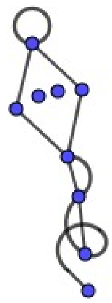
Graphen – Eulersche Kantenzüge

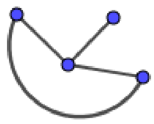
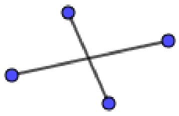
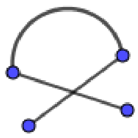
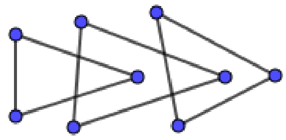
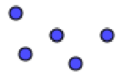
A ⟹ B



Ein *Graph* ist ein Gebilde, das aus *Knotenpunkten* und *Kanten* besteht.
Jede Kante verbindet 2 Knotenpunkte oder einen Knoten mit sich selbst.
Von einem *Knoten* können eine, mehrere oder keine Kanten ausgehen.

Ein Graph heißt *zusammenhängend,* wenn man entlang der Kanten von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten gelangen kann.

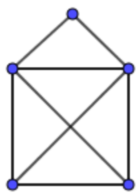
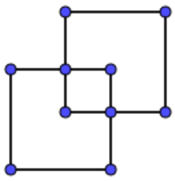
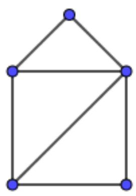
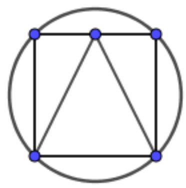
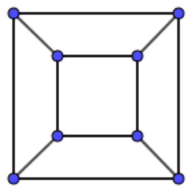
1. *Welche der folgenden Graphen sind zusammenhängend, welche nicht? Ergänzt Knoten oder Kanten, so dass alle Graphen zusammenhängend sind.*

a)  *b)*  *c)*  *d)*  *e)* 

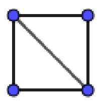
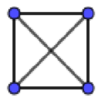
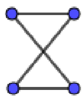
Eine Folge von Kanten, bei der die erste Kante mit der zweiten, die zweite mit der dritten, usw. zusammenstößt, heißt *Kantenzug*.

Ein ***Eulerscher Kantenzug*** enthält alle Kanten eines Graphen genau einmal. Er kann „in einem Zug“ gezeichnet werden, ohne eine Kante doppelt zu zeichnen. Wenn man dabei zum Ausgangspunkt zurückkehrt, heißt er *geschlossen*, sonst *offen*.

2. *Zeichnet Eulersche Kantenzüge*[1] *ein und markiert mögliche Anfangs- bzw. Endknoten.*

a)  *b)*  *c)*  *d)*  *e)* 

3. *Vergleicht die drei Graphen.Warum kann man zwei davon „in einem Zug“ zeichnen, den dritten Graphen aber nicht? Sucht nach einer allgemeinen Regel.*
Überprüft eure Vermutung an den Graphen in Aufgabe 2.
Vielleicht hilft euch dabei folgende Definition:

Die *Ordnung* eines Knotens ist die Anzahl der Kanten, die in ihm zusammentreffen.
Knoten mit *gerader* (*ungerader) Ordnung* nennt man *gerade (ungerade)* Knoten.

Wann besitzt ein zusammenhängender Graph Eulersche Kantenzüge?

____

____

____

____

4. *Zeichnet eigene Graphen mit Eulerschen Kantenzügen.*

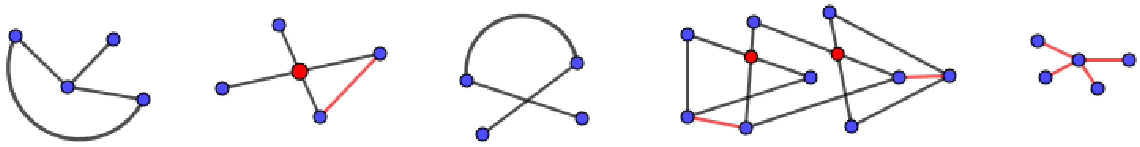
1 benannt nach Leonhard Euler (1707-1783).

cc BY NC SA

Lösungen

1. **Zusammenhängende Graphen.**

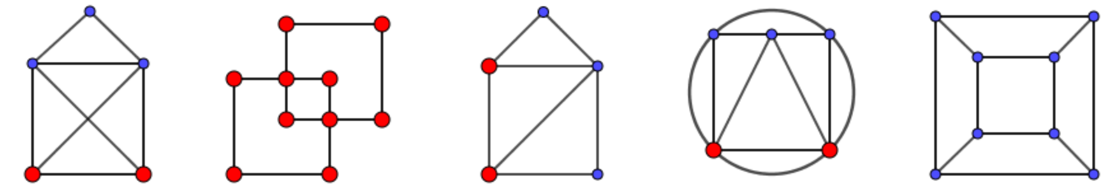
a) b) c) d) e)



Nur die Graphen a) und c) sind zusammenhängend. Die Graphen b), d) und e) sind es nicht und bestehen aus 2 , 3 bzw. 5 jeweils zusammenhängenden Teilgraphen. Man kann sie zu zusammenhängenden Graphen ergänzen: Bei b) könnte man den sichtbaren Schnittpunkt als Knoten hinzufügen oder die beiden Teilgraphen über eine weitere Kante verbinden, eine sogenannte *Brücke*[2].
Bei d) könnte man die 3 Teilgraphen entweder durch 2 neue Knoten oder durch zwei „Brücken" oder durch Kombinationen davon verbinden. Beim kantenlosen Graph im e)-Teil sind mindestens 4 *Brücken* erforderlich, um alle 5 Knoten einzubeziehen, ein mögliches Beispiel ist eingezeichnet, viele weitere denkbar.

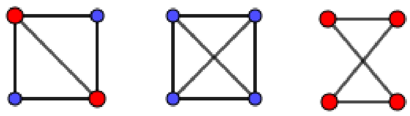
2. **Eulersche Kantenzüge**

a) b) c) d) e)



Bei a) bis d) können Eulersche Kantenzüge nachgezeichnet werden. Start- und Endknoten sind jeweils markiert. Bei e) ist dies nicht möglich.

3. **Allgemeine Regel für Eulersche Kantenzüge in zusammenhängenden Graphen**



Wenn ein zusammenhängender Graph nur gerade Knoten hat, verlässt man jeden Knoten genau so oft wie man ankommt. Man findet immer einen geschlossenen Eulerschen Kantenzug. Der Graph darf aber auch zwei ungerade Knoten enthalten, die dann Start- und Endknoten sein müssen. Bei mehr als 2 ungeraden Knoten existiert kein Eulerscher Kantenzug.

Rückblick auf Aufgabe 2: Bei b) haben alle Knoten gerade Ordnung, deshalb kann jeder Knoten als Start- und Endknoten dienen. Bei a), c) und d) gibt es jeweils zwei ungerade Knoten, es handelt es sich daher um offene Eulersche Kantenzüge, die in einem der beiden ungeraden Knoten beginnen und im anderen enden. Bei e) haben alle vier Knoten ungerade Ordnung, es kann daher keinen EKZ geben.

4. **Eigene „Eulersche Graphen"** (mit Eulerschen Kantenzügen), individuelle Lösungen

2 Eine Brücke ist eine Kante, die einen Graphen in 2 jeweils zusammenhängende Teilgraphen zerfallen lässt, wenn man sie entfernt.