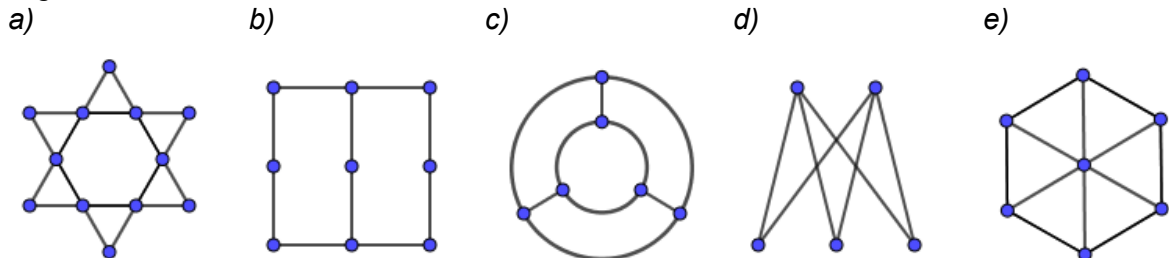




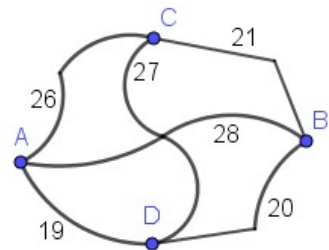
Bei *Eulerschen Kantenzügen* werden alle *Kanten* eines Netzes¹ genau einmal durchlaufen. Die naheliegende Problemstellung, alle *Knoten* eines Graphen genau einmal zu durchlaufen, um am Ende wieder am Ausgangspunkt zu landen, geht auf den irischen Mathematiker William Rowan Hamilton (1805-1865) zurück.

Ein *geschlossener Kantenzug*, der jeden *Knoten* eines Graphen genau einmal enthält, heißt *Hamiltonscher Kantenzug* oder *Hamilton-Kreis*.

1. **Hamilton-Kreise gesucht!** Zeichne sie farbig ein, falls sie vorhanden sind. Ergänze andernfalls eine Kante, so dass ein Hamiltonkreis entsteht und markiere ihn.



2. **„Bewertete“ Graphen – Günstige Rundreise gesucht!**
(Ein bewerteter Graph enthält wie hier Zusatzinformationen, z.B. die Länge einer Strecke, die nötige Fahrzeit, den Fahrpreis, o.ä.). Eva möchte mit ihren Eltern eine möglichst günstige Bahn-rundreise durch die Städte A, B, C und D machen, aber jede Stadt nur einmal besuchen. Für die Fahrt von einer Stadt zur anderen wird jeweils ein bestimmter Preis verlangt. An den bewerteten Kanten stehen hier die Fahrkosten (in €). Bestimmt die günstigste Route.



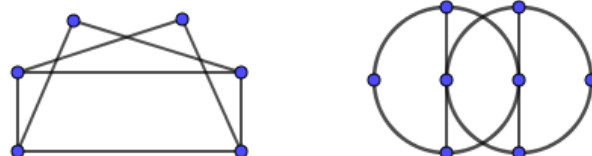
3. **„TSP - Travelling Salesman Problem“** (Problem eines Handlungsreisenden)²

Ein Geschäftsmann aus Frankfurt muss Kunden in Berlin, Nürnberg und München beraten. Er möchte seine Rundreise so planen, dass er jeden Ort nur genau einmal besucht und die Gesamtfahrstrecke dabei möglichst klein bleibt. Dazu hat er die Entfernungen (in km) in einer Tabelle aufgeschrieben:



	München	Nürnberg	Frankfurt	Berlin
München	0	170	400	590
Nürnberg	170	0	230	440
Frankfurt	400	230	0	550
Berlin	590	440	550	0

Zeichnet einen bewerteten Graphen und ermittelt die kürzeste Reiseroute.



4. Findet ihr die Hamiltonkreise?
Zeichnet Sie ein.

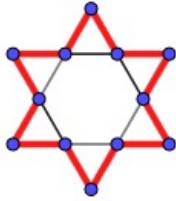
¹ Ein zusammenhängender Graph wird auch als Netz bezeichnet.

² Deutschlandkarte [gemeinfrei] URL: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/57/Karte_Deutschland.png (abgerufen: 3.4.2018)

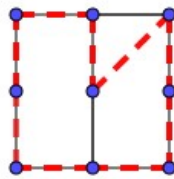


Lösungen

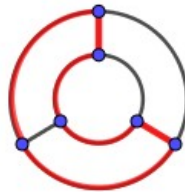
1. a)



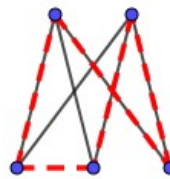
b)



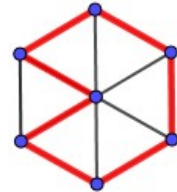
c)



d)



e)



a), c) und e) enthalten Hamilton-Kreise, man nennt die Graphen daher auch hamiltonsch. b) und d) sind nicht hamiltonsch. Man kann zwar offene Kantenzüge finden, die jeden Knoten genau einmal enthalten, aber man kann nicht gleichzeitig im Startknoten enden. Eine ergänzte Kante und der entstehende Hamilton-Kreis sind jeweils gestrichelt markiert, es gibt natürlich auch andere Möglichkeiten.

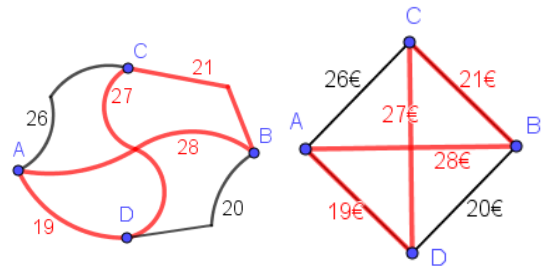
2. Es sind 6 Rundreisen möglich, von denen je zwei in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und daher gleich teuer sind.

ABCD bzw. **ADCB**: $28\text{€} + 21\text{€} + 27\text{€} + 19\text{€} = 95\text{€}$

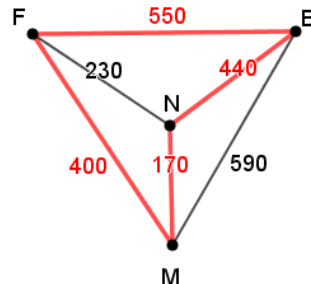
ABDC bzw. **ACDB**: $28\text{€} + 20\text{€} + 27\text{€} + 26\text{€} = 101\text{€}$

ACBD bzw. **ADBC**: $26\text{€} + 21\text{€} + 20\text{€} + 19\text{€} = 96\text{€}$

Es ist ein vollständiger Graph mit 4 Knoten, der insgesamt 3 Hamilton-Kreise enthält.



3. „Travelling Salesman Problem“ (Problem des Handlungsreisenden)



Es gibt 6 Routen von denen je 2 die gleiche Gesamtlänge haben, da sie in entgegengesetzter Richtung befahren werden (gespiegelt sind):

FBNMF bzw. **FMNBF**: 1560 km

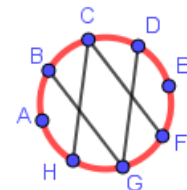
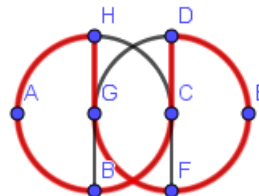
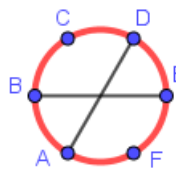
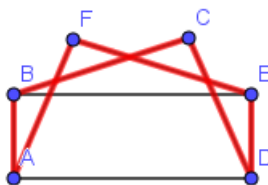
FBMNF bzw. **FNMBF**: 1540 km

FNBMF bzw. **FMBNF**: 1660 km

Der Geschäftsmann sollte zuerst nach Berlin, dann über München und Nürnberg zurück nach Frankfurt fahren.

Allerdings ist die zweitbeste Strecke nur 20 km länger und damit in der Praxis sicher auch gut geeignet.

4.



Weiterführende Anregung: Jeder Hamiltongraph kann durch Umnummerierung (Vertauschung) der Knoten so „umgezeichnet“ werden, dass ein Hamilton-Kreis als „echter“ geometrischer Kreis erscheint, wie es oben zu sehen ist. Die Knoten werden in der Reihenfolge des Durchlaufens eingetragen. Restliche Kanten ergänzt man. Der linke und der rechte Graph sind jeweils „isomorph“ zueinander, sie besitzen die gleiche Struktur.