Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung

Die Frage nach der Teilbarkeit von natürlichen Zahlen spielt in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle. Du kennst sicherlich schon einige Fakten und Regeln dazu oder hast zumindest schon einmal davon gehört. Diese wollen wir hier zuerst wiederholen und dann erweitern. Beginnen wir der Reihe nach. Zuerst muss man wissen, was man unter Teilbarkeit überhaupt versteht:

Definition „Teilbarkeit“

Eine natürliche Zahl n ist durch eine natürliche Zahl t teilbar, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, so dass $n = t \cdot k$ (Das heißt auch, dass die Division n : t keinen Rest ergibt).

Beispiele: 35 ist durch 7 teilbar, da $35 = 7 \cdot 5$. Hier ist n = 35, t = 7 und k = 5 .
51 ist durch 17 teilbar, da $51 = 17 \cdot 3$. Hier ist n = 51, t = 17 und k = 3 .

Aufträge:

1. *THINK-PAIR-SHARE:*

   a.) Um die Teilbarkeit einer beliebigen natürlichen Zahl durch die Zahlen 2, 3, 5, 6, 9 und 10 zu untersuchen, hast du bereits Regeln kennen gelernt. Versuche dich zunächst in Stillarbeit an diese Regeln zu erinnern und schreibe alle, die du noch kennst, auf das dafür beigefügte Arbeitsblatt. Nach 5 Minuten darfst du dich leise mit deinem Nachbarn austauschen und ihr könnt eure Regeln gegenseitig korrigieren und ergänzen.

   b.) Man unterscheidet „Endstellenregeln“ und „Quersummenregeln“ . Ordne die Regeln aus a.) wenn möglich einer der beiden Kategorien zu und begründe deine Zuordnung.

2. *a.) Untersuche mithilfe der Regeln die folgenden Zahlen auf Teilbarkeit durch die Zahlen 2, 3, 5, 6, 9 und 10:* 60 123 456 654 321 65 433 456

   b.) a und b sind frei wählbare Ziffern (von 0 bis 9). Gib jeweils mindestens eine Möglichkeit für die Ziffern a und b so an, dass die Zahl 125 a3b

   → durch 2 teilbar ist → durch 3 teilbar ist → durch 6 teilbar ist
   → durch 9 teilbar ist → durch 5 und durch 3 teilbar ist

3. *Die Zahlen a, b und t seien natürliche Zahlen. Formuliere zunächst ein paar konkrete Zahlenbeispiele für die folgenden Sätze zur Teilbarkeit. Begründe die Sätze dann mithilfe der (oben stehenden) Definition.* *Es liegen Hilfekärtchen bereit, wenn du nicht weiterkommst.*

   a.) Satz 1:
   a.) Wenn sowohl a als auch b durch t teilbar sind, dann ist auch a + b durch t teilbar.
   b.) Wenn a durch t teilbar ist und b nicht, dann ist a + b nicht durch t teilbar.

   b.) Satz 2:
   Wenn a oder b durch t teilbar ist, dann ist auch $a \cdot b$ durch t teilbar.

4. *a.) Überprüfe ohne Taschenrechner, ob die folgenden Summen jeweils durch 3 teilbar sind. Benenne und erkläre: In welchen Fällen nützt dir Satz 1 aus 3a.) etwas, wann nicht?*

   7 + 6 7 + 5 10 + 4 10 + 5 10 + 6 33 + 45 32 + 46 346 776 + 943 662
   1 111 + 2 222

   b.) Überprüfe, ob die folgenden Produkte jeweils durch 9 teilbar sind. Benenne und erkläre: In welchen Fällen nützt dir Satz 2 aus 3a.) etwas, wann nicht?

   $27 \cdot 17$ $621 \cdot 18$ $4 \cdot 15$ $6 \cdot 15$ $346776 \cdot 943662$

AB zu Aufgabe 1.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung

Teilbarkeit durch 2
Eine natürliche Zahl nist genau dann durch 2 teilbar, wenn

Teilbarkeit durch 3
Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn

Teilbarkeit durch 5
Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 5 teilbar, wenn

Teilbarkeit durch 6
Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 6 teilbar, wenn

Teilbarkeit durch 9
Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 9 teilbar, wenn

Teilbarkeit durch 10
Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 10 teilbar, wenn

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung, **Aufgabe 3a, Hilfekärtchen 1:**
Betrachte die folgenden Beispiele. Begründe ohne die Summe zu berechnen, weshalb sie durch 7 teilbar ist: 28 + 35 14 + 77

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung, **Aufgabe 3a, Hilfekärtchen 2:**
Betrachte weiterhin die Beispiele von Kärtchen 1. Begründe mithilfe der Definition, weshalb die einzelnen Summanden, also 28, 35, 14 und 77 durch 7 teilbar sind. Forme sie dazu so um, wie es in der Definition verlangt ist, also z.B. $28 = 7 \cdot 4$, füge dann diese Umformungen in die Summen ein.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung, **Aufgabe 3a, Hilfekärtchen 3:**
Mithilfe der einzelnen Zerlegungen von Hilfekärtchen 2 solltest du nun folgendes bereits notiert haben: $28 + 35 = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5$ $14 + 77 = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 11$ Klammere auf der rechten Seite jeweils die 7 aus und führe die Begründung vollends durch.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung, **Aufgabe 3b, Hilfekärtchen 1:**
Betrachte die folgenden Beispiele. Begründe ohne das Produkt zu berechnen, weshalb es durch 7 teilbar ist: $14 \cdot 11$ $2\,111553 \cdot 21$

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung, **Aufgabe 3b, Hilfekärtchen 2:**
Betrachte weiterhin die Beispiele von Kärtchen 1. Begründe mithilfe der Definition, weshalb einer der beiden Faktoren durch 7 teilbar ist. Füge dann die zugehörige Umformung in das Produkt ein.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung, **Aufgabe 3b, Hilfekärtchen 3:**
Mithilfe der Umformungen von Hilfekärtchen 2 solltest du nun folgendes bereits notiert haben: $14 \cdot 11 = 7 \cdot 2 \cdot 11$ $2\,111553 \cdot 21 = 2\,111553 \cdot 7 \cdot 3$ Klammere in der Summe die 7 aus und führe die Begründung vollends durch.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Weitere Endstellen- und Quersummenregeln

Zur Begründung von Teilbarkeitsregeln verwendet man häufig die folgenden Sätze[1]:

Satz 1: *a.) Wenn sowohl a als auch b durch t teilbar sind, dann ist auch a + b durch t teilbar.* *b.) Wenn a durch t teilbar ist und b nicht, dann ist a + b nicht durch t teilbar.*
Satz 2: *Wenn a oder b durch t teilbar ist, dann ist auch* $a \cdot b$ *durch t teilbar.*

Endstellenregeln

Die Regeln zur Teilbarkeit durch 2, 5 und 10 sind sogenannte Endstellenregeln. Hier musst du nur die letzte Ziffer betrachten, um die entsprechende Teilbarkeit für eine beliebig große Zahl zu prüfen. Es gibt aber auch Endstellenregeln, die sich nicht auf die letzte Ziffer, sondern auf die letzten zwei, drei, … Ziffern beziehen.

Aufträge in Stillarbeit:

1. *Begründe die 5er-Regel.* *Es liegen Hilfekärtchen bereit, wenn du nicht weiterkommst.*
2. *Formuliere die Endstellenregel zur Teilbarkeit durch 100 und begründe sie.*
3. *Auch die Teilbarkeit durch 4 lässt sich mithilfe einer Endstellenregel, die auf den letzten beiden Ziffern beruht, prüfen. Formuliere und begründe sie.*
4. *Finde die Regel zur Teilbarkeit durch 8, formuliere und *begründe sie.*

Quersummenregeln

Die Begründung für die Teilbarkeiten mit Quersummenregeln lassen sich am besten an Beispielen durchführen. Wichtig dabei ist es, dass die Vorgehensweise allgemeingültig ist, d.h. an jeder Zahl möglich wäre, also nicht nur am gewählten Beispiel.

Aufträge in Partnerarbeit:

5. *Ihr erhaltet eine Begründung für die 9er-Regel.*

   a.) Lest die Regel durch und besprecht sie so, dass ihr jeden Schritt erklären könnt.

   b.) Begründet die 3er-Regel auf die gleiche Art.

6. *Für die Teilbarkeit durch 11 gibt es eine sogenannte „alternierende Quersummenregel“. Dazu zieht man von der Quersumme aus allen Ziffern, die an einer ungeraden Stelle stehen, die Quersumme aus allen Ziffern an geraden Stellen ab. Zum Beispiel betrachtet man für die Zahl 645 738 die Differenz von 4 + 7 + 8 und 6 + 5 + 3.*

   a.) Führt dies für viele Zahlen durch – sowohl durch 11 teilbare, als auch nicht durch 11 teilbare (WTR ist dabei erlaubt). Betrachtet die so gebildeten Differenzen und stellt eine Regel für die Teilbarkeit durch 11 auf.

   b.) Gebt euch gegenseitig Zahlen vor, die ihr auf die Teilbarkeit durch 11 mit eurer Regel prüft und kontrolliert dann mit dem WTR.

   c.) Es gilt:* $10=11-\mathbf{1}$, $100=99+1=9\cdot 11\mathbf{+1}$, $1000=1001-1=91\cdot 11-\mathbf{1}$, $10\,000=9999+1=909\cdot 11\mathbf{+1}$ *. Begründet die Teilbarkeitsregel aus a.) mithilfe der Sätze 1 und 2 an geeigneten Aufspaltungen mit den Beispielzahlen 90 981 und 53 211.*

1 Du kennst diese beiden Sätze schon vom Arbeitsblatt „Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Wiederholung“

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Weitere Endstellen- und Quersummenregeln **Aufgabe 1, Hilfekärtchen 1:**
Bei jeder mehrstelligen Zahl kann man die Einerstelle durch Summenbildung abspalten, z.B. 344 = 340 + 4 425 = 420 + 5 716 = 710 + 6 usw.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Weitere Endstellen- und Quersummenregeln **Aufgabe 1, Hilfekärtchen 2:**
Betrachte die so erhaltenen Summen genauer, (z.B. die von Hilfekärtchen 1) Was kannst du über die Teilbarkeit durch 5 des ersten Summanden sagen? Begründe deine Aussage mithilfe von Satz 2. Welche Aussage folgt dann mithilfe von Satz 1 anhand des zweiten Summanden?

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Weitere Endstellen- und Quersummenregeln **Aufgabe 1, Hilfekärtchen 3:**
Betrachte weiterhin die so erhaltenen Summen. Der vordere Summand lässt sich immer als Produkt mit der Zahl 5 schreiben, z.B. $340 = 34 \cdot 10 = 34 \cdot 2 \cdot 5 = 68 \cdot 5$, laut Satz 2 ist er also stets durch 5 teilbar. Der hintere Summand kann durch 5 teilbar sein. Was folgt dann mit Satz 1? Und wenn er nicht durch 5 teilbar ist, welche Aussage lässt Satz 1 dann zu? Mehr Möglichkeiten gibt es aber nicht – das war schon alles.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln:
Weitere Endstellen- und Quersummenregeln

Zu Aufgabe 5.:
Begründung der Quersummenregel „Teilbarkeit durch 9“ am Beispiel 4 257

Wenn wir die Teilbarkeit der Zahl 4257 durch 9 prüfen möchten, dann können wir sie folgendermaßen umformen: $4257 = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

Das hilft noch nicht ganz, lässt sich aber noch weiter umformen: $4257 = 4 \cdot (999 + 1) + 2 \cdot (99 + 1) + 5 \cdot (9 + 1) + 7$, bzw.

$$\begin{aligned} 4257 &= 4 \cdot 999 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 99 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 7 \\ &= 4 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 5 \cdot 9 + 4 + 2 + 5 + 7 \\ &= (4 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + (4 + 2 + 5 + 7) \end{aligned}$$

Jeder Summand in der vorderen Klammer ist wegen Satz 2 durch 9 teilbar.

Mit Satz 1a folgt dann, dass die Summe in der vorderen Klammer eine durch 9 teilbare Zahl ergibt.

Somit folgt aus Satz 1 (a und b), dass die Summe aus beiden Klammern durch 9 teilbar ist, wenn die hintere Klammer durch 9 teilbar ist und dass sie nicht durch 9 teilbar ist, wenn die hintere Klammer nicht durch 9 teilbar ist. Die hintere Klammer ist aber genau die Quersumme der Zahl, dies liefert die Quersummenregel.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln:
Weitere Endstellen- und Quersummenregeln

Zu Aufgabe 5.:
Begründung der Quersummenregel „Teilbarkeit durch 9“ am Beispiel 4 257

Wenn wir die Teilbarkeit der Zahl 4257 durch 9 prüfen möchten, dann können wir sie folgendermaßen umformen: $4257 = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

Das hilft noch nicht ganz, lässt sich aber noch weiter umformen: $4257 = 4 \cdot (999 + 1) + 2 \cdot (99 + 1) + 5 \cdot (9 + 1) + 7$, bzw.

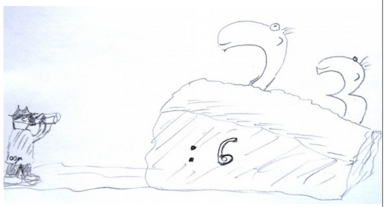
$$\begin{aligned} 4257 &= 4 \cdot 999 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 99 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 7 \\ &= 4 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 5 \cdot 9 + 4 + 2 + 5 + 7 \\ &= (4 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + (4 + 2 + 5 + 7) \end{aligned}$$

Jeder Summand in der vorderen Klammer ist wegen Satz 2 durch 9 teilbar.

Mit Satz 1a folgt dann, dass die Summe in der vorderen Klammer eine durch 9 teilbare Zahl ergibt.

Somit folgt aus Satz 1 (a und b), dass die Summe aus beiden Klammern durch 9 teilbar ist, wenn die hintere Klammer durch 9 teilbar ist und dass sie nicht durch 9 teilbar ist, wenn die hintere Klammer nicht durch 9 teilbar ist. Die hintere Klammer ist aber genau die Quersumme der Zahl, dies liefert die Quersummenregel.

Teilbarkeit und Teilbarkeitsregeln: Summen und Produkte



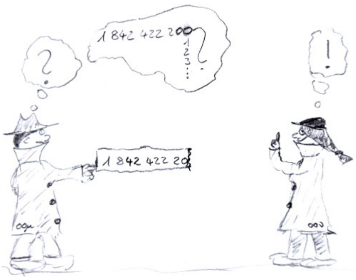
Die Teilbarkeitsregel zum Teiler 6 ist eigentlich keine eigene Regel, sondern nutzt aus, dass in der 6 die Teiler 2 und 3 „versteckt“ sind. Solche Verstecke wecken natürlich das Interesse unserer Agenten. Leider sind aber nicht alle in dieser Art gebildeten Aussagen richtig. Kannst du ihnen helfen, die richtigen Aussagen herauszufinden?

Deine Aufträge:

1. *a.) Von den folgenden Aussagen sind manche richtig, manche falsch. Widerlege jede der falschen Aussagen durch ein Gegenbeispiel.*
   - *A. Eine Zahl ist durch 15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.*
   - *B. Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 4 teilbar ist.*
   - *C. Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.*
   - *D. Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 6 teilbar ist.*
   - *E. Eine Zahl ist durch 18 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 6 teilbar ist.*
   - *F. Eine Zahl ist durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.*
   - *G. Eine Zahl ist durch 30 teilbar, wenn sie durch 6 und durch 5 teilbar ist.*
   - *H. Eine Zahl ist durch 30 teilbar, wenn sie durch 10 und durch 3 teilbar ist.*

   b.) Betrachte die übrigen, richtigen Aussagen und vergleiche sie mit den falschen. Beschreibe, in welchen Fällen diese Art von Regelsystematik funktioniert.

   c.) Die richtigen Regeln aus a.) kannst du nun verwenden. Beschreibe mit ihrer Hilfe weitere Regeln, zum Beispiel für die Teilbarkeit durch 60 .*
2. *Von einer Zahl x ist nur bekannt, dass sie durch 24 teilbar ist. Welche anderen Teiler von x kannst du daraus ableiten? Schreibe so viele wie möglich auf.*
3. *a.) Agent Mü kennt eine schöne Primzahl: Die 102 356 789. Wenn man diese rückwärts betrachtet, ergibt sich ebenfalls eine Primzahl, nämlich 987 653 201. Solche Zahlen nennt man MIRP-Zahlen – weshalb wohl[1]? Aber Agent Mü hat ein ganz anderes Problem: Er hat 102 356 789 mit 18 multipliziert und das Ergebnis aufgeschrieben. Leider fehlt die letzte Ziffer auf seinem Blatt. Agentin Nü hat zwar keinen Taschenrechner zur Hand, aber eine Idee: „Wir wissen doch, dass eine Zahl die durch 18 teilbar ist, sowohl durch 2, als auch durch 9 teilbar ist. Damit ist die Sache doch klar.“ Was meint sie damit? Erkläre ihre Idee und führe sie durch, um die letzte Ziffer zu bestimmen. Die Zahl lautet – bis auf die letzte Ziffer – 1 842 422 20_ .*

   b.) Wieder ist die letzte Ziffer verloren gegangen. Dieses Mal wurde 2^{36} berechnet. Bekannt ist nur noch: 2^{36} = 6871947673x. Welche der Ziffern 0 bis 9 kann x sein und welche nicht? Begründe.

   c.) Die Multiplikation aller natürlichen Zahlen von einer Startzahl n absteigend bis zur 1 nennt man Fakultät und kürzt sie mit n! ab (sprich:“ n Fakultät“). Zum Beispiel ist $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Diese Zahlen werden schnell groß (z.B. 12! = 479 001 600). Ein WTR kann die Stellen schon bald nicht mehr vollständig anzeigen[2]. Finde dennoch die fehlenden Ziffern x und y der folgenden Gleichung heraus und erkläre deinen Lösungsweg: 35! = 10 333 147 966 386 1x4 929 666 651 337 523 200 000 y00*

1 Es gibt auch deutlich kleinere Mirp-Zahlen, z.B. die 13 ↔ 31. Im Internet kannst du noch mehr davon finden.
2 Teste dies - auf den meisten Taschenrechnermodellen befindet sich die Fakultät-Funktion entweder direkt als Tastenbelegung oder in einem Menüunterpunkt, häufig mit *!* oder *x!* oder *fac* abgekürzt.

Bilder: Eigene