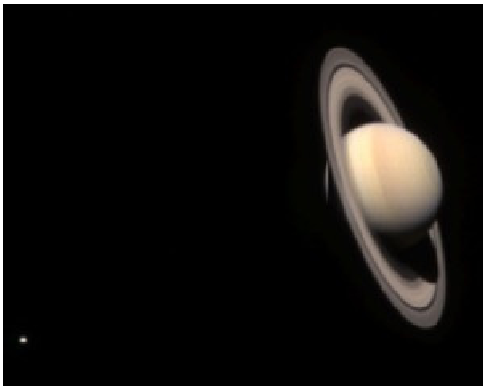
Lös.: Annahmen: Betrachtung im Mittelpunktssystem von Jupiter,
d. h. Vernachlässigung der Masse von Io, Kreisbahnumlauf von Io

$$F_{\mathrm{Grav}} = F_{\mathrm{Zentri}} \quad \rightarrow \quad \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Mit $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ erhält man das 3. keplersche Gesetz $\frac{\gamma}{4\pi^2} \cdot M = \frac{r^3}{T^2}$.

$$M = \frac{r^3}{T^2} \cdot \frac{4\pi^2}{\gamma} = \frac{(4{,}213 \cdot 10^8\,\mathrm{m})^3}{(1{,}769 \cdot 86400\,\mathrm{s})^2} \cdot \frac{4\pi^2}{6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1} m^3\ s^{-2}}} \approx \underline{\underline{1{,}9 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg.}}}$$

3.) Aus dem Durchmesser von Saturn (ca. 120.000 km) und der Kenntnis der Dichte von Jupiter (1,326 kg/m³) könnte man die Masse von Saturn bestimmen, wenn man davon ausgehen würde, dass beide Planeten ähnlich zusammengesetzt sind. Man bestimme die Masse von Saturn auf diese Weise und vergleiche sie mit der Masse, die sich aus dem Keplerumlauf des Saturnmondes Titan (Umlaufzeit T=15,945d, mittlerer Abstand Saturn-Titan r=1.221.850 km) ergibt. Das Ergebnis ist zu diskutieren!



Geg.: mittlere Dichte von Jupiter $\rho = 1.326\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$
Radius von Saturn $R = 60.000$ km
Siderische Umlaufzeit von Titan $T = 15{,}945$ d
mittlerer Abstand Saturn-Titan $r = 1.221.850$ km
Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{kg^{-1}\ m^3\ s^{-2}}$

Ges.: Saturnmassen M_{Dichte} und M_{Kepler}

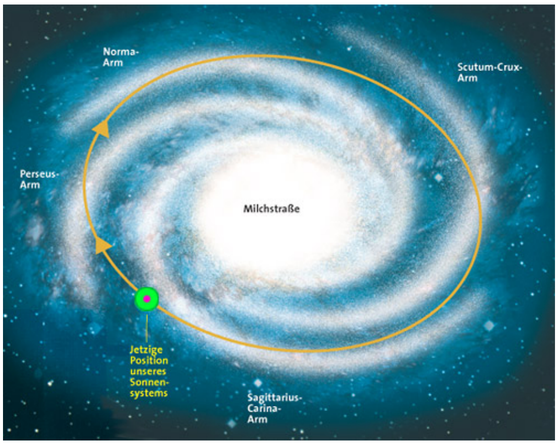
Lös.: Annahmen: Saturn als Kugel, Betrachtung im Mittelpunktssystem von Saturn,
d. h. Vernachlässigung der Masse von Titan, Kreisbahnumlauf von Titan

$$M_{\mathrm{Dichte}} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(60 \cdot 10^6\right)^3 \cdot 1.326\,\mathrm{kg\ m^{-3}} \approx \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg.}}}$$

$$M_{\mathrm{Kepler}} = \frac{r^3}{T^2} \cdot \frac{4\pi^2}{\gamma} = \frac{(1{,}22185 \cdot 10^9\,\mathrm{m})^3}{(15{,}945 \cdot 86400\,\mathrm{s})^2} \cdot \frac{4\pi^2}{6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1} m^3 s^{-2}}} \approx \underline{\underline{6 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg.}}}$$

Die Bestimmung der Masse von Saturn, basierend auf der Annahme einer Dichte, die der von Jupiter entspricht, führt zu einem um den Faktor 2 falschen Ergebnis. Die Keplerbewegung von Titan zeigt die wahre Masse an.

4.) Die Sonne läuft mit einer aus Beobachtungen abgeleiteten Geschwindigkeit von etwa 200 km/s in 8,5 kpc Entfernung um das Zentrum des Milchstraßensystems. Beobachtungen der sichtbaren Materie erbrachten, dass sich innerhalb der Sonnenbahn etwa 50 Mrd Sonnenmassen befinden.



Vergleichen Sie die aus Beobachtungen abgeleitete Umlaufgeschwindigkeit mit der, die notwendig ist, damit die Sonne auf einer Kreisbahn um die eingeschlossene Masse umläuft.
Wie lange dauert ein „galaktisches Jahr“?
Bemerkungen: Die innerhalb der Sonnenbahn eingeschlossene Masse kann als zentrale Punktmasse betrachtet werden. Die außerhalb der Sonnenbahn befindliche Masse bleibt ohne Wirkung.

Geg.:

Radius Sonnenbahn	$r = 8{,}5$ kpc
Bahngeschwindigkeit der Sonne (beobachtet)	$v_{\text{beob}} = 200\ \text{km s}^{-1}$
Sichtbare Masse innerhalb der Sonnenbahn	$M = 50 \cdot 10^{9}\ \text{M}_\text{S}$
Gravitationskonstante	$\gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \text{kg}^{-1}\,\text{m}^{3}\,\text{s}^{-2}$
Umrechnung	$1\ \text{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}\ \text{m}$
Umrechnung	$1\ \text{a} = 3{,}1557 \cdot 10^{7}\ \text{s}$
Sonnenmasse	$\text{M}_\text{S} = 1{,}9896 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$

Ges.: Bahngeschwindigkeit der Sonne (theoretisch entsprechend der sichtbaren Masse) v_{theo}

Lös.: Annahmen: Kreisbahnumlauf der Sonne

$$v_{\text{theo}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}^{-1}\text{m}^{3}\text{s}^{-2} \cdot 50 \cdot 10^{9} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}}{8{,}5 \cdot 10^{3} \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\text{m}}} \approx \underline{\underline{160\ \text{km/s}}}.$$

Wenn allein die sichtbare Masse vorhanden wäre, so müsste die Sonne mit einer Bahngeschwindigkeit von ca.160 km/s umlaufen. Die höher beobachtete Bahngeschwindigkeit von etwa 200 km/s lässt darauf schließen, dass außer der sichtbaren Materie noch unsichtbare Dunkle Materie vorhanden sein muss.

$$v_{\text{beob}} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{v_{\text{beob}}} = \frac{2\pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^{3} \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\text{m}}{2 \cdot 10^{5}\,\text{m s}^{-1}} \approx 8{,}24 \cdot 10^{15}\,\text{s} \approx \underline{\underline{260 \cdot 10^{6}\,\text{a}}}.$$

Die Sonne benötigt für einen Umlauf um das galaktische Zentrum etwa 260 Mio Jahre.