

LÖSUNGEN

Binärzahlen – Rechenverfahren unter der Lupe

Aufträge in Partnerarbeit:

1. Nebenan ist das schriftliche Rechenverfahren zur Addition mithilfe des Übertrages an einem ausführlichen Beispiel dargestellt.

- a.) Übertragt das Additionsverfahren auf das Binärsystem, berechnet und notiert dazu in vergleichbarer Art und Weise die Addition $101_2 + 11_2$.

AVZE → **A**chter, **V**ierer, **Z**weier, **E**iner

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ + 11_2 \\ \hline 1000_2 \end{array}$$



Schritt 1:

H	Z	E
2	7	9
1	5	3

9 + 3 = 12 = 1 Z + 2 E

2

Schritt 2:

70 + 50 + 10 = 130 = 1 H + 3 Z

H	Z	E
2	7	9
1	5	3

3 2

Schritt 3:

200 + 100 + 100 = 400 = 4 H

H	Z	E
2	7	9
1	5	3

4 3 2

Bild: Eigenes

- b.) Berechnet mithilfe dieses Additionsverfahrens die folgenden Summen:

$$\begin{array}{r} 1001_2 \\ + 1100_2 \\ \hline 10101_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111_2 \\ + 1010_2 \\ \hline 11001_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111_2 \\ + 11111_2 \\ \hline 111110_2 \end{array}$$

2. Ihr sollt nun ein weiteres, euch im dezimalen Stellenwertsystem bekanntes schriftliches Rechenverfahren auf das Binärsystem übertragen. Wählt dazu mindestens eine der folgenden Aufgaben aus:

• Subtraktion:

Führt die schriftliche Subtraktion $31-13$ schrittweise durch und macht euch die Bedeutung eurer Schritte im Stellenwertsystem klar. Übertragt diese Bedeutung dann auf das Binärsystem und subtrahiert $11011_2 - 1101_2$

Vorbemerkung: Für die schriftliche Subtraktion gibt es verschiedene Rechenverfahren. Im folgenden Abschnitt wird das Ergänzungsverfahren beschrieben. Falls das in Klasse 5 / 6 in Mathematik eingeführte Schulbuch ein anderes Verfahren verwendet, sollte die Lösung entsprechend angepasst werden. anzupassen,

Das Verfahren für die Subtraktion funktioniert im Binärsystem nahezu analog zum Dezimalsystem. Anhand der Beispielrechnung sieht man alle möglichen Fälle, nur einer ist anders als im Dezimalsystem. Von rechts beginnend und „von unten nach oben“ gedacht ergänzt man zunächst von der unteren **1** bis zur oberen **1**, ergibt **0**. Ebenso ergänzt man an der zweiten Stelle die untere **0** um **1**, das ergibt die obere **1**. An der dritten Stelle müsste man die **1** zur **0** ergänzen, was nicht geht. Man

überträgt sie nach links und ergänzt durch eine 1 auf 10_2 , wodurch ein Übertrag an der vierten Stelle in Höhe 1 entsteht. An der vierten Stelle steht in der unteren Zeile eine 1 und eine übertragene 1. Zusammen steht also eine 10_2 da. Die 0 davon wird bis zur 1 ergänzt, also 1. Die 1 aus der 10_2 ergibt eine übertragene 1. Der Rest geht wieder „wie gewohnt“.

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 1101_2 \\ \hline 01110_2 \end{array}$$

- Division ohne Rest**

Führt die schriftliche Division $465 : 15$ schrittweise durch und macht euch die Bedeutung eurer Schritte im Stellenwertsystem klar. Übertragt diese Bedeutung dann auf das Binärsystem und dividiert $1100_2 : 10_2$

Die Division funktioniert ebenso wie im Dezimalsystem. Hierin wird eine „intuitive Subtraktion“ benötigt, falls man diese noch nicht durchdrungen hat.

$$\begin{array}{r} 1100_2 : 10_2 = 110_2 \\ \begin{array}{r} \underline{-10} \\ 10 \\ \underline{-10} \\ 00 \\ \underline{-00} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

LÖSUNGEN

Binärzahlen – Rechenverfahren unter der Lupe

• Multiplikation

Führt die schriftliche Multiplikation $123 \cdot 72$ schrittweise durch und macht euch die Bedeutung eurer Schritte im Stellenwertsystem klar. Übertragt diese Bedeutung dann auf das Binärsystem und multipliziert $11011_2 \cdot 1011_2$

Auch hier ist eine Vorgehensweise sehr ähnlich zum Dezimalsystem möglich, es kann jedoch passieren, dass ein Übertrag über mehr als eine Spalte nötig wird. Dies erkennt man im Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 11011_2 \cdot 1011_2 \\
 11011000 \\
 + \quad \quad \quad 0 \\
 + \quad 110110 \\
 + \quad \quad 11011 \\
 \hline
 100101001
 \end{array}$$

Die hinterste Spalte ergibt in der Summe 1. In der zweiten Spalte ergibt $1 + 1 = 10_2$, also eine 0 und ein Übertrag von 1, ebenso wie in der dritten Spalte. Ähnliches ereignet sich in der vierten Spalte, in der sich $1 + 1 + 1$ zu 3 bzw. 11_2 addieren. Hier steht eine 1 und eine 1 als Übertrag.

In der fünften Spalte wird es nun „spannend“: Hier ergeben $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ bzw. 100_2 . Somit wird eine 0 geschrieben und der Übertrag 1 aber zwei Spalten weiter links geschrieben, also Spalte 7. Die mittlere 0 wäre der Übertrag in die Spalte 6, dieser kann aber natürlich weggelassen werden. Die restliche Addition verläuft „normal“.

Umgangssprachlich kann man die Multiplikation so charakterisieren: Wenn eine Zahl a mit einer Zahl b in Binärdarstellung multipliziert wird, dann schreibt man für jede Ziffer 1 an beliebiger Stelle k in b die Zahl a erneut auf, und hängt $k-1$ Nullen an. All diese Zahlen werden dann zum Ergebnis $a \cdot b$ aufaddiert. Im Beispiel von oben:

$$\begin{array}{r}
 11011_2 \cdot 1011_2 \\
 11011000_2 \\
 + \quad 110110_2 \\
 + \quad \quad 11011_2 \\
 \hline
 100101001_2
 \end{array}$$

Für die 1 der vierten Stelle von 1011_2

Für die 1 an der zweiten Stelle von 1011_2

Für die 1 an der ersten Stelle von 1011_2

LÖSUNGEN

Binärzahlen – Rechenverfahren unter der Lupe

- (**) **Zusatzaufgabe: Division mit Rest**

Führt die schriftliche Division für $123 : 7$ mit Rest schrittweise durch und macht euch die Bedeutung eurer Schritte im Stellenwertsystem klar. Übertragt diese Bedeutung dann auf das Binärsystem und dividiert $1011_2 : 11_2$

Vergleichbar mit der Division. Zunächst passt die 11_2 nicht in 1_2 und nicht in 10_2 , man benötigt also sofort die ersten drei Stellen – 101 .

Die nächsten beiden Schritte verlaufen „normal“. Nach der zweiten Subtraktion ist von „oben“ keine Ergänzung der 10 mehr möglich, in diese passt die 11 aber nicht hinein, somit bleibt die 10 als Rest stehen.

$$\begin{array}{r}
 1011_2 : 11_2 = 11_2 \text{ Rest } 10_2 \\
 \underline{-11} \\
 101 \\
 \underline{-11} \\
 10
 \end{array}$$

LÖSUNGEN

Binärzahlen – Übungen zu den Rechenverfahren



Bild: Eigenes

Mindestens zwei der folgenden Aufgaben a.) bis d.) solltet ihr nun ohne weitere Hilfe lösen können. Führt dies zunächst einzeln durch und vergleicht dann eure Ergebnisse.

a.) Addition:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1_2 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0_2 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1_2 \\ 1\ 1\ 1\ 1_2 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1\ 0_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ 1\ 0_2 \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1_2 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1_2 \end{array}$$

b.) Subtraktion:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1_2 \\ - 1\ 1\ 1_2 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1_2 \\ - 1\ 0\ 0\ 1_2 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\ - 1\ 0\ 1\ 0_2 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1\ 1_2 \end{array}$$

c.) Division ohne Rest:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0_2 : 1\ 1_2 = 1\ 0_2 \\ - 1\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0_2 : 1\ 0_2 = 1\ 0\ 1\ 1_2 \\ - 1\ 0 \\ \hline 0\ 1 \\ - 0 \\ \hline 1\ 1 \\ - 1\ 0 \\ \hline 1\ 0 \\ - 1\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 0_2 : 1\ 0\ 0_2 = 1\ 1\ 1_2 \\ - 1\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 1\ 0 \\ - 1\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 0 \\ - 1\ 0\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

d.)

Multiplikation

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 1_2 * 1\ 0\ 1_2 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1_2 \\ + \quad \quad \quad 0\ 0_2 \\ + 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0_2 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1_2 * 1\ 1\ 1_2 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0_2 \\ + \quad \quad \quad 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0_2 \\ + \quad \quad \quad 1\ 1\ 0\ 1\ 1_2 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_2 * 1\ 1\ 1\ 1_2 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0_2 \\ + \quad \quad \quad 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0_1 \\ + \quad \quad \quad 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0_2 \\ + \quad \quad \quad 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1_2 \end{array}$$

Zusatz.) Division mit Rest:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1_2 : 1\ 0_2 = 1\ 0\ 1_2\ R\ 1_2 \\ - 1\ 0 \\ \hline 0\ 1\ 1 \\ - 1\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1_2 : 1\ 1\ 1_2 = 1\ 0_2\ R\ 1_2 \\ - 1\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1_2 : 1\ 1\ 1_2 = 1\ 0\ 0_2\ R\ 1\ 0\ 1_2 \\ - 1\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$