KLASSE 9

AUSSAGENLOGIK UND GRAPHEN
(3.2.2.2)

HINWEISE ZUM UNTERRICHT

Olaf Grund– E-Mail: olaf.grund@fb75-rpk.de – März 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Aus Klasse 8 bringen die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen zur Aussagenlogik mit, die nun in Klasse 9 vertieft und formalisiert werden, wobei die Grundlagen des Aussagenkalküls ausgehend von Logikrätseln altersangemessen entwickelt werden.

Bei der Einführung in die Zusammenhänge der Aussagenlogik wurde häufig auf Visualisierungen aus dem Bereich der Mengenalgebra zurückgegriffen. Dies ist aus didaktischer Sicht möglich und gewinnbringend, da es sich bei beiden Strukturen um Boolsche Algebren handelt.[1]

Da es keine Lehrwerke gibt, wurde für jede Stunde mehr Material konzipiert als tatsächlich eingesetzt werden kann. <u>Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass nicht alle Aufgaben behandelt werden sollen und können.</u> Wie bei einem Lehrwerk wählen Sie aus dem Angebot die für Ihre Klasse geeigneten Aufgaben aus.

Im Zuge der Anpassung für die eigene Lerngruppe können Sie Aufgaben der Arbeitsblätter ersetzen oder streichen, um die jeweils passenden Schwerpunkte zu setzen. Daher enthalten die Dateien auf der zweiten Seite i.d.R. zusätzliche Aufgaben zum Erarbeiten, Üben oder Vertiefen, die auch für Hausaufgaben, binnendifferenzierende Aufträge oder Leistungskontrollen genutzt werden könnten. Auf eine Trennung des Materials in ein Arbeits- und ein Übungsblatt (wie in IMP 8) wurde verzichtet, da es pragmatischer erschien, das gesamte Material zu einer Stunde in eine Datei einzubinden.

Im Ordner *4_loesungen* finden Sie die Musterlösungen. Dabei sind auf den ersten Seiten einer Lösungsdatei auch die entsprechenden Kopiervorlagen eingebunden. Die Musterlösungen sind wieder so formuliert, dass sie sich direkt an Schülerinnen und Schüler richten und sich so bei Bedarf auch im Unterricht einsetzen lassen, z.B. im Rahmen kooperativer Methoden.

Im Ordner *5_praesentationen* stehen schließlich noch einige GeoGebra-Dateien zur Verfügung, die Sie auch zur Unterrichtsvorbereitung nutzen können, z.B. um Wahrheitswerttabellen zu erstellen oder Venn-Digramme zu erzeugen.

Im Folgenden ist *ein* möglicher Unterrichtsverlauf ausführlich dokumentiert. Didaktisch-methodische Hinweise sind jeweils nach den groben Verlaufsplänen der einzelnen Stunden als Erläuterungen eingebunden. Dort werden auch Alternativen beschrieben und Vertiefungsmöglichkeiten aufgezeigt.

Bei der anstehenden Umsetzung wünschen wir Ihnen viel Erfolg und Freude!
Korrekturhinweise und Anregungen können Sie mir gerne direkt zukommen lassen.

O. Grund, März 2019
(*olaf.grund@fb75-rpk.de*)

1 Erläuterungen zum fachlichen Hintergrund findet man in der Datei M9aug01_hintergrund.odt im Verzeichnis 1_hintergrund.

Aussagenlogik

1. Stunde: Negation und Wahrheitstafel

Möglicher Ablauf, Inhalte	Hinweise
• Auftrag 1: (AB, Nr.1, Verbotene Zauberei) *S. trägt Argumentation vor, in der Weiterführungsphase werden Begrifflichkeiten der Aussagenlogik dokumentiert, siehe mögliches Tafelbild in den Erläuterungen* • Wahrheitswerttabelle einführen (AB, Nr. 2, Magischer Honig) Gemeinsam werden im Unterrichtsgespräch zunächst die angenommenen Aussagen g, p und r formuliert und notiert. Auftrag 2: „Füllt die Tabelle aus.“ * *Präsentation durch SuS, in der Weiterführungsphase wird reflektiert, dass bei dieser Aufgabe noch eine Einzeltäterschaft vorausgesetzt wurde, dies bei Aufgabe 3 aber wegfällt.* • [optional: zusätzliche Übungsaufgaben (z.B. 4, 5, 6, 7)] • Wahrheitswerttabelle vertiefen (AB, Nr. 3a, Butterbierdiebe) Die drei Elementaraussagen c, d, e werden gemeinsam notiert Auftrag 3a-1: Erstellt eine passende Wahrheitswerttabelle und führt links alle denkbaren Täterkonstellationen auf. *Präsentation, Ergebnissicherung, danach:* Auftrag 3a-2**: Füllt nun die rechte Seite aus und erläutert Dumbledores Gedankengang. *Präsentation, Ergebnissicherung, ggf Präsentation des differenzierenden Zusatzauftrages* Auftrag 3b: „Zusatz für Schnelle“ (AB, Nr. 3b) „Wer war unter dieser Annahme beteiligt?“ • Abschließende Reflexion der Stundeninhalte • Stellen der Hausaufgaben (z.B. Nr. 4, ggf. differenziert 8, 9)	• Material: `M9aug01_neg_tab.odt` • Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung: Unterrichtsgang ist als Folge von Aufträgen angelegt, die jeweils von den SuS präsentiert, von der Lehrperson ergänzt und gemeinsam gesichert werden. Erläuterungen des SAFL Karlsruhe: `M9aug03_auftragssteuerung.pdf` • Die Wahrheitswerttabelle kann auch ausgehend von Aufgabe 1 eingeführt werden, vgl. Erläuterungen • * ggf. kann bei unsicheren Klassen vor Auftrag 2 auch die linke Seite der Tabelle gemeinsam ausgefüllt werden. • Die hier blau formatierten Hinweise beziehen sich auf Aufgabe 3, die ggf. auch übersprungen oder verschoben werden kann, vgl. Erläuterungen • ** Differenzierender Zusatzauftrag: Stelle die Aussagen (1) bis (3) als Verknüpfungen der atomaren Aussagen c,d,e dar (Hinweis: Für „und“ verwendet man das Zeichen $\wedge$).

Erläuterungen

In der ersten Stunde soll ein „weicher“ Einstieg ins Thema Aussagenlogik erfolgen. Die bereits aus Klasse 8 bekannte Negation wird formalisiert und gleichzeitig werden Wahrheitswerttabellen als neues Hilfsmittel eingeführt. Für schnellere Lerngruppen bietet sich im Sinne einer stringenten Progression Aufgabe 3 zur Vertiefung an.

Zum Einstieg könnte man von zwei Elementaraussagen[2] ausgehen:
a: Sabine wird krank, b: Die Mutter kocht einen Kräutertee.
und die SuS unterschiedliche Interpretationen der Konjunktionen beschreiben lassen:
$a \wedge b$: „Sabine wird krank und die Mutter kocht ihr einen Kräutertee.“
$b \wedge a$: „Die Mutter kocht ihr einen Kräutertee und Sabine wird krank.“
In der Aussagenlogik gibt es zwischen den beiden Aussagen keinen Unterschied.
Der Wahrheitsgehalt der zusammengesetzten Aussage $a \wedge b$ hängt nur vom Wahrheitsgehalt der Teilaussagen a und b, ohne dass zeitliche oder kausale Interpretationen eine Rolle spielen.

Für das grundlegende Verständnis einer Wahrheitswerttabelle sollte man sich Zeit nehmen, da die Trennung in angenommene "atomare" Aussagen auf der linken Seite und Folgerungen für

2 Man spricht auch von „atomaren“ Aussagen und meint damit Aussagen, die nicht durch Verknüpfung anderer Teilaussagen entstehen. Sozusagen die „Atome“ anderer zusammengesetzter Aussagen.

die Wahrheitswerte anderer (später meist zusammengesetzter) Aussagen auf der rechten Seite ungewohnt ist. Letzten Endes stehen links wie rechts Aussagen im Sinne der Aussagenlogik. Um diese Unterscheidung behutsam einzuführen wurde bei Aufgabe 1 und 2 noch die Einzeltäterschaft als zusätzliche Bedingung vorgegeben, damit die Tabellen mit nur 3 möglichen Täterkonstellationen übersichtlich bleiben. Außerdem wurden rechts nur Elementaraussagen und deren Negation verwendet.
Sie stellen sich aus dem Aufgabenmaterial eine für Ihre Klasse geeignete Auswahl und Reihenfolge zusammen. Dazu folgen nun Hinweise zu den einzelnen Aufgaben.

1. **Verbotene Zauberei**
Hier bietet sich die Gelegenheit, die Negation von Aussagen zu wiederholen und danach im Plenum das Symbol „¬" für die Aussagennegation einzuführen. Es ist daran gedacht, dass die Schüler logisch argumentieren. Ob Sie dies schriftlich oder mündlich einfordern, hängt von der Gesamtausrichtung Ihrer Stunde ab.
Die Einführung einer Wahrheitstafel ist zwar erst bei Aufgabe 2 vorgesehen, kann aber auch vorgezogen werden. Falls dies der Fall wäre, könnte man in Anlehnung an Aufgabe 2 zunächst die Aussagevariablen definieren und danach die abgebildete Tabelle in zwei Arbeitsaufträgen (linke Seite / rechte Seite) entwickeln lassen:

Definition der „atomaren" Aussagen:
g: George war der Übeltäter.
p: Percy hat gezaubert.
r: Ron ist schuldig.

g	p	r	(1) ¬g	(2) ¬r	(3) r	sinnvoll?
w	f	f	**f**	w	**f**	**ja**
f	w	f	w	w	f	nein
f	f	w	w	f	w	nein

Links tragen die SuS mögliche Täterkonstellationen ein, um dann auf der rechten Seite die jeweiligen Wahrheitswerte der drei Aussagen zu folgern. In der letzten Spalte könnte die vorgebene Bedingung überprüft werden, dass genau zwei der Aussagen Lügen sein müssen. Da dies nur in der ersten Zeile der Fall ist, folgt, dass George der Täter sein muss.

Nun könnten erste Begriffe festgehalten werden, dazu ein denkbares Tafelbild nach Aufgabe 1:

Aussagenlogik

Ein Ziel der Mathematik ist es, alles bekannte Wissen als Aussagen festzuhalten. Eine ***Aussage*** *ist ein Ausdruck, dessen* ***Wahrheitswert*** *entweder* ***wahr (w)*** *oder* ***falsch (f)*** *ist.*

Hinweise:
1) *„Das Wetter ist schön" ist keine Aussage im mathematischen Sinn, da sie subjektiv ist und daher nicht eindeutig entscheidbar ist, ob sie wahr oder falsch ist.*
2) *7-3=5 ist eine (falsche) Aussage (Wahrheitswert: f).*
3) *Der Ausdruck 3x+2=8 wird als* ***Aussageform*** *bezeichnet, erst nach dem Einsetzen eines Wertes für x geht er in eine Aussage über, die wahr oder falsch ist.*

Die ***Negation*** *einer Aussage* ***p*** *wird symbolisch als* ***¬ p*** *(lies: nicht p) geschrieben und kehrt den Wahrheitswert von p in sein Gegenteil um.*

Beispiele
r: *Ron war der Täter.* ***¬ r:*** *Ron war nicht der Täter.*
p: $3 \cdot 4 - 2 = 10$ ***¬ p:*** $3 \cdot 4 - 2 \neq 10$

Wahrheitswerte bei einer Negation

p	¬ p
w	f
f	w

2. **Magischer Honig**
   Aufbau und Verwendung einer Wahrheitswerttabelle werden eingeführt. Wie oben bereits erwähnt, wurde die Einzeltäterschaft als Bedingung vorgegeben und die rechte Seite mit einfachen Aussagen und Negationen gestaltet.
   Für die linke Seite sollte man die Bezeichnung „Aussagen" vermeiden, um eine Überlagerung des Begriffs mit den aus dem Alltagsgebrauch bekannten Aussagen der Verdächtigen zu vermeiden. Man könnte zur sprachlichen Abgrenzung von *Aussagevariablen*, *atomaren Aussagen* oder *Elementaraussagen* g, p und r sprechen, die man einführt, um auf dieser Grundlage die *Aussagen* der Verdächtigen zu überprüfen. Auf dem Arbeitsblatt wurde links als Überschrift "Defintion der Aussagevariablen" gewählt. Passen Sie das Material bitte so an, dass es Ihren Vorstellungen entspricht.

3. **Butterbierdiebe**
   In Aufgabe 3 kommen auf der rechten Seite verknüpfte Aussagen vor, um inhaltlich auf die zweistelligen Verknüpfungen einzustimmen, die in der folgenden Stunde untersucht werden. Dabei werden in Aufgabe 3 bewusst nur Konjunktionen verwendet, die nicht explizit angesprochen werden müssen, da die SuS den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussagen auch intuitiv ermitteln können.
   In Aufgabe 3 liegt der Fokus auf einem kombinatorischen Aspekt: Es wird hier keine zusätzliche Bedingung für die Täterkonstellation auf der linken Seite angegeben. Folglich müssen nun alle Kombinationen der Wahrheitswerte der links vorgegebenen Aussagevariablen betrachtet werden. Dabei gibt es vielfältige sinnvolle Vorgehensweisen.

   Sicher lohnt es sich, nach der Präsentation des vorbereitenden Auftrags 3a-1 auf die kombinatorischen Zusammenhänge einzugehen und anhand der Visualisierung in der Tabelle herauszuarbeiten, dass es bei 3 Aussagevariablen $2^3 = 8$ verschiedene Belegungen der Wahrheitswerte gibt. Insbesondere könnten hier geschickte Vorgehensweisen zur systematischen Erfassung aller Kombinationen angesprochen werden.

   Die naheliegende Verzahnung der Aussagenlogik mit der die „Binärlogik" (w=1 und f=0) ist erst ab der vierten Stunde geplant, da zunächst die klassische Aussagenlogik mit den Wahrheitswerten *w* und *f* im Vordergrund stehen soll. Dennoch könnte man bereits hier das „Hochzählen" der Binärzahlen von 000 bis 111 als Ergänzung zu den üblichen Zählstrategien ansprechen, falls die SuS diese Idee nicht schon selbst ins Spiel bringen:

c	**d**	**e**	
f	f	f	…
f	f	w	
f	w	f	
f	w	w	
w	f	f	
w	f	w	
w	w	f	
w	w	w	

c	**d**	**e**	
0	0	0	…
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

   Aufgabe 3 ist für die Behandlung der zweistelligen Verknüpfungen in der 2. und 3. Stunde, nicht erforderlich, man kann sie auch überspringen oder auf einen späteren Zeitpunkt verschieben. Sie ermöglicht an dieser Stelle aber eine wirksame Vorentlastung der kombinatorischen Überlegungen, die im weiteren Verlauf zum Tragen kommen, z.B. auch ab der 4. Stunde bei der Betrachtung von Logikrätseln mit drei oder vier Aussagevariablen.

4. **Naschkatze**
Diese Aufgabe enthält als kleine Steigerung vier Aussagen und wirkt damit der möglichen Fehlvorstellung entgegen, dass rechts immer genau so viele Aussagen betrachtet werden wie es Aussagevariablen gibt. Sie kann gut als Hausaufgabe gestellt oder als zusätzliche Pufferaufgabe im Unterricht eingesetzt werden.

5. Weitere Aufgaben

Nr. 5 **Banküberfall**, Nr. 6 **Noch ein Raubzug** und Nr. 7 **Papiermüll** sind einfache Variationen der Aufgaben 1 und 2. Bei allen wird die Einzeltäterschaft als vereinfachende Bedingung bereits vorgegeben. Sie können daher zusammen mit Nr. 4 zusätzlich vor oder statt Aufgabe 3 eingesetzt werden, falls die SuS weitere Übungen benötigen.

Nr. 8 **Alt und jung** und Nr. 9 **Esel, Pferd und Kamel**[3] stimmen bereits auf die Verknüpfung von Aussagen und damit auf die Inhalte der folgenden Stunde ein.

Die noch einfach gehaltene Aufgabe 8 bereitet die wichtige Unterscheidung zwischen ausschließendem („entweder a oder b“) und einschließendem („a oder b oder beide“) Gebrauch des Junktors „oder“ vor. Bei den englischen und international üblichen Logikgattern wird dies auch bei der Bezeichnung visualisiert:
„a OR b“ für die Disjunktion (einschließend: „a oder b“, a und b können beide wahr sein)
„a XOR b“ für die Kontravalenz (ausschließend von engl.: to exclude: „entweder … oder“)

Aufgabe 9 enthält zusätzlich die Negation einer Disjunktion, die in der folgenden Stunde als Vertiefung behandelt werden kann („weder a noch b“ ist die Negation der Aussage „a oder b“). Diese Aufgabe eignet sich als differenzierender Zusatzauftrag für interessierte SuS. Auch hier sei auf die Visualisierung bei der Operatorenschreibweise hingewiesen:
„a NOR b“ vom englischen „Not OR“

Diese sprachliche Vernetzung kann bei Bedarf in der 2. Stunde von der Lehrkraft ins Spiel gebracht werden (vgl. `M9aug02_kon_dis_aeq.odt`, Aufgabe 2).

3 Als Literaturtipp sei in diesem Zusammenhang auf die reichhaltige Aufgabensammlung „The Riddle of Scheherazade and Other Amazing Puzzles“ von Raymond Smullyan hingeweisen ([SMU1]).

2. Stunde: Konjunktion, Disjunktion und Äquivalenz

Möglicher Ablauf, Inhalte	Hinweise
• Hausaufgabenvergleich, Präsentation durch SuS • (AB, Nr.1, Einstellungstest) Auftrag 1: „Bearbeitet den Test" (ca. 4 min Arbeitszeit) Zusatz für Schnelle: Untersucht, welche Aussagen verknüpft wurden. Notiert euch verschiedene Verknüpfungen. *Präsentation der Lösung durch SuS., ggf. Klärung im Plenum* • Einführung von Konjunktion, Disjunktion und Bijunktion, *an Alltagsbeispielen erläutern, Abgrenzung des ein- und ausschließenden „oder“, siehe mögliches Tafelbild in den Erläuterungen,Venn-Diagramme werden später ergänzt, s. unten* • (AB, Nr. 2, Verknüpfungen unter der Lupe) Auftrag 2a: Wahrheitswerte eintragen + Beispiele zuordnen *Präsentation durch verschiedene SuS, Beispiele aus Aufgabe 1 (Aussagen oder deren Negationen) werden zugeordnet* Auftrag 2b: Venn-Diagramme einfärben Zusatz: Was fällt bei (i) und (k) auf? → Negation thematisieren *Präsentation durch S., Ergänzungen durch L. und ggf. Überleitung zu weiteren Negationen (→ NOR und NAND):* Auftrag 2c: Negation von p und q → letzte 2 Spalten ausfüllen und Venndiagramme färben, Zusatz: Spalten passend benennen *Präsentation durch S., Venndiagramme können von S. im Tafelbild eingefärbt werden, ggf. Ergänzung durch L.: logische Gatter AND, OR, NOR, XOR, XNOR, NAND* • Reflexion der Stundeninhalte, Überblick und falls Zeit bleibt: • (AB, Nr.3. Tautologisch?!), sonst auch als Teil der Hausaufgabe: Einführung des Begriffs „Tautologie“ an einfachen Beispielen Wichtig: Kurzer Hinweis zu den Vorfahrts- und Klammerregeln, die mangels Zeit nicht im Fokus stehen können und mehr oder weniger intuitiv verwendet werden. • Stellen der Hausaufgaben (z.B. Nr. 4, 5 ggf. differenziert: 6)	• Material: `M9aug02_kon_dis_aeq.odt` • Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung • Der Einstellungstest ermöglicht einen spielerisch-motivierenden Einstieg mit vielen Anknüpfungs-punkten zur anschließenden Einführung der Verknüpfungen Konjunktion, Disjunktion und Bijunktion, vgl. Erläuterungen • Die Abgrenzung der Disjunktion (in der Mathematik üblicher Gebrauch des einschließenden „oder“) von der Kontravalenz (auschließendes „entweder … oder“) ist im Bildungs-plan nicht explizit gefordert, aus didaktischer Sicht aber wichtig für tragfähige Vorstellungen und stellt hier keine Überforderung dar. • Die Arbeit mit Venn-Diagrammen bietet einen ergänzenden visuellen Zugang und bahnt die Vernetzung mit der Mengenalgebra an. • blau formatiert: Die weiteren Negationen gehen übers Kerncurriculum hinaus und können übersprungen werden. Allerdings werden hier effektiv Grundlagen für die Behandlung der Gatter in Klasse 10 (BP, 3.3.1.3 (3)) gelegt, vgl. Erläuterungen.

Erläuterungen

In der 2. Stunde werden erste zweistellige Verknüpfungen eingeführt, an Alltagsbeispielen erläutert und die zugehörigen Wahrheitswerttabellen erstellt.

Durch den Einstellungstest soll ein motivierender Einstieg mit reichhaltigen Anknüpfungs-punkten ermöglicht werden („deep end approach“). Dabei wurden die Bedingungen so formuliert, dass die später in Aufgabe 2 formalisierten Verknüpfungen intuitiv verwendet werden können und gleichzeitig durch die zugrunde liegende Negation („Du bist durchgefallen, wenn …“) bereits das Dualitätsprinzip boolscher Algebren ins Spiel kommt.

Die Anbahnung von tragfähigen Vorstellungen zum Dualitätsprinzip ist essentiell. Sie lag der Konzeption von Aufgabe 2 zugrunde, deren Bearbeitung im Mittelpunkt der Stunde steht. Falls dadurch eine Lerngruppe zu sehr gefordert sein sollte, finden sich Vorschläge zur pragmatischen Vereinfachung in den folgenden Hinweisen.

1. **Einstellungstest**

Zur Darstellung der konzeptionellen Überlegungen folgt zunächst eine Übersicht der verwendeten Verknüpfungen. Es werden die Abkürzungen „1F3“ für eine „1 in Feld 3“ bzw. „F1⇔F2“ für gleiche Inhalte in Feld 1 und Feld 2 verwendet und die jeweils negierten Verknüpfungen in der zweiten Spalte aufgeführt:

Durchgefallen, wenn …	Verknüpfung	Bestanden, wenn …
(1) 0F1 ∧ 0F2	*Konjunktion*	¬ (1) ¬ (0F1 ∧ 0F2) ⇔ (1F1 ∨ 1F2) *negierte Konjunktion, De Morgansche Regel*
(2) 1F1 ∧ 1F2 ∧ 1F4	*Konjunktion*	¬ (2) ¬(1F1 ∧ 1F2 ∧ 1F4) ⇔ (0F1 ∨ 0F2 ∨ 0F4) *negierte Konjunktion, De Morgansche Regel*
(3) „entweder 1F1 oder 1F3“	*Kontravalenz*	¬ (3) F1⇔F3 *Bijunktion (Äquivalenz)*
(4) F2⇔F3	*Äquivalenz*	¬ (4) ¬(F2⇔F3), z.B. „entweder 1F2 oder 1F3“, *Kontravalenz*
(5) ¬(1F3)	*Negation*	¬ (5) ¬(¬1F3) ⇔ 1F3 *Doppelte Negation*
(6) 0F1 ∨ 0F4	*Disjunktion*	¬ (6) *"weder noch"*: ¬(0F1 ∨ 0F4) ⇔ (1F1 ∧ 1F4) *negierte Disjunktion, De Morgansche Regel*
(7) 0F4 ∨ 1F5	*Disjunktion*	¬ (7) *"weder noch"*: ¬ (0F4 ∨ 1F5) ⇔ (1F4 ∧ 0F5) *negierte Disjunktion, De Morgansche Regel*
(8) „weder 1F1 noch 1F4“	*neg. Disjunkion*	¬ (8) ¬ (¬(1F1∨1F4)) ⇔(1F1∨1F4) *Disjunktion*

Die Übersicht ist nicht für die SuS bestimmt. Sie dient dem Zweck, dass man bei der Besprechung klare Schwerpunkte setzen und die Aufgabe bei Bedarf abändern oder ergänzen kann. Da das Rätsel überbestimmt ist, kann man hier leicht Bedingungen weglassen oder ersetzen, Verknüpfungen streichen oder andere ergänzen.

An eine ausführliche formale Behandlung ist hier nicht gedacht! Die aufgeführten Verknüpfungen sollen intuitiv gebildet werden, ebenso werden die „Regeln von De Morgan“ in der rechten Spalte hier unbewusst angewendet und nicht explizit thematisiert (Diese Regeln werden erst in Klasse 10 als Rechengesetze hergeleitet und verwendet).
Intuitiv werden die SuS hier die Feldinhalte negieren (Wahrheitswerte 0 und 1 tauschen) und die Verknüpfungen wechseln (zwischen ∧ und ∨ „umschalten“), um zu einer "dualen" Aussage zu gelangen. Den fachlichen Hintergrund dazu liefert das Dualitätsprinzip der boolschen Algebra.[4]

Im Anschluss wird dann "ein Gang zurückgeschaltet". Drei der vorkommenden Verknüpfungen werden eingeführt und an alltagsnahen Beispielen erläutert. Als Anregung für eigene Umsetzungsideen finden Sie auf der folgenden Seite ein mögliches Tafelbild.

4 Informationen hierzu findet man in der Datei M9aug01_hintergrund.odt im Ordner „1_hintergrund“.

Exemplarisch sind hier Beispiele aus der Alltagssprache aufgeführt, allerdings sollten im Unterricht wenn möglich eigene Beispiele der SuS eingebunden werden, die im Laufe des Gesprächs diskutiert werden.

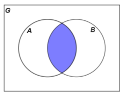
Verknüpfungen

Operator (Junktor)	Symbol	Eine ...	… ist genau dann wahr, wenn ...
und	$a \wedge b$	**Konjunktion**	*... sowohl Aussage a als auch Aussage b wahr ist.*
oder	$a \vee b$	**Disjunktion**	*... mindestens eine der Aussagen wahr ist (oder beide).*
„gleich“	$a \leftrightarrow b$	**Bijunktion**	*… die Aussagen a und b denselben Wahrheitswert haben, also entweder beide wahr oder beide falsch sind.*

Beispiele

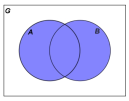
*Venn-Diagramme**

1) *Es ist kalt und dunkel.*
   „sowohl a als auch b“, „a, aber auch b“, „nicht nur a, sondern auch b“, ...



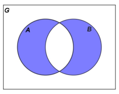
Formulierungen im Alltag sind oft nicht eindeutig!

2) *Willst du Milch oder Zucker in den Kaffee?*
   auch beides möglich → nicht ausschließend, sondern einschließendes „oder“



„a oder b“, (a OR b) in der Mathematik immer als einschließendes „oder“!

3) *Haben wir jetzt Mathe oder Deutsch?*
   Entweder Mathe oder Deutsch, aber nicht beides!
   → ausschließendes „oder“



„entweder a oder b“, (a XOR b) (ausschließend - to exclude)

* Für die Venn-Diagramme könnten zunächst die Kästen als Platzhalter gezeichnet werden. Die Färbungen können dann von SuS bei der Präsentation des Auftrags 2b an der Tafel ergänzt werden. Gesichert werden die entsprechenden Venn-Diagramme auf dem Arbeitsblatt in Aufgabe 2. Im Tafelbild könnten sie in einer Reflexionsphase gegen Stundenende zur Abrundung dienen. Alternativ könnte man bei 3) auch ein Beispiel zur Bijunktion einbinden.

Fachsprachliche Unschärfe vermeiden: Bijunktion und Äquivalenz
Hier wurde aus didaktischen Gründen zunächst der Begriff der *Bijunktion* eingeführt, der im Bildungsplan nicht als verbindlicher Fachbegriff gefordert wird. Nur eine Bijunktion, die für jede Einsetzung wahr ist, wird als aussagenlogische Äquivalenz bezeichnet, der Unterschied wird im direkten Vergleich deutlich:

Definition mit Aussagevariablen

Bijunktion

a	b	$a \leftrightarrow b$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Anwendung bei zusammengesetzten Aussagen

Äquivalenz

a	b	$\neg(a \wedge b)$	$\leftrightarrow$	$\neg a \vee \neg b$
w	w	f	w	f
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

(Beispiel: Regel von De Morgan)

Die links mithilfe atomarer Aussagen a und b definierte Bijunktion ist nicht für alle möglichen Fälle wahr, sondern nur wenn entweder beide Aussagen wahr oder beide falsch sind.
Die rechts mithilfe zusammengesetzter Teilaussagen formulierte Bijunktion liefert dagegen für alle möglichen Fälle eine wahre Aussage. Eine *Äquivalenz* ist also eine besondere Bijunktion, nämlich eine, die gleichzeitig eine Tautologie, also für alle möglichen Fälle wahr ist.
Diese Unterscheidung ist für die klassische Aussagenlogik wichtig, sollte aber im Rahmen des IMP-Unterrichts nicht im Mittelpunkt stehen. Bei der Subjunktion und Implikation verhält sich das anders, da der Bildungsplan den Begriff der Subjunktion als aktiv zu verwendenen Fachbegriff fordert, worauf in der folgenden Stunde eingegangen wird.

Wann der Begriff der Äquivalenz verwendet und die Unterscheidung zwischen Bijunktion und Äquivalenz im Unterrichtsgang thematisiert wird, muss individuell entschieden werden. Man kann dies gleich nach der Behandlung von Aufgabe 2 machen oder erst in der Folgestunde, wenn auch Subjunktion und Implikation voneinander abgegrenzt werden.

2. **Verknüpfungen unter der Lupe**

Diese Aufgabe sieht eine erste Formalisierung vor und ist daher für die Begriffsbildung sehr wichtig. In Auftrag 2a sollen die SuS zunächst die Wahrheitswerte der drei Verknüpfungen formal ermitteln und im Kontext von Aufgabe 1 interpretieren. Eine Differenzierung findet hier über Anzahl und Durchdringungstiefe der Beispiele statt, so dass kein Zusatzauftrag erforderlich ist. Die Präsentation kann flexibel von einer Gruppe übernommen oder auf drei SuS aufgeteilt werden. Die Ergänzung von weiteren passenden Beispielen aus Aufgabe 1 im Plenum sollte für einen ersten sinnbehafteten Zugang ausreichen, der eine angemessene formale Darstellung ermöglicht.
Mit Auftrag 2b) wird danach ein zweiter visueller Zugang angeboten, bei dem Venn-Diagramme eine vertiefte Durchdringung der Zusammenhänge anregen sollen. Gleichzeitig wird aber auch die Interpretation der Boolschen Algebra als Mengenalgebra anschaulich angebahnt, am Beispiel einfacher Verknüpfungen von zwei Aussagevariablen. Dies wird in der vierten Stunde auf drei Variablen erweitert[5], bevor dann in einer möglichen Vertiefung am Ende der Einheit auch verschiedene Interpretationen der Boolschen Algebra angesprochen werden könnten.
Die Abgrenzung der Disjunktion („a oder b“) von der Kontravalenz („entweder a oder b“) wird wegen der hohen Alltagsrelevanz für alle Lerngruppen empfohlen, auch wenn dies im Bildungsplan nicht ausdrücklich gefordert ist. Mit den Spalten (p) bis (s) sind die vom Bildungsplan geforderten Kernkompetenzen zur *Konjunktion*, *Disjunktion* und *Äquivalenz* (bzw. zunächst Bijunktion) abgedeckt und man könnte zu Aufgabe 3 oder 4 übergehen, bevor in der folgenden Stunde die *Subjunktion* eingeführt wird. Im Sinne der spartenübergreifenden Verzahnung des Faches IMP wird hier aber empfohlen, die Gelegenheit zu nutzen und die verschiedenen Logikgatter ebenfalls anzusprechen.

<u>Hinweis</u>:
Falls man bei der folgenden Vertiefung Bedenken hat, kann man in Aufgabe 2 die letzten beiden Spalten, die letzte Zeile und den c)-Teil löschen. Es bietet sich dann an, direkt zu Aufgabe 3 überzugehen oder Aufgabe 4 als Übungsaufgabe zu nutzen.

5 Vgl. Datei `M9aug04_logikraetsel_mit3V.odt`, Aufgabe 2: Wer trinkt Cola?

3. **Vertiefung: Vernetzung mit Inhalten der Informatik**
Grundlagen zu den Logikgattern AND, OR, NOT, XOR, NAND, NOR
Querverweis im Bildungsplan zu Informatik, Klasse 10 (3.3.1.3. Rechner und Netze, (3))

Der Einstellungstest und die Tabelle wurden so angelegt, dass zu den drei Verknüpfungen auch jeweils schon ihre Negationen entdeckt und erforscht werden können. Die Antisymmetrie zur gedachten „Spiegelachse" der Tabelle könnte beispielsweise über zwei kurze Aufträge wie folgt erarbeitet werden.
Die differenzierende Frage „Was fällt bei (r) und (s) auf?" zielt zunächst auf die Entdeckung ab, dass diese beiden Verknüpfungen durch Negation auseinander hervorgehen. Um dies visuell zu unterstützen, wurden diese beiden Spalten in der Mitte nebeneinander angeordnet. Mathematisch ausgedrückt gilt: Durch Negation einer Bijunktion (Äquivalenz) erhält man eine Kontravalenz und umgekehrt. Beachten Sie bitte, dass der Begriff Kontravalenz ergänzend verwendet werden kann, aber vom Bildungsplan nicht als aktiver Fachbegriff gefordert wird.
In der Regel wird man hier auf einer visuellen, intuitiv anschaulichen Ebene argumentieren und den Zusammenhang durch Übereinanderlegen der beiden Venn-Diagramme (als Folien auf einem OHP bzw. unter einem Visualizer) oder durch den Einsatz digitaler Werkzeuge veranschaulichen[6]. Alternativ kann man auch an der Tafel mit zwei Farben arbeiten. Aus didaktischer Sicht wechselt man hierbei aus der Aussagenlogik in den anschaulicheren Bereich der Mengenalgebra[7]: Eine Menge und ihr Komplement ergeben bei der Vereinigung zusammen die Grundmenge, ihre Schnittmenge ist dagegen die leere Menge. Analog gilt im Bereich der Aussagenlogik: Eine Aussage und ihre Negation widersprechen sich, haben also unterschiedliche Wahrheitswerte. Ihre Disjunktion ergibt immer eine wahre, ihre Konjunktion dagegen immer eine falsche Aussage. Dies wird in Aufgabe 3a am Beispiel einer Aussagevariable a und ihrer Negation $\neg$ a aufgegriffen und formalisiert.

Diese Phase wird im Unterricht selbst nicht viel Zeit in Anspruch nehmen, so dass dann in Auftrag 2c Konjunktion und Disjunktion negiert werden können, um die Gatter NOR und NAND kennen zu lernen, die in der Schaltalgebra wichtig sind, da alle Logikschaltungen aus einem dieser beiden Gattertypen aufgebaut werden können[8]. In der letzten Zeile der Tabelle könnten dann zur Ergebnissicherung die üblichen Gatterbezeichnungen eingetragen werden.

4. **Tautologisch?!**
Bevor in der folgenden Stunde die Subjunktion eingeführt wird, sollten noch erste Vorstellungen zu tautologischen Aussagen entwickelt werden. Der Begriff Tautologie muss dabei nicht als aktiver Fachbegriff bekannt sein, es schadet aber sicher auch nicht, ihn einmal zu erwähnen. Ich habe mich daher dafür entschieden, ihn im Zusammenhang mit allgemeingültigen Aussagen im Rahmen einer Definition in Aufgabe 3 einzuführen, da er grundlegend für die später in Klasse 10 zu beweisenden Rechengesetze ist.

Jede Tautologie kann auch als allgemeingültiges Rechengesetz gesehen werden.
Hier werden zunächst nur drei einfache Tautologien / Gesetze betrachtet:

6 Die GeoGebra-Datei `M9aug00_VENN2-Ueberblick_alle16.ggb` im Ordner 5_praesentationen kann im Bereich der Aussagenlogik oder Mengenalgebra eingesetzt werden, um die acht Negationen zu zeigen, die bei den 16 boolschen Funktionen möglich sind (vgl. Dualitätsprinzip).
7 Aussagenalgebra und Mengenalgebra sind strukturgleiche Interpretationen der Boolschen Algebra, vgl. Erläuterungen in `M9aug01_hintergrund.odt` im Ordner 1_hintergrund.
8 Vgl. z.B. [BEU] 10.4.1 Satz zur NAND- und NOR-Technik, S. 256 ff.

$a \vee (\neg a)$	Existenz des Komplements:	$x \vee (\neg x) = w$
$\neg (a \wedge (\neg a))$	Existenz des Komplements:	$x \wedge (\neg x) = f$, durch Negation folgt $\neg (x \wedge (\neg x)) = w$,
$(\neg(\neg a)) \Leftrightarrow a$	Involutionsgesetz:	$(\neg(\neg x)) = x$

In Teilaufgabe b) wird der Bezug zu Venn-Diagrammen angesprochen und die Idee der „Allmenge“ bzw. Grundmenge ins Spiel gebracht, um mit dem Begriff der Tautologie auch eine passende visuelle Vorstellung zu verknüpfen.
Im Rahmen einer Vertiefung könnte im Anschluss die ergänzende Aufgabe 7 genutzt werden, um als Fingerübung schon einmal die De Morganschen Regeln als Tautologie (Rechengesetz) zu charakterisieren.
Der Hinweis auf die bekannten und in die Aussagenalgebra übertragbaren Vorfahrts- und Klammerregeln sollte hier genügen, um an geeigneten Stellen Schreibarbeit zu sparen. Im weiteren Verlauf sollten diese aber behutsam eingesetzt werden. Im Zweifelsfall wird man lieber eine Klammer zu viel als zu wenig setzen.

5. **Uhrendieb**
Diese Aufgabe ist als passgenaue Übung konzipiert, um anknüpfend an die vorangegangene Stunde ein erstes Logikrätsel mit 3 Aussagevariablen zu lösen, bei dem die drei neu eingeführten Verknüpfungen Konjunktion, Disjunktion und Bijunktion auftreten.
Gleichzeitig werden die zur systematischen Aufführung aller möglichen Konstellationen erforderlichen kombinatorischen Hilfsmittel erneut angewendet.

6. **Im Tresor**
Diese Aufgabe kann entweder als alternativer (und etwas anspruchsvollerer) Einstieg statt Aufgabe 1 oder als ergänzende Übung genutzt werden, auch für die Hausaufgabe.

Die „xxl-Variante“ des Einstellungstests (`M9aug02_zusatz_Test-xxl.odt)` kann übrigens in einer sehr starken Lerngruppe für zusätzliche Herausforderungen sorgen, entweder als Hausaufgabe oder auch in einer Weihnachts- oder Rätselstunde im Laufe des Schuljahres.

7. ***Vertiefung zur Äquivalenz***
Aufgabe 6 kann für starke Gruppen eingesetzt werden, um den Umgang mit Wahrheitswerttabellen zu üben und nebenbei die Zusammenhänge rund um die Äquivalenz zu vertiefen. Hier werden nun Teilaussagen zusammengesetzt und mithilfe von Venn-Diagrammen veranschaulicht. Dabei handelt es sich letztlich um eine Darstellung der Äquivalenz in „konjunktiver Normalform“.[9]

Für ganz schnelle Logiker befindet sich auf der Lösungsseite zu Aufgabe 6 noch eine weitere Aufgabe, in der die Regeln von De Morgan mit einer Wahrheitswerttabelle schon in Klasse 9 bewiesen werden können. Dies wird in Klasse 10 für alle verbindlich anstehen und könnte dann ggf. auch von den SuS im Rahmen eines Vortrags übernommen werden, die sich das in Klasse 9 bereits als Vertiefung selbst erarbeitet haben.

9 Vgl. Datei "M9aug01_hintergrund.odt", zum Nachlesen auch empfohlen: [BEU], Kap. 10.2 Boolsche Funktionen und ihre Normalformen. Dort wird auch der Umgang mit Karnaugh-Veitch-Diagrammen (kurz KV-Diagramme) sehr anschaulich erläutert. Dabei handelt es sich um eine grafische Methode zur Vereinfachung von boolschen Ausdrücken mit bis zu vier Aussagevariablen. Sie können z.B. zur Vereinfachung von Gatterschaltungen eingesetzt werden stehen u.a. auch im Informatikunterricht der Kursstufe im Kontext der Schaltalgebra auf dem Programm.

3. Stunde: Subjunktion und Implikation

Möglicher Ablauf, Inhalte

- Hausaufgabenvergleich, Präsentation durch SuS
- Auftrag 1: (AB, Nr. 1a)
  „Tragt eure Vermutungen in die erste Spalte ein."
  Zusatz: Findet eigene Beispiele für „Wenn-dann-Aussagen".
  S. präsentieren ihre Vermutungen und nennen Beispiele, von denen 2-3 an der Tafel notiert werden. Daran wird wiederholt, dass eine Folgerung aus zwei Teilen besteht: Voraussetzung (wenn...) und Behauptung (dann…), Alltagssprachliche und aussagenlogische Bedeutungen werden unterschieden und der der Begriff "Subjunktion" für eine Folgerung eingeführt und anschließend mit Aufgabe 2 formal gefasst und definiert.
- Auftrag 2: „Füllt die Tabelle aus." (AB, Nr. 2, Subjunktion)
  Präsentation durch SuS, daran anschließend im Unterrichtsgespräch Definition der Subjunktion über ihre Wahrheitswerte (in der letzten Spalte der Tabelle).
- Subjunktion als Disjunktion (AB, Nr.3)
  Ausgehend vom alltagssprachlichem Bezug („Tritt nicht über oder der Versuch ist ungültig") erfolgt die Rückführung einer Subjunktion auf eine Disjunktion mittels $\neg$, $\vee$:
  Auftrag 3a: SuS entdecken Zusammenhang beim Ausfüllen
  Präsentation durch SuS, Ergänzung durch L., dann Vertiefung:
  Auftrag 3b+c: Venn-Diagramm passend färben,
  ggf. als Zusatzauftrag: Formulierung der Erkenntnis
  Präsentation durch SuS, in der Weiterführungsphase Verständnis vertiefen (Vernetzung des Venn-Diagramms mit der Definition der Subjunktion, vgl. Erläuterungen zu 3b),c))

  Überleitung zu 4a), dort ist diese Äquivalenz formal dargestellt.
- Subjunktion und Implikation (AB, Nr. 4)
  Auftrag 4a: Analyse und Interpretation der Tabelle
  Verbale Beschreibung des Vorgehens durch SuS.
  Auftrag 4b: Übertragung auf einfache zweite Tautologie
  Präsentation, Ergebnissicherung, danach:
  Definition: Implikation als allgemeingültige Subjunktion
  (ggf. Auch Ergänzung: Äquivalenz als allgemeing. Bijunktion)
- Übung, falls Zeit (aus AB Nr. 5,6,7)
- Abschließende Reflexion der Stundeninhalte, ggf. an einem weiteren alltagsnahen Beispiel entwickeln, vgl. Erläuterungen
- Stellen der Hausaufgaben (aus dem Fundus des AB)

Hinweise

- Material:
  `M9aug03_sub_imp.odt`
- Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung
- Didaktische Stufung der Erarbeitung:
  1) Alltagsbezug und -sprache führen zu kognitivem Konflikt (kontraintuitiv)
  2) Formale Definition der *Subjunktion* über Wahrheitswerttabelle
  3) Rückführung auf Disjunktion Grundvorstellungen, Visualisierung
  4) *Subjunktion* und Implikation Abgrenzung der beiden Begriffe
- bei Bedarf kann ein weiteres sinnstiftendes Beispiel herangezogen werden, bevor Schritt 3 angegangen wird. Hier bietet sich Aufgabe 6 als innermathematisches Beispiel an.
- ggf. könnte man nach Auftrag 3b) die Formalisierung der erkannten Äquivalenz: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ an der Tafel entwickeln und sichern, bevor zu Aufgabe 4 übergeleitet wird, in der ein neuer Typ von Übungsaufgaben zu Wahrheitswerttabellen eingeführt wird.
- Alternative:
  Falls man die Implikation erst später thematisieren möchte, kann man Auftrag 4 auf die Folgestunde verschieben und zunächst Anwendungsaufgaben aus dem Fundus wählen.
- Das Applet M9aug02_VENN-2Var.ggb kann als Übungsumgebung zum Visualisieren mit Venn-Diagrammen eingesetzt werden, auch auf den Endgeräten der SuS.[10]

Erläuterungen

Aus dem Mathematikunterricht kennen die SuS bereits Implikationen ($a \Rightarrow b$, lies „a impliziert b" oder „aus a folgt b"). Da der Begriff *Subjunktion* als aktiv zu verwendeter Fachbegriff gefordert wird, ist im Unterricht die für SuS sicherlich schwierige Unterscheidung zwischen *Subjunktion* und Implikation erforderlich. Dazu wurde eine Erarbeitung in den oben genannten vier Schritten gewählt, die in den Hinweisen zu den einzelnen Aufgaben nun erläutert werden.

10 Die Applets der Einheit stehen unter *https://ggbm.at/k7u4ab9v* zur Verfügung (letzter Abruf:15.5.2019).

1. **Folgerungen im Alltag**

Beispiele aus der Alltagssprache haben immer ihre Unschärfen und Tücken, da man meist von kausalen oder zeitlichen Zusammenhängen ausgeht, die aber in der Aussagenlogik keine Rolle spielen. Der Wahrheitswert einer Aussage hängt einzig und allein von den Wahrheitswerten der beteiligten Teilaussagen ab, so auch bei der Subjunktion. Beispielsweise ist die völlig unsinnig erscheinende Aussage „Wenn Konstanz in England liegt, dann ist 2+3=7“ eine im Sinne der Aussagenlogik wahre Aussage! Man muss kausale und temporäre Zusammenhänge völlig ausblenden, was den SuS sicherlich zunächst nur mehr oder weniger gut gelingen wird, aber auch eine wichtige Herausforderung darstellt.
Über den Bezug zur Alltagssprache kann man daher nur erste Ideen anbahnen und eine vage Ahnung davon vermitteln, was unter einer Subjunktion zu verstehen ist. Der Alltagsbezug wirkt in gewissem Sinne sogar kontraproduktiv, da man meist kausale oder temporäre Aspekte betont. Dies sollte im Unterrichtsgespräch nach Aufgabe 1 herausgearbeitet werden. Daher wurden kontrastierende Beispiele eingebunden, um einen kognitiven Konflikt zu erzeugen, der dann im Gespräch thematisiert und im Laufe der Stunde aufgelöst werden kann.
Die SuS tragen in der ersten Spalte ihre Vermutungen ein, die auch unkommentiert stehen bleiben können.
Nach der Bearbeitung und Präsentation könnte man zusätzlich 2-3 Schülerformulierungen an der Tafel notieren und ggf. eigene ergänzen, um später darauf zurückgreifen zu können, z.B.
(1) *Wenn man in der Arbeit betrügt, dann bekommt man eine „6“.*
(2) Wenn man morgens „verschläft“, dann kommt man zu spät in die Schule.

Man sollte noch wiederholen, dass eine Folgerung aus zwei Teilen besteht, der Voraussetzung und der Behauptung und dies an den Beispielen konkretisieren.
Möglicherweise wird man hier schon auf einen weit verbreiteten Denkfehler eingehen, falls die SuS vermuten, dass die Voraussetzung a wahr sein muss, wenn die Folgerung $a \rightarrow b$ korrekt ist. Wenn $a \rightarrow b$ wahr ist, kann man daraus nicht ableiten, dass auch a wahr sein muss. Die Wahrheit von b ist zwar notwendig für die Wahrheit von a, aber nicht hinreichend. Auch bei einer falschen Voraussetzung a kann bekanntlich die Folgerung $a \rightarrow b$ wahr sein.
Dies könnte man auch an Alltagformulierungen einsichtig machen. Die Aussage „Wenn es regnet, dann wird die Straße nass“ bleibt wahr, auch wenn es nicht regnet. Dass es regnet ist hinreichend dafür, dass die Straße nass wird. Dagegen ist eine nasse Straße zwar notwendig, aber nicht hinreichend dafür, dass es regnet.[11]

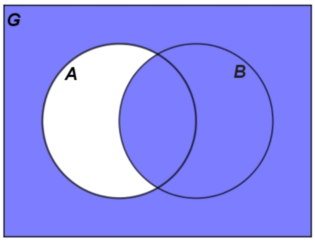
2. **Subjunktion – „Wenn a, dann b“**

Die Defintion der Subjunktion bereitet Probleme, da sie zunächst kontraintuitiv ist und erst später klar wird, warum sie Sinn macht und warum man aus einer falschen Aussage tatsächlich wie oben beschrieben alles folgern darf. Hier greift nun die „Eleganz und Klarheit des Formalen“, die den SuS in Gestalt der Wahrheitswerttabelle der Subjunktion begegnet.
Beim Ausfüllen der Tabelle werden zunächst die „Wahrheitstafeln“ der Konjunktion und Bijunktion zur Wiederholung eingetragen. Dies erleichert das Entdecken von Widersprüchen, falls sie für die Subjunktion falsche Vermutungen eintragen, da sich deren Wahrheitstafel von den Tafeln der anderen beiden Verknüpfungen unterscheiden muss.
Nach der Präsentation kann man sich im Plenum auf einen Formulierungsvorschlag für die Definition der Subjunktion auf Basis ihrer Wahrheitstafel verständigen.

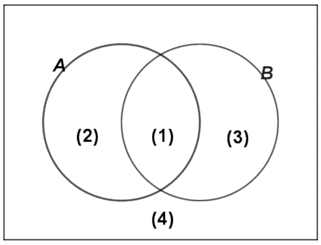
Falls vor der Erweiterung der Vorstellungen zur Subjunktion in Aufgabe 3 noch weitere Beispiele erforderlich sein sollten, könnte man beispielsweise Aufgabe 6 vorziehen, in der die Subjunktion zusätzlich an einem innermathematischen Beispiel motiviert werden kann.

11 Bei der Implikation $a \Rightarrow b$ gilt: b ist notwendig für a und a ist hinreichend für b. Nähere Erläuterungen hierzu findet man in der Datei `M9aug01_hintergrund.odt` im Ordner 1_hintergrund.

3. Subjunktion als Disjunktion



Im entscheidenden Begriffsbildungsschritt wird in Aufgabe 3 die Wenn-dann-Verknüpfung auf die bekannten Junktoren $\neg$ und $\vee$ zurückgeführt und dabei vermittelt, dass die Subjunktion $a \rightarrow b$ als Disjunktion $\neg a \vee b$ aufgefasst werden kann. Dies zielt langfristig auch auf konjunktive bzw. disjunktive Normalformen (KNF bzw. DNF) ab, die hier ins Spiel kommen, ohne dass dies thematisiert wird.
In Klasse 9 ließe sich der „didaktische Kern" der Normalformen als optionale Vertiefung anschaulich am Venn-Diagramm motivieren. So entspricht beispielsweise jede "Vollkonjunktion" der atomaren Aussagen (bzw. ihrer Negationen) in den einzelnen Zeilen der Wahrheitstafel genau einer der vier nummerierten Teilflächen im Venn-Diagramm.[12] Für die Subjunktion gilt dabei:



	kanonische konjunktive Normalform (KKNF)		kanonische disjunktive Normalform (KDNF)
$(a \rightarrow b) \Leftrightarrow$	$(\neg a \vee b)$	$\Leftrightarrow$	$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$
	$\neg$ (2)		(1) (3) (4)

Für die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe spielt dieser didaktische Hintergrund absolut keine Rolle. Die SuS sollen hier nur entdecken, dass jede Subjunktion als Disjunktion aufgefasst werden kann und halten diese Erkenntis fest.

Zur Abrundung kann man Bezug auf die Beispiele der SuS nehmen und diese nun auch als Disjunktion formulieren lassen.
Formulierung als Subjunktion $a \rightarrow b$:
(1) *Wenn man in der Arbeit betrügt, dann bekommt man eine „6".*
(2) Wenn man morgens „verschläft", dann kommt man zu spät in die Schule.

Formulierung als Disjunktion $\neg a \vee b$:
(1) Nicht Betrügen oder eine „6" bekommen.
(2) Nicht Verschlafen oder zu spät in die Schule kommen.

Überleitung zur nächsten Aufgabe:
Die in Nr. 3 entdeckte Äquivalenz $(a \rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ ist in der folgenden Aufgabe Nr. 4 in der linken Wertetabelle formal dargestellt, worauf bei Bedarf zurückgegriffen oder verwiesen werden kann.

4. Subjunktion und Implikation

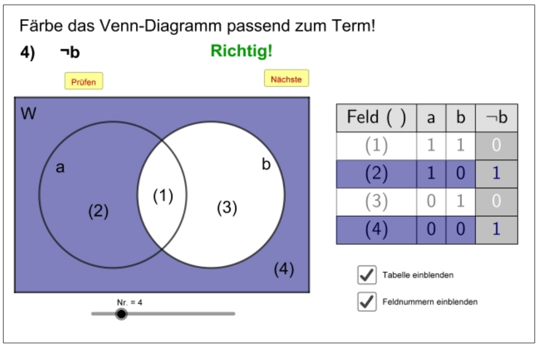
In Nr. 4 geht es zunächst um die modifizierte Verwendung einer Wahrheitstafel, mit der man einen Aussageterm übersichtlich auf Allgemeingültigkeit prüfen kann. Die SuS sollen dies in einem ersten Partnerarbeitsauftrag (4a) am Beispiel einer allgemeingültigen Bijunktion analysieren und im Plenum erläutern. Nach der Präsentation kann die in der Tabelle bewiesene Äquivalenz $(a \rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ in der letzten Tabellenzeile eingetragen werden.
Mit Auftrag 4b werden anschließend zwei Ziele verfolgt. Einerseits soll die modifizierte Verwendung der Wahrheitstafel auf ein zweites einfaches Beispiel übertragen werden.[13] Andererseits wurde eine allgemeingültige Subjunktion gewählt, so dass der Begriff der

12 Vgl. Erläuterungen zu den Normalformen in: `M9aug01_hintergrund.odt` im Ordner 1_hintergrund.

13 Damit wird gleichzeitig ein Aufgabentyp vorbereitet, für den im Internet ein digitaler Wahrheitstafel-Trainer zur Verfügung steht, vgl. Hinweise zu Aufgabe 7.

Implikation gleich mit dem der Subjunktion kontrastiert und vernetzt werden kann: Jede Implikation ist eine Subjunktion, aber umgekehrt ist nicht jede Subjunktion eine Implikation. Wie intensiv man diese begrifflichen Feinheiten aufgreift und thematisiert, hängt von der Situation der Klasse ab. Nicht alle SuS werden die Nuance zwischen Subjunktion und Implikation verinnerlichen. Die Implikation ist sicher der wichtigere Begriff, auch wenn er im Bildungsplan für IMP in dieser Einheit nicht als aktiver Fachbegriff gefodert wird. Außerdem sei angemerkt, dass viele Autoren hier aktuell nicht mehr differenzieren.[14]

Einsatz digitaler Werkzeuge
Zur Vertiefung des Zusammenhangs zwischen symbolischer Darstellung, Wahrheitswerttabelle und Venn-Diagramm kann im Unterrichtsgang nun auch das Applet M9aug02_VENN-2Var.ggb eingesetzt werden.[15] In der Aufgabenserie sind 20 Terme hinterlegt, deren Venn-Diagramme passend gefärbt werden müssen. Die Tabelle kann dabei auch ausgeblendet werden.



5. **Im Kino**

Mit dieser Übungsaufgabe werden mehrere Ziele verfolgt. Zunächst soll das neue mit dem alten Wissen vernetzt und angewendet werden. Dazu wurden nun Konjunktion, Disjunktion und Subjunktion eingebunden, wobei der Schwerpunkt auf der eingeführten Subjunktion liegt. Weiterhin wurden differenzierende Zusatzaufträge berücksichtigt wie z.B. das Aufstellen der aussagenlogischen Terme im a)-Teil. Ebenso kann der b)-Teil auch nur von einem Teil der SuS bearbeitet werden, da die logische Argumentation eventuell für manche SuS schwieriger ist als das Aufstellen und Ausfüllen der Wahrheitstafel. Im Unterricht sollten dann möglichst beide Vorgehensweisen angemessen berücksichtigt und präsentiert werden.
Außerdem besteht die Möglichkeit, den Übergang zur binären Logik durch die übersichtlichere Darstellung mittels Nullen und Einsen anzubahnen. In der Musterlösung wurden daher hier erstmals die Wahrheitswerte (w/f) durch (1/0) ersetzt.

6. **Gerade oder ungerade?**

Mit diesem Beispiel kann man die Begriffsbildung zur Subjunktion bei Bedarf mit einem innermathematischen, einleuchtenden Beispiel unterstützen. In den Musterlösungen wurden die Überlegungen auf die wesentlichen anschaulichen Aspekte reduziert. Man könnte hier aber im Sinne der Vernetzung mit der Zahlentheorie auch kurze formale Beweise führen, was für stärkere Gruppen eine reizvolle Vertiefung ermöglicht:

„Für alle natürlichen Zahlen m und n gilt: „Wenn m gerade ist, dann ist auch m·n gerade.“
*Mit **a:** „m ist gerade“ und **b:** „m·n ist gerade“ ist also zu beweisen, dass a → b wahr ist.*
Die Zahl n kann gerade (g) oder ungerade (u) sein, es gibt keine Einschränkungen.
Die vier möglichen Fälle werden näher untersucht:

(1) m, n beide gerade	*(2) m gerade, n ungerade*
(3) m ungerade, n gerade	*(4) m, n, beide ungerade*

14 Die Unterscheidung zwischen Subjunktion und Implikation wird unterschiedlich gehandhabt. In älteren Werken taucht der Begriff der Subjunktion noch auf, aktuelle Autoren verwenden oft auch nur noch den Begriff der Implikation, z.B. [AHR], S. 22 , [BEU], S. 247 oder [AIG], S. 218. In anderen Quellen wird die Subjunktion als materiale Implikation von der formalen Implikation abgegrenzt.
15 Die Applets der Mathematikeinheiten zu IMP9 sind unter *https://ggbm.at/k7u4ab9v* abrufbar. Dieses Vorgehen hat u.a. den Vorteil, dass die Auflösungen automatisch an die Endgeräte angepasst werden.

m	n	Argumentation
g	*g*	*Die beiden geraden Zahlen kann man als m=2 j bzw. n=2 k schreiben, wobei j und k ganze Zahlen sind, also* $j, k \in \mathbb{N}$ *. Es gilt dann für das Produkt:* ***m · n = 2 j · 2 k = 4 j k = 2 · (2 j k)****, man erhält eine gerade Zahl.* *Sowohl Bedingung a als auch Folgerung b sind wahre Aussagen.* *Die Subjunktion a → b ist ebenfalls wahr.*
g	*u*	*Es gilt weiterhin m = 2 j mit* $j \in \mathbb{N}$ *. Die ungerade Zahl n lässt sich als n=2·k +1 schreiben, mit* $k \in \mathbb{N}$ *.Für das Produkt gilt dann:* ***m · n = 2 j · (2k + 1) = 4 j k + 2 j = 2 · (2 j k + j)****,* *es ergibt sich eine gerade Zahl.* *Bedingung a und Folgerung b sind wiederum beide wahr.* *Die Subjunktion a → b ist ebenfalls wahr.*
u	*g*	*Nun wird der umgekehrte Fall betrachtet und für das Produkt folgt:* ***m · n = (2 j + 1) · 2 k = 4 j k + 2 k = 2 · (2 j k + k)****,* *man erhält eine gerade Zahl.* *Nun ist die Bedingung a zwar falsch und die Folgerung b wahr.* *Die Subjunktion a → b ist aber weiterhin eine wahre Aussage.*
u	*u*	*Im letzten Fall sind nun beide Zahlen ungerade und für das Produkt folgt:* ***m · n = (2 j + 1) · (2 k + 1) = 4 j k + 2 j + 2 k + 1 = 2 · (2 j k + j + k) + 1****,* *hier erhält man eine ungerade Zahl.* *Sowohl Bedingung a als auch Folgerung b sind hier falsche Aussagen.* *Die Subjunktion a → b ist aber davon unberührt eine wahre Aussage.*

Für alle möglichen Fälle ist die Subjunktion a → b also wahr und damit eine Tautologie. Folgt man den Regeln der klassischen Aussagenlogik, so dürfte man sie erst nach dem formalen Beweis als Implikation a ⇒ b bezeichnen.[16]
Insgesamt könnte man mit diesem kleinen Exkurs bestätigen, dass die Subjunktion a → b wirklich nur dann falsch ist, wenn die Bedingung a wahr <u>*und*</u> *die Folgerung b falsch ist.*

7. **Allgemeingültig?!**
Aufgabe 7 dient der Vertiefung der Wahrheitswerttabellen. Insbesondere die Wahrheitstafel auf der rechten Seite bereitet die Struktur vor, die Jan Schreiber für seinen Wahrheitstafel-Trainer gewählt hat, der sich effektiv für vertiefende Übungsphasen einbinden lässt.[17]

8. **Weltrekord!**
Aufgabe 8 ist eine vertiefende Anwendungsaufgabe mit 3 Variablen, die in Subjunktionen sowie Disjunktionen eingehen. Die Wahrheitstafel wird hier aber nicht wie eingeführt verwendet, vielmehr ist ein Blick über den Tellerrand erforderlich. Auf der linken Seite werden die möglichen Zieleinlaufskombinationen betrachtet. Die Aufgabe eignet sich daher zur Vernetzung von Kombinatorik und Aussagenlogik und bietet nebenbei die Gelegenheit, historische sportliche Höchstleistungen wahrzunehmen und zu würdigen.

16 Wie schon erläutert, hat sich die Situation in der aktuellen Literatur gewandelt. Folgt man dieser Sichtweise, so sind Implikationen nicht mehr per se allgemeingültige Aussagen, sie können wahr oder falsch sein. Der Begriff der Subjunktion ist bei dieser Sichtweise nicht erforderlich.
17 Der Wahrheitstafel-Trainer wurde von Jan Schreiber (Uni Duisburg) programmiert und ist aktuell unter zwei Adressen aufrufbar: 1) *http://www.wi.hs-wismar.de/~cleve/vorl/ti2027/wtafeln/index.html* 2) *http://www.duplexnegatioaffirmat.de/wahrheitstafel-trainer/* (zuletzt abgerufen am 25.3.2019).

4. Stunde: Logikrätsel mit drei Variablen

Möglicher Ablauf, Inhalte	Hinweise
• Hausaufgabenvergleich, Präsentation durch SuS • Warm-Up (AB, Nr.1, Nasse Straße) Wiederholung der Subjunktion am Beispiel „Wenn es regnet, dann wird die Straße nass", dann Vertiefung durch Erweitern der Aussage: „Die Straße wird aber nicht nass." Auftrag 1a: Term aufstellen, Zwischensicherung: *S. trägt Überlegungen vor und trägt Term in Kopfzeile ein* Auftrag 1b: Ist die Verknüpfung allgemeingültig? → SuS füllen die Tabelle aus und interpretieren das Ergebnis *S. präsentiert Wahrheitstafel, Erkenntnis: Implikation!* • Schwerpunkt der Stunde: Übung (AB, Nr.2, „Wer trinkt Cola?") Nach der gemeinsamen Definition der Aussagen a,b,c folgt Auftrag 2a: „Notiert zu den Aussagen (I)-(IV) passende Terme und begründet eurer Vorgehen bei der Präsentation." *Präsentation durch SuS (z.B. 2 S. jeweils 2 der Terme)* Auftrag 2b: Wahrheitswerte zu den Aussagen (I)-(IV) eintragen + 2c als Zusatzauftrag für schnelle SuS stellen. *Präsentation zu 2b durch S. ->„Alina und Birgit trinken Cola",* *Präsentation zu 2c: Exkurs zu Binärzahlen zum systematischen Ausfüllen möglich, vgl. Erläuterungen* Auftrag 2d: Kennzeichne die acht Teilflächen im Venn-Diagramm passend zu den acht Tabellenzeilen, Vernetzung *Präsentation durch S., Weiterführung in folgender Phase:* • nach Nr. 2: Vertiefung und Sicherung an der Tafel: Venn-Diagramm und Wahrheitstafel, *vgl. Erläuterungen* Auftrag 3a: Teilflächen passend zu Tabellenzeilen nummerieren. *Präsentation durch SuS* Auftrag 3b: Zwei der acht möglichen Vollkonjunktionen als Terme zu vorgegebener Wahrheitstafel aufstellen. Auftrag 3c/d: Lehrervortrag: Nutzung eines Venn-Diagramms als visuelles Hilfsmittel zum Lösen bestimmter Logikrätsel prozessbegleitende Sicherung an der Tafel (vgl. Erläuterungen) Optionale Vertiefungsmöglichkeiten, vgl. Erläuterungen • Übung (AB, Nr. 3), Anwendung der Strategie des Ausschließens Verzahnung mit dem Ausfüllen der Wahrheitswerttafel • Abschließende Reflexion der Stundeninhalte • Stellen der Hausaufgaben (z.B. Nr. 4 oder 5)	• Material: `M9aug04_logikraetsel_mit3V.odt` • Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung und differenzierende Zusatzaufträge. • Nr. 1 greift die Inhalte der letzten Stunde auf und verdeutlicht den Zusammenhang von Subjunktion und Implikation. Mögliche Differenzierung "nach unten": bei 1a den Term bereits in der Kopfzeile vorgeben und ihn von den SuS interpretieren lassen. • Aufgabe 2 dient der Wiederholung von Disjunktion, Bijunktion bzw. Äquivalenz und Kontravalenz sowie Subjunktion und ermöglicht die Vernetzung von Aussagen- und Mengenalgebra im Falle von drei Aussagevariablen. • Der differenzierende Zusatzauftrag 2c dient gleichzeitig dem Brückenschlag zur binären Logik und nimmt das Vorgehen beim Ausfüllen der linken Tabellenhälfte in den Blick. Muster der Tabellenbereiche könnten analysiert werden, vgl. Erläuterungen. • Die Feinstufung der Aufträge 2a) bis 2d) kann flexibel angepasst werden, ggf. wird man kombinieren, streichen oder ergänzen, um der eigenen Lerngruppe gerecht zu werden. • Vertiefung durch Visualisierung mit einem Venn-Diagramm, Vorstellungen zur Disjunktiven Normalform (DNF) werden angelegt, vgl. Erläuterungen. • Blick auf Venn-Diagramme wird erweitert. Nach Aufgabe 2 werden sie auch als heuristisches Hilfsmittel zur Lösung von Logikrätseln eingeführt und bei Nr 3 zur Übung verwendet.

Erläuterungen

Die vierte Stunde steht im Zentrum der Einheit und wird daher hier ausführlich dokumentiert. Es soll geübt und vertieft werden. Die eingeführten Junktoren wurden dazu bei Logikrätseln mit drei Variablen eingebunden. Es wird mit Wahrheitstafeln gearbeitet und deren Struktur durch die engere Verzahnung mit Venn-Diagrammen aus einem neuen Blickwinkel betrachtet. Die möglichen Kombinationen (Vollkonjunktionen) auf der linken Seite der Tabelle werden im Venn-Diagramm als Teilflächen visualisiert und dadurch intuitiv als Bausteine erkannt, aus denen sich

beliebige Aussagen zusammensetzen lassen. Dadurch werden auch erste tragfähige Grundvorstellungen zur KDNF (Kanonische Disjunktive Normalform) angelegt, die curricular im Fach Informatik in der Kursstufe behandelt wird.
Es folgen Erläuterungen zur Konzeption der einzelnen Übungsaufgaben und ihrer Einbettung in einen möglichen Unterrichtsverlauf:

1. **Nasse Straße[18] - Warm up**

Die erste Aufgabe ermöglicht die Wiederholung der Inhalte der letzten Stunde und knüpft direkt an das klassische Alltagsbeispiel „Nasse Straße“ an. Vor dem Austeilen des Arbeitsblattes kann man die aus der letzten Stunde bekannte Subjunktion wiederholen und deren „kontraintuitive“ Definition mittels ihrer Wahrheitstafel nochmals herausarbeiten.
Danach wird die weitere Aussage „Die Straße ist nicht nass“ hinzugenommen und die Aufgabe an der Tafel entwickelt. Durch die vorstrukturierte Tabelle auf dem Arbeitsblatt werden die SuS beim Aufstellen eines passenden aussagelogischen Terms unterstützt. Sie sollen hier selbst entdecken, dass die beiden vorgegebenen Aussagen $p \to q$ und $\neg q$ durch eine Konjunktion verknüpft werden müssen. Als Gesamtaussage wurde hier eine Implikation gewählt, deren Wahrheitsgehalt mit der Tabelle übersichtlich überprüft werden kann. So können die SuS nochmals den Zusammenhang zwischen Subjunktion und Implikation reflektieren.
Hinweis: Falls der Begriff Tautologie eingeführt wurde, sollte man ihn hier verwenden und herausarbeiten, dass jede Tautologie als „Rechengesetz“ / als „aussagenlogisches Gesetz“ aufgefasst werden kann. Jede tautologische Subjunktion ist eine Implikation.

2. **Wer trinkt Cola?[19] - "Kernaufgabe" der Unterichtseinheit**

Im Zentrum der Stunde und der gesamten Unterrichtseinheit steht die Aufgabe Nr. 2, die daher auch ausführlich behandelt werden sollte. Sie verfolgt konzeptionell mehrere Ziele:
1) Am Beispiel eines typischen Logikrätsels mit drei Aussagevariablen werden die bisher bekannten Junktoren und das Ausfüllen von Wahrheitstafeln wiederholt und vertieft.
2) Es erfolgt der Übergang von den Wahrheitswerten wahr/falsch (w/f) auf die abstrakteren, binären Wahrheitswerte eins/null (1/0), deren Vorteile entdeckt werden und mit denen im weiteren Verlauf auch "gerechnet" werden kann.
3) Durch die Vernetzung der Wahrheitstabelle mit dem zugehörigen Venn-Diagramm im Sinne des E-I-S-Prinzips werden Grundvorstellungen zur Struktur von Wahrheitstafeln vertieft.
4) Es werden intuitive Vorstellungen zur KDNF angelegt, ohne diese zu früh zu abstrahieren.

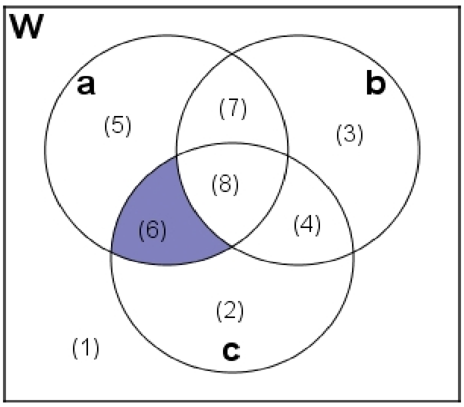
Die SuS übersetzen zunächst die vier Aussagen in Terme und wiederholen dabei bekannte Begriffe. Es sollte im Rahmen der Schülerpräsentation oder in der Weiterführung wiederholt werden, dass es sich bei den vier Aussagen um zwei Subjunktionen (I und IV), eine Negation einer Bijunktion / Äquivalenz (II, auch Kontra- oder Antivalenz genannt) und eine einfache Disjunktion (III) handelt. In den freien Feldern darunter können diese Verknüpfungen mit den Basisjunktoren $\neg, \wedge, \vee$ dargestellt werden. Die Eigenschaft, dass alle Verknüpfungen auf diese drei Junktoren zurückzuführen sind, liegt bekanntlich der Schaltalgebra zugrunde und kann hier kurz thematisiert werden. Die Verzahnung mit der Einheit „Elektrodynamik und Informationsverarbeitung“ (vgl. Bildungsplan IMP 3.2.3.1, (1)) bietet sich an, wobei in Klasse 9 noch nicht daran gedacht ist, hier auch das NAND-Gatter oder NOR-Gatter als "Universalbausteine" ins Spiel zu bringen.

18 Die didaktische Aufbereitung dieses Beispiels basiert auf den bei [ARZ], 1973, S.18 dokumentierten Überlegungen. Dort findet man bei Bedarf weitere Beispiele und Aufgaben zur Vertiefung.
19 Diese Aufgabe wurde in Anlehnung an ein Rätsel von Martin Gardner (Wer bestellt einen Martini?) konzipiert (vgl. [GAR], 1984, S. 108.) In seinem lesenswerten Buch „Mathematischer Zirkus“ greift Gardner die „Boolsche Algebra“ auf und erläutert weitreichende Zusammenhänge, die auch bei der Konzeption dieser Einheit berücksichtigt wurden.

Bei Auftrag 2b erstellen die SuS als Übung die Wahrheitstafel zu den vier Aussagen und verwenden dabei die noch ungewohnte Darstellung mittels Nullen und Einsen. Die Beantwortung der Frage „Wer trinkt Cola?“ sollte keine Probleme bereiten. Danach könnte mit dem differenzierenden Zusatzauftrag 2c auch das Vorgehen auf der linken Tabellenseite erläutert und als hilfreiche Strategie erkannt werden. In der Regel werden die SuS hier selbst das „Hoch- oder Runterzählen“ der Binärzahlen erkennen, was vor allem bei Tabellen mit vier oder gar fünf Variablen nützlich ist. Eine Vertiefung zur Verzahnung der Tabellen mit Binärzahlen ist weiter unten skizziert.

Bei Auftrag 2d) kommt die Mengenalgebra ins Spiel und ermöglicht durch den anschaulichen Zugang über Venn-Diagramme einen neuen Blick auf die Struktur von Wahrheitstafeln. Die acht „Elementarkombinationen“ in den Tabellenzeilen werden als Teilflächen des Venn-Diagramms wahrgenommen, aus denen sich zu jeder Aussage das passende Diagramm durch Vereinigen geeigneter Teilflächen zusammensetzen lässt. Intuitiv werden diese Vollkonjunktionen damit als Bausteine erkannt, aus denen man jede denkbare Aussage durch Disjunktionen zusammensetzen kann. Diese Grundvorstellung führt letztlich zur „Kanonischen Disjunktiven Normalform“ (KDNF) und kann hier altersangemessen angebahnt werden.[20] An dieser Stelle sollte das aber nicht vertieft werden. Dazu bietet sich in der nächsten Stunde der optionale Exkurs zur interaktiven Lernumgebung „LogicTraffic“ von Ruedi Arnold an[21]. Dort kann die Mehrheit der Lerngruppe effizient üben, während einzelne SuS binnendifferenziert an KDNF und KKNF herangeführt werden könnten.

Möglicher Einsatz digitaler Werkzeuge
Während das Tafelbild entwickelt wird, kann die Datei `M9aug04_VENN-3Var.ggb` begleitend oder in einer Reflexionsphase eingesetzt werden. Sie kann auch im Anschluss als Übungsumgebung verwendet werden. Die ersten acht Aussagen decken dabei die oben genannten Elementarkonjunktionen ab, im Screenshot ist exemplarisch die Verzahnung von Diagramm und Tabelle am Beispiel der Vollkonjunktion $(a \wedge \neg b \wedge c)$ zu sehen.[22]



Feld ()	a	b	c	$a \wedge \neg b \wedge c$
(1)	0	0	0	0
(2)	0	0	1	0
(3)	0	1	0	0
(4)	0	1	1	0
(5)	1	0	0	0
(6)	1	0	1	1
(7)	1	1	0	0
(8)	1	1	1	0

Eigenes Bild: Screenshot der GeoGebradatei `M9aug04_VENN-3Var.ggb`

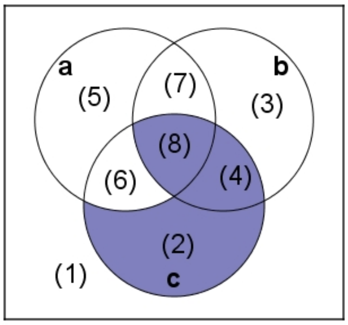
Die acht Teilflächen des Venn-Diagramms müssen durch Anklicken jeweils passend zu dem vorgegeben Aussageterm gefärbt werden. Über Schaltflächen können die SuS dabei ihre Vermutungen überprüfen und werden durch die Übung geführt. Die Progression im

20 Hintergrundinformationen zu den Normalformen findet man in der Datei `M9aug01_hintergrund.odt` im Ordner 1_hintergrund.
21 Unter *https://www.swisseduc.ch/informatik/infotraffic/logictraffic/materialien.html* stellt das swisseduc-Team die von Ruedi Arnold programmierte Lernumgebung „LogicTraffic“ bereit (abgerufen: 23.3.2019).
22 Das Applet ist auch im Verzeichnis "5_praesentationen" abrufbar und enthält 20 Aussagen.

Anforderungsniveau ermöglicht eine interaktive, kooperative und binnendifferenzierende Umsetzung im Computerraum oder evtl. auch mit den Endgeräten der SuS.[23]

Gemeinsame Sicherungsphase nach Bearbeitung von Aufgabe 2, mögliches Tafelbild

Venn-Diagramm und Wahrheitstafel – zwei Seiten derselben Medaille



Feld	Elementare Aussagen			zwei Voll-konjunktionen		Beispiel einer Aussage		
	a	**b**	**c**	**(a∧b∧c)**	**(¬a∧b∧c)**	**(a→b)**	**∧**	**c**
(1)	0	0	0	0	0	1	**0**	0
(2)	0	0	1	0	0	1	**1**	1
(3)	0	1	0	0	0	1	0	0
(4)	0	1	1	0	**1**	1	**1**	1
(5)	1	0	0	0	0	0	0	0
(6)	1	0	1	0	0	0	0	1
(7)	1	1	0	0	0	1	0	0
(8)	1	1	1	**1**	0	1	**1**	1

Die Wahrheitswertkombinationen entsprechen den Teilflächen des Venn-Diagramms.
Im Diagramm setzt sich die zu einer Aussage gehörende Fläche aus den Teilflächen zusammen, deren zugehörige Tabellenzeile in der Aussagenspalte eine 1 enthält (gefärbt =1, weiß=0).

Optionaler Hinweis:

Die Aussage **(a→b)∧ c** ist äquivalent zur Aussage **(¬ a ∧ ¬ b ∧ c) ∨ (¬a ∧ b ∧ c) ∨ (a ∧ b ∧ c)**.
Da es sich dabei um eine *Disjunktion der drei Konjunktionen* handelt, spricht man von der **Disjunktiven Normalform (DNF)** dieser Aussage. Das ∨-Zeichen zwischen den Klammern ist also namensgebend.

In dieser Phase wird das Tafelbild gemeinsam entwickelt und von den SuS ins Heft übertragen. Unterstützend könnte man auch ein Arbeitsblatt mit leerer Tabelle und ungefärbtem Venn-Diagramm als Vorlage einsetzen. Die Anordnung wird man auf die eigene Tafel abstimmen. Grundsätzlich erscheint es sinnvoll, zunächst die Spalten 1-4 (Feld+Elementare Aussagen) erstellen zu lassen und dann mit gestuften Arbeitsaufträgen den Zusammenhang zwischen Teilflächen im Venn-Diagramm und den Tabellenzeilen in den Blick zu nehmen. Das kann flexibel gestaltet werden. In einem ersten Auftrag könnten die Teilflächen im Diagramm passend zur Spalte 1 nummeriert werden, im zweiten Auftrag dann exemplarisch die symbolische Darstellung von Vollkonjunktionen durch passende Terme erarbeitet werden, wenn man deren Wahrheitstafeln vorgibt (Spalten 5,6). Dann erst sollte eine Verknüpfung (Spalte 7) ins Spiel gebracht werden, um im dritten Auftrag deren Wahrheitstafel zu erstellen und das Venndiagramm färben zu lassen. Dabei kann Spalte 7 wie oben in drei Spalten unterteilt werden, um das in der dritten Stunde eingeführte Vorgehen zum effizientem Ausfüllen einer Wahrheitstafel zu wiederholen. Den SuS sollte in dieser Phase die Gelegenheit gegeben werden, selbst die Bedeutung der Einsen (oder Nullen) zu entdecken. In der Präsentationsphase könnte dies dann durch die Farbcodierung auf die letzte Spalte übertragen werden. Alternativ könnte man natürlich auch eine einfachere Aussage als Beispiel in der letzten Spalte wählen.

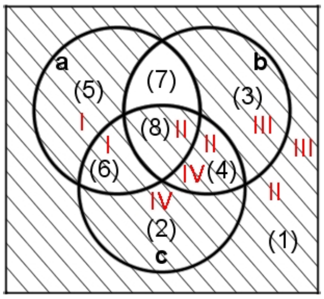
23 Das Problem unterschiedlicher Bildschirmauflösungen bei Tablets, Smartphones oder Computern tritt nicht auf, wenn man die Datei direkt von der GeoGebra-Materialseite lädt, falls WLAN vorhanden ist. Andernfalls empfiehlt sich die Nutzung des Computerraums im Rahmen der folgenden Stunde.

Ob man auch den im Tafelbild aufgeführten optionalen Hinweis zur KDNF entwickeln und sichern möchte, hängt von der weiteren Ausrichtung der Einheit ab. Wenn man in einer guten, interessierten Lerngruppe die interaktive Lernumgebung "LogicTraffic" in der Folgestunde einsetzen möchte, bietet er sich dies hier ggf. an.

Venn-Diagramme als heuristisches Hilfsmittel – Strategie des Ausschließens

Ausgehend von Aufgabe 2 wird die Verwendung eines Venn-Diagramms als heuristisches Hilfsmittel erläutert und damit zur Übungsaufgabe 3 übergeleitet. Hier geht es um die Kompetenz, schnell und ausreichend sorgfältig erstellte "informative Figuren" im Sinne der Heuristik effizient einzusetzen. Beim skizzierten Tafelbild gehe ich davon aus, dass die Aufgabenstellung mit den vier Aussagen gleichzeitig projiziert werden kann:

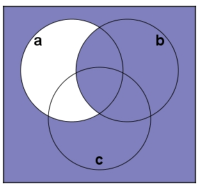
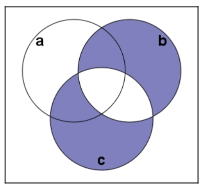
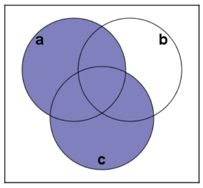
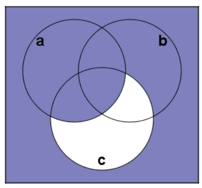
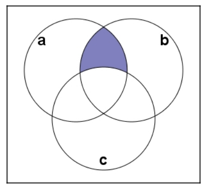
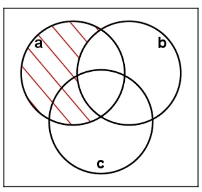
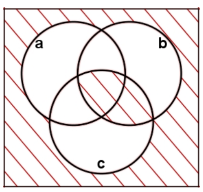
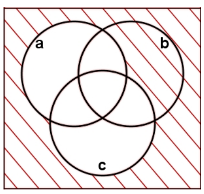
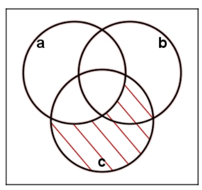
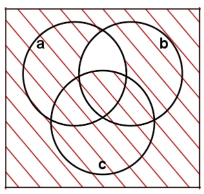
- *(I) Wenn Alina eine Cola bestellt, dann tut das Birgit auch.*
- *(II) Birgit oder Conny bestellen sich eine Cola, aber nie gleichzeitig.*
- *(III) Alina oder Conny bestellen sich eine Cola.*
- *(IV) Wenn Conny eine Cola bestellt, dann auch Alina.*



Venn-Diagramm als Hilfsmittel
Ausschlussverfahren

1) Man prüft die Aussagen einzeln.
2) Zu jeder Aussage streicht man die Flächen, für die sie nicht erfüllt ist. Zur Kontrolle notiert man die problematische Aussage.
3) Es bleiben nur die Kombinationen übrig, bei denen alle Aussagen erfüllt sind.

Die Skizze wird durch schrittweises Schraffieren ("Abstreichen") entwickelt. Da das Diagramm auf den ersten Blick unübersichtlich wirkt, wird das Verfahren unten schrittweise visualisiert. In der zweiten Zeile wird der Bezug zu den Venn-Diagrammen hergestellt. Da alle vier Aussagen gleichzeitig gelten sollen, wird in der letzten Spalte jeweils die Schnittmenge bestimmt.

(I) **$a \rightarrow b$**	(II) **$\neg(b \leftrightarrow c)$**	(III) **$a \vee c$**	(IV) **$c \rightarrow a$**	**Fazit: $a \wedge b \wedge \neg c$**
				
				

In der dritten (letzten) Zeile ist die Schraffur schrittweise visualisiert. In der Praxis wird nur in einem Diagramm gearbeitet. Zu jeder Aussage streicht man die Teilflächen, für die die Aussage nicht erfüllt ist (diese entsprechen in der Zeile darüber jeweils den nicht gefärbten Teilflächen) und notiert zur Kontrolle die Nummer der Aussage. Übrig bleibt am Ende der unschraffierte Bereich (7), für den alle Bedingungen erfüllt sind. Die Nummerierung der Teilflächen stellt den Bezug zur Wahrheitstafel her, muss aber nicht zwingend berücksichtigt werden.

Verzahnung des visuellen Ausschlussverfahrens mit der Wahrheitstafel

Ist für eine der Teilflächen eine Aussage nicht erfüllt, so wird das zugehörige Feld des Venn-Diagramm s nicht gefärbt. In der Wahrheitstafel steht dann in der zugehörigen Tabellenzelle eine Null, andernfalls eine Eins. Damit wird hier ein zentraler Aspekt der gesamten Einheit thematisiert. Letztlich sollen die SuS erkennen, dass die im Kontext der Logikrätsel eingeführten Wahrheitswerte "wahr / falsch", anschaulich im Venn-Diagramm als "gefärbt / nicht gefärbt" und numerisch als Zahlenwerte "1 / 0" interpretiert werden können, damit die Tragweite der symbolischen Darstellung als Aussagevariablen erfasst werden kann. Diese Erkenntis sollte aber behutsam entwickelt werden und hier keinesfalls im Vordergrund stehen. Betrachtet man die Zusammenhänge aus dem Blickwinkel der Aussagenalgebra, so wurde in der Einkleidung von Aufgabe 2 die Äquivalenz

$$\boxed{(a \rightarrow b) \wedge \neg (b \leftrightarrow c) \wedge (a \vee c) \wedge (c \rightarrow a) \Leftrightarrow (a \wedge b \wedge \neg c)}$$

mit einem visuell dokumentierten Ausschlussverfahren oder durch Ausfüllen eines Teils der zugehörigen Wahrheitstafel altersangemessen nachgewiesen, ohne dass dieser Zusammenhang explizit thematisiert wurde. Das Umformen von Aussagen nach Rechengesetzen folgt in der Fortsetzung der Einheit in Klasse 10.

Nach der Einbettung dieser zentralen Unterrichtsphase in die Gesamtkonzeption der Einheit folgen nun noch Erläuterungen zum Ausklang der 4. Stunde.

Argumentationen einbinden?!

Argumentationen der SuS sollten angesprochen und eingebunden werden, um deren Potenzial zu nutzen. Daher nun noch eine denkbare Argumentation zu Aufgabe 2:
1) Wenn sich Conny eine Cola bestellt, dann auch Alina (nach IV) und Birgit (nach I).
2) Dies kann nicht sein, da Birgit und Conny nicht gleichzeitig eine Cola bestellen (nach II).
3) Folglich kann Conny keine Cola bestellen.
4) Daraus folgt, dass sich Alina (nach III) und auch Birgit (nach I) eine Cola bestellen.

Logische Argumentationen werden bei den in der Schule üblichen Logikrätseln meistens Vorteile bieten. Dies sollte positiv herausgestellt werden. Den SuS kann man vermitteln, dass es gerade darum geht, an überschaubaren Beispielen die aussagenlogischen Grundlagen zu erarbeiten und Verfahren kennen zu lernen, die dann auch in komplexeren Situationen mit deutlich mehr Aussagevariablen und Bedingungen greifen. In einer Reflexionsphase könnte dieser Gedanke aufgegriffen werden.

3. **Snapes Zauberstab**

Die Aufgabe ermöglicht die Anwendung der Strategie des Ausschließens mithilfe von Venn-Diagrammen sowie deren Verzahnung mit dem Weg über die zugehörige Wahrheitstafel. Das Rätsel wurde so konzipiert, dass in jeder Tabellenzeile jeweils genau eine Aussage falsch ist. Dadurch muss jede Teilfläche nur mit einer Nummer beschriftet werden.
Abschließend wäre auch hier eine Argumentation zur verbalen Begründung denkbar, z.B.: Wenn Ron schuldig wäre, so wäre es nach (3) auch Fred, im Widerspruch zu (2). Ron ist also unschuldig. Wenn George schuldig wäre, so wäre es nach (1) auch Ron und damit nach (3) auch Fred, was im Widerspruch zu (2) steht. Sowohl Ron als auch George sind also unschuldig. Damit folgt aus (4), dass es auch Fred nicht gewesen sein kann, denn falls er schuldig wäre, hätten dann nach (4) auch George oder Ron dabei sein müssen. Insgesamt folgt also, dass keiner der drei schuldig ist.

4. **Drei Tanten**

Dieses Rätsel ist bewusst einfach gehalten und eignet sich zur Wiederholung der Grundlagen sowie der Anwendung des eingeführten Ausschlussverfahrens mithilfe eines Venn-Diagramms. Sie kann als ergänzende Übungsaufgabe in der Stunde oder als Hausaufgabe eingesetzt werden.

5. **Distributivgesetze**

Aufgabe 5 ist einerseits als Übung zum effizienten Ausfüllen von Wahrheitstafeln gedacht, indem die Gesamtaussage auf mehrere Spalten verteilt wird und die Wahrheitswerte der Teilaussagen jeweils unter den entsprechenden Junktoren notiert werden. Dieses Vorgehen wurde in der vorangegangenen Stunde am Beispiel von zweistelligen Verknüpfungen eingeführt[24] und kann hier aufgegriffen werden. Andererseits verfolgt die Aufgabe das Ziel, die häufig als "trocken" empfundenen Rechengesetze aus ihrer angestaubten Ecke zu holen und einen anschaulichen Zugang mithilfe der Venn-Diagramme anzubieten.
Die Visualisierung wurde behutsam eingebunden und daher im b)-Teil im Prinzip vorgegeben, damit niemand überfordert wird. In einer schnellen Lerngruppe könnte man die bereits gefärbten Venn-Diagramme in der ersten Zeile durch leere Vorlagen ersetzen.
Dann könnten die SuS gleich für beide Distributivgesetze die Venn-Diagramme erstellen.
Wenn die Klasse darauf anspricht, wäre es auch möglich, weitere Tautologien auszuwählen und deren Wahrheitstafeln anschaulich interpretieren zu lassen. Dazu werden nach dem nächsten Abschnitt Vertiefungsmöglichkeiten aufgezeigt.

6. **Wahrsagen**

Abschließend wurde noch ein weiteres Rätsel mit drei Aussagevariablen eingebunden.
Das Anspruchsniveau ist hier im Sinne der Progression höher als bei Aufgabe 4, da die verwendeten Verknüpfungen etwas komplizierter sind, was sich vor allem beim Ausschlussverfahren mithilfe des Venn-Diagramms, aber auch bei der Argumentation niederschlägt. Da das Ausfüllen der Wahrheitstafel nach Vergleich der Aussagenterme gut machbar sein sollte, kann diese Aufgabe binnendifferenzierend eingesetzt werden. Sie bietet den schnelleren SuS dann ausreichend Anregungen, bevor in den folgenden Stunden Logikrätsel mit vier Aussagevariablen für neue Aspekte sorgen.

Mögliche Vertiefungen

Verknüpfung mit Binärzahlen, nach Auftrag 2b)

In der Weitführungsphase könnte hier auch schon der visuelle Fokus auf identische Tabellenbereiche der Wahrheitstafel gelenkt werden, um deren Struktur auf symbolischer Ebene mit den Eigenschaften der Binärzahlen zu erklären und zu vernetzen.

Rechts sind Tabellen für drei und vier Aussagevariablen zu sehen. Folgende Fragen wären denkbar:
Welche Muster falllen auf?
Wie kommen diese Muster zustande?
Welche Blöcke sind identisch?
Wie müssten die Spalten beschriftet werden, wenn wir die Zeilen als Binärzahlen interpretieren?
Wie wirken sich Überträge beim „Hochzählen“ aus?
...

c	b	a
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

d	c	b	a
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

24 Vgl. Datei M9aug03_sub_imp.odt, Aufgabe Nr. 4 und 7.

Hinweis: Diese Betrachtung muss nicht hier erfolgen. Für einige Lerngruppen kann es auch günstig sein, diese Vertiefung zu den Binärzahlen getrennt aufzugreifen, um eine Überlagerung mit den neuen Inhalten zu vermeiden. Eine Gelegenheit bietet sich auch in der kommenden Stunde bei Aufgabe 3, vgl. Datei `M9aug05_logicTraffic_mit4V.odt`.

Exkurs zu Tautologien - Umgang mit Wahrheitstafeln vertiefen, nach Aufgabe 5

Im Unterricht verwendet man aus Gründen der Zeiteffizienz zu häufig vorgefertigte Vorlagen, wie es auch hier vorgesehen ist. Sinnvoller wäre es dagegen, wenn ausreichend Übungszeit im Unterricht zur Verfügung stehen würde und mehr Raum zur Schulung prozessbezogener Kompetenzen vorhanden wäre. Die Kompetenz, schnell und mit angemessener Sorgfalt heuristische Hilfsmittel wie z.B. informative Figuren, Tabellen, Graphen oder nun auch Venn-Diagramme zu erstellen, steht oft nicht im Fokus und ergibt sich sicher nicht von alleine. Daher ist es wichtig, dass die SuS möglichst viele Wahrheitstafeln, Diagramme, Graphen, etc. selbst anlegen, um dabei deren Struktur nachhaltiger zu verinnerlichen. Lange Rede, kurzer Sinn: Es bietet sich hier an, das zweite Distributivgesetz mithilfe einer Wahrheitstafel im Heft beweisen und danach auch Wahrheitstafeln für weitere Aussagen erstellen zu lassen.

Die Motivation dazu kann von dem in Aufgabe 5 bewiesenen und anschaulich motivierten Distributivgesetz ausgehen. Man könnte hier den Spannungsbogen zur Motivation nutzen, der entsteht, wenn eine zunächst unbekannte Aussage auf Allgemeingültigkeit untersucht werden soll. Handelt es sich um ein allgemeingültiges Rechen- oder Umformungsgesetz?[25]
Folgende Beispiele könnten hierzu im Unterricht aufgegriffen werden:

Einige Tautologien		Handelt es sich um eine Tautologie?		
(1)	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	1)	$(p \to q) \to (q \to p)$	nein
(2)	$[p \wedge (p \to q)] \to q$	2)	$(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$	nein
(3)	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$	3)	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	ja
(4)	$[(p \to q) \wedge (p \to \neg q)] \to \neg p$	4)	$(p \leftrightarrow q) \to (\neg p \leftrightarrow \neg q)$	ja
(5)	$[(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)] \to p$	5)	$\neg (p \to \neg p)$	nein
(6)	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$	6)	$\neg (p \vee q) \to (\neg p \vee \neg q)$	ja
(7)	$\neg (p \leftrightarrow \neg p)$	7)	$\neg (p \wedge q) \to (\neg p \wedge \neg q)$	nein
(8)	$[p \leftrightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow [q \leftrightarrow (p \vee q)]$	8)	$(\neg p \vee \neg q) \to \neg (p \vee q)$	nein

"Die Wahrheitstafel ist eine systematische Methode zur Verifikation von Tautologien, aber Tautologien lassen sich mit etwas Übung häufig schneller erkennen."[26] Es folgen in Anlehnung an Raymond Smullyan Erläuterungen zu den links aufgeführten Tautologien:

(1) Wenn p q impliziert und wenn q r impliziert, dann impliziert p auch r.
Diese Tautologie wird als *Syllogismus* bezeichnet.
(2) Wenn p wahr ist und p q impliziert, dann ist auch q wahr. Oder anders ausgedrückt: Alles was eine wahre Aussage p impliziert, ist ebenfalls wahr.
(3) Wenn p eine falsche Aussage impliziert, dann muss p falsch sein.
Dieses Prinzip wurde z.B. bei Arbeitsblatt 4 (Nr 1, "Nasse Straße") zugrunde gelegt.
(4) Wenn p q impliziert und p nicht q impliziert, dann muss p falsch sein.
Keine Aussage p kann eine Aussage q und gleichzeitig ihre Negation $\neg q$ implizieren.

25 Vgl. [SMU1], S. 52 ff.
26 Raymond Smullyan, in [SMU1], S. 52

(5) Dieses Prinzip wird als "reductio ad absurdum" bezeichnet und wird beim Beweisen durch Widerspruch verwendet. Um zu zeigen, dass p wahr ist, genügt es zu zeigen, dass $\neg$p eine Aussage q ebenso impliziert wie ihre Negation $\neg$q.
(6) Wenn mindestens eine der Variablen p oder q wahr ist und wenn p falsch ist, dann muss q die Variable sein, die wahr ist.
(7) Eine Aussage p kann nicht zu ihrer ihrer Negation $\neg$p äquivalent sein. Durch die Negation dieser Kontradiktion erhält man eine Tautologie.
(8) Diese Tautologie fußt darauf, das sowohl die linke Aussage [p $\leftrightarrow$ (p$\wedge$q)] als auch die rechte Aussage [q $\leftrightarrow$ (p$\vee$q)] jeweils äquivalent zur Aussage (p$\rightarrow$q) bzw.($\neg$p$\vee$q) sind.

Damit stehen für stärkere Lerngruppen Anregungen zur Verfügung, mit denen die weitere Vertiefung der Wahrheitswerttafeln erfolgen könnte.[27]
Diese Auflistung wurde hier bereits im Material zu IMP9 eingebunden, wird aber auch in Klasse 10 im Bereich der Aussagenalgebra eine Rolle spielen.

Für den Unterricht lässt sich dieser Fundus flexibel nutzen. Man könnte sich einzelne Aussagen herausgreifen und untersuchen lassen. Neben dem Erstellen von Wahrheitstafeln könnte man dann bei Tautologien auch mithilfe von Venn-Diagrammen die Allgemeingültigkeit anschaulich motivieren, wie dies in Aufgabe 5 exemplarisch aufgezeigt wurde.

Zum Erzeugen von Venn-Diagrammen können die vorhandenen GeoGebra-Dateien als Bildgeneratoren genutzt werden[28]. Nach Anpassung von Schriftgröße und weiteren Objekteigenschaften kann man über ein Bildschirmfoto ("screenshot") das entsprechende Venn-Diagramm als Bild abspeichern.

27 Weitere Tautologien findet man auch unter dem Stichwort "Logical Equivalences" in [ROS], S. 27/28. Rosen hat in seinem Buch samt zugehörigem Lösungsbuch zahlreiche Aufgaben ausgearbeitet, die als Materialpool zur Vertiefung dienen können.
28 M9aug02_VENN-2Var.ggb, M9aug04_VENN-3Var.ggb und M9aug05_VENN-4Var.ggb, im Verzeichnis 1_hintergrund/5_praesentationen.

5. Stunde: Logikrätsel mit bis zu vier Variablen

Möglicher Ablauf, Inhalte	Hinweise
• Hausaufgabenvergleich, Präsentation durch SuS • Einführung in den Kontext vereinfachter Ampelschaltungen Auftrag 1: (AB, Nr.1,"Sichere Kreuzungen") *S. trägt Argumentation vor* (evtl. auch zu a) und b)), *in der Weiterführungsphase werden verschiedene "sichere Terme" genannt und deren Äquivalenz begründet, vgl. Erläuterungen Die Aufgabe wird als "Umkehraufgabe" charakterisiert.* • Auftrag 2: (AB, Nr. 2, "Drei Ampeln") Alle Teilaufgaben können in einem Auftrag gestellt werden. *Kurze Präsentation der Wahrheitstafel durch SuS, danach differenzierte Weiterarbeit an b) und c) Präsentation möglicher Terme durch SuS, gemeinsame Sicherung und Ergänzung durch Lehrkraft, Vertiefungsmöglichkeit bei 2d), siehe rechts* • Unterrichtsgespräch mit Reflexion zum Vorgehen: Aussageterme zu gegebener Wahrheitstafel finden *Mögliche Sicherung, vgl. Erläuterungen* • Auftrag 3: (AB, Nr. 3, "Vier Spuren") Übertrag auf vier Aussagevariablen, *a) zuerst Vermutungen notieren lassen, dann b)+c) Wahrheitstafel ausfüllen und Terme überprüfen ggf. Vertiefung zu den Normalformen aufgreifen* • Auftrag 4: AB, Nr. 4, "Abgeschrieben" Je nach zur Verfügung stehender Zeit kann diese Aufgabe kurz oder ausführlich behandelt werden. Die verschiedenen Optionen sind in den Erläuterungen ausführlich beschrieben. Das Auschlussverfahren kann hier auch übertragen und an Venn-Diagrammen visualisiert werden. • Abschließende Reflexion der Stundeninhalte • Stellen der Hausaufgaben (z.B. Nr. 5 oder 6)	• Material: `M9aug05_logicTraffic_mit4V.odt` • Aus didaktischer Sicht werden nun (erstmals) Umkehraufgaben gestellt: Zu einer vorgegebenen Wahrheitstafel wird ein passender Aussageterm gesucht. Dabei sollten mehrere Terme genannt und verglichen werden, um die fehlende Eindeutigkeit zu betonen. • Stufung der Aufträge (mit 2, 3 und 4 Variablen) ermöglicht auch den Rückblick auf Inhalte der Einheit. • Mit den differenzierenden Zusatz-aufträgen 2d) und 3d) kann die "Explosion" der Zeilenanzahl der Wahrheitstafeln bei wachsender Variablenzahl thematisiert werden. • Bei der Suche nach passenden Termen liegt es nahe, Normalformen altersangemessen einzubinden, um Grundvorstellungen anzubahnen. Diese Vertiefung ist im Bildungsplan zwar nicht explizit ausgewiesen, wird aber empfohlen. Hinweise zur Umsetzung findet man in den Erläuterungen. • Falls der Exkurs zu LogicTraffic nicht angeboten wird, eignet sich auch Aufgabe 4 zur Einführung von Logikrästeln mit vier Variablen.

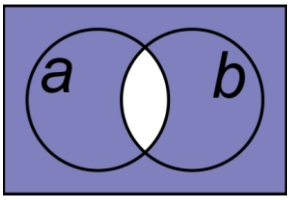
Erläuterungen

Bisher wurden zu vorgegebenen oder aufgestellten Aussagetermen die Wahrheitswerte gesucht. In der 5. Stunde wird nun erstmals die praxisrelevante Umkehraufgabe betrachtet und zu einer vorgegebenen Wahrheitstafel werden passende Terme gesucht. Die fehlende Eindeutigkeit motiviert letztlich die Einsicht, dass Termumformungen wichtig und hilfreich sind, um möglichst einfache Terme zu erhalten und legt die Grundlagen für deren spätere Behandlung in Klasse 10. In Klasse 9 wird noch nicht umgeformt, die Äquivalenz der erkannten Terme wird noch über die aufgebauten Grundvorstellungen begründet, ggf. auch anschaulich mithilfe von Venn-Diagrammen.
In dieser Stunde wird der Kontext sicherer Ampelschaltungen aufgegriffen und mit der Aufgabensequenz werden die SuS auf den optionalen Einsatz der von Ruedi Arnold programmierten Lernumgebung "LogicTraffic" vorbereitet. Dabei löst man sich aus didaktischer Sicht erstmals vom spielerischen Kontext der Logikrätsel und führt hier sinnstiftende Situationen ein, bei denen mehr als drei Aussagevariablen erforderlich sind. Die drei Aufgaben behandeln Ampelschaltungen mit zwei, drei und vier Variablen und sind so gestuft, dass unterschwellig

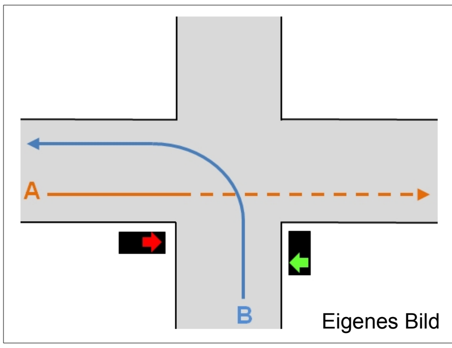
auch ein Rückblick auf die bisherigen Erarbeitungsschritte möglich ist und zentrale Aspekte wiederholt werden.

1. **Sichere Kreuzungen**

Der Einstieg ist einfach gehalten. Der NAND-Operator (symbolisch: $a \uparrow b \Leftrightarrow \neg(a \wedge b)$) wird wiederholt und ermöglicht bei verschiedenen Ampelschaltungen einen sicheren Weg zur Termfindung. Ohne die Regeln von De Morgan explizit zu erwähnen, werden sie bei der Nennung weiterer Terme wohl intuitiv angewendet: $a \uparrow b \Leftrightarrow \neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a) \vee (\neg b)$.



Eigenes Bild:
Venn-Diagramm zu $\neg(a \wedge b)$.



Eigenes Bild

a	b	*sicher?*
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Terme für eine sichere Schaltung:
$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a) \vee (\neg b)$

Mögliche Vertiefung zu Normalformen:
Die drei Einsen werden zum Aufstellen der Kanonischen Disjunktiven Normalform verwendet: $(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$. Der Term liefert in den ersten drei Fällen (Zeilen) jeweils den Wert 1 und nur im letzten Fall den Wert 0, wie gewünscht.
Zur Veranschaulichung kann man sich das Venn-Diagramm auf der linken Seite als Vereinigung der drei zugehörigen Teilflächen entstanden denken, die als Bausteine dienen (in Analogie zu den drei Vollkonjunktionen in den Klammern).
Die SuS werden diesen Term wohl nicht selbst einbringen, daher wird man die Vorgehensweise wahrscheinlich im Lehrervortrag erläutern, um dann bei Aufgabe 2 einen Zusatzauftrag stellen zu können, bei dem das Prinzip im Falle von drei Variablen eigenständig erforscht und durchdrungen werden kann.
Diese Sichtweise sollte für die SuS hier zunächst ausreichen. Man kann höchstens noch erwähnen, dass sich Vorteile ergeben, wenn man statt der drei Einsen die eine Null verwendet, da dies zu einem geringeren Schreibaufwand führt. Der gesuchte Term wurde oben bereits genannt: $(\neg a \vee \neg b)$. Dieser Term liefert ebenfalls für die ersten drei Fälle den Wert 1 und nur im letzten Fall den Wert 0. Es wird aber davon abgeraten, hier schon die Kanonische Konjunktive Normalform ins Spiel zu bringen. Wenn man dies in einer stärkeren Lerngruppe ansprechen möchte, bietet sich bei Aufgabe 2 eine Gelegenheit.

2. **Drei Ampeln**

Nach dem Vergleich der Ergebnisse von Auftrag 2a) und dem binnendifferenzierenden Zusatzauftrag 2b) werden in der Plenumsphase mögliche Terme genannt und verglichen. Sicherlich ist es vorteilhaft, an der Tafel bekannte Verknüpfungen aufzugreifen und ggf. zu wiederholen, um das Potenzial der Aufgabe zu nutzen. Z.B. bietet es sich an, Disjunktionen als Subjunktionen darzustellen. Dazu wird man bei Bedarf selbst weitere Terme ins Spiel bringen, falls die SuS das nicht von sich aus gemacht haben:

$$\neg(c \wedge (a \vee b)) \Leftrightarrow \neg c \vee \neg(a \vee b) \Leftrightarrow c \rightarrow \neg(a \vee b) \Leftrightarrow (a \vee b) \rightarrow \neg c \Leftrightarrow \ldots$$

Die Subjunktionen lassen sich im Kontext der Aufgabe sinnstiftend motivieren: *Wenn* Ampel A *oder* B grün ist, *dann* darf Ampel C nicht grün sein. Als Disjunktion formuliert:
"A *oder* B sind rot *oder* C ist rot" ($\neg c \vee \neg(a \vee b)$, wobei hier "nicht grün" gleich "rot" gesetzt wurde).

In der Weiterführungsphase könnte man nun zur Vertiefung das bei Aufgabe 1 eingeführte Prinzip der KDNF aufgreifen und die SuS bitten, einen weiteren "sicheren" Term aufzustellen, indem sie wieder von den Einsen ausgehen. Falls die SuS dann naheliegenderweise auch die KKNF suchen sollten, kann man darauf eingehen und diese gemeinsam an der Tafel entwickeln lassen (vgl. Lösung). Man sollte aber erwähnen, dass diese Begriffe in Klasse 9 nicht bekannt sein müssen und Normalformen in der Kursstufe im Fach Informatik vertieft werden.[29]

In einem Gespräch kann hier (oder am Stundenende) das Vorgehen bei den ersten beiden Aufgaben kurz reflektiert und die zentrale Erkenntis gesichert werden:

Zu jeder beliebigen Wahrheitstafel lassen sich passende aussagenlogische Terme finden oder konstruieren. Dabei sucht man meist nach kurzen Termen, wenn man logische Schaltungen beschreiben möchte. Längere Terme lassen sich später mit Termumformungen vereinfachen.

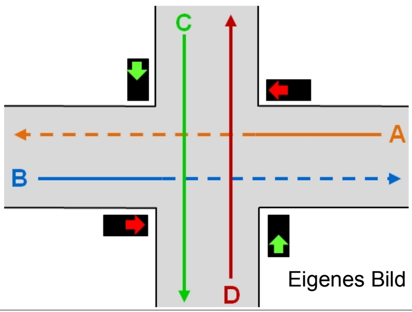
Man kann hier ankündigen, dass solche Termumformungen in Klasse 10 behandelt werden.

3. **Vier Spuren**

Nun folgt die Ausweitung auf vier Aussagevariablen, die im Kontext der Ampelschaltungen nachvollziehbar und sinnstiftend möglich ist. In der Aufgabe soll der Fokus zunächst von der Wahrheitstafel weggelenkt werden und die SuS sollen Vermutungen notieren, wie ein "sicherer" Term aussehen könnte, bevor die Tabelle ausgefüllt und die Vermutungen überprüft werden. Die Schaltungen und damit die Terme werden langsam komplexer, es wurde aber bewusst eine übersichtliche Situation gewählt, aus der sich geeignete äquivalente Terme ergeben.

In der Präsentationsphase ergeben sich hier Anknüpfungspunkte beim Vergleich der möglichen Terme und man wird evtl. stärker lenken müssen. In der Lösung wurden dazu die nebenstehenden Terme eingebunden, die bei Bedarf exemplarisch ergänzt werden könnten.
Die Frage im e)-Teil der Aufgabe 3 bietet erneut die Gelegenheit, den großen Nachteil der Wahrheitstafeln in den Blick zu nehmen.

Falls in der Stunde zuvor Normalformen aufgestellt wurden, könnte man hier thematisieren, dass die Anzahl der Nullen bzw. Einsen darüber entscheidet, welche der beiden Formen günstiger ist.



Eigenes Bild

Mögliche „sichere“ Terme:

$s \Leftrightarrow \neg\, [\, (a \vee b) \wedge (c \vee d)\,]$ (1)

$\Leftrightarrow \neg\, (a \vee b) \vee \neg\, (c \vee d)$ (2)

$\Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg d)$ (3)

$\Leftrightarrow (a \vee b) \rightarrow \neg\, (c \vee d)$ (4)

Hinweis: Alle Terme sind äquivalent, z.B. kann man die Subjunktion (4) auf die Disjunktion (2) zurückführen.

a	b	c	d	s?
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**0**
1	1	1	1	**0**

Im Anschluss an diese Phase wäre der Einsatz der Datei `M9aug05_VENN-4Var.ggb` möglich. Sie enthält Übungen zur Interpretation von Aussagetermen, bei denen das zugehörige Venn-Diagramm für vier Aussagevariablen passend gefärbt werden muss.

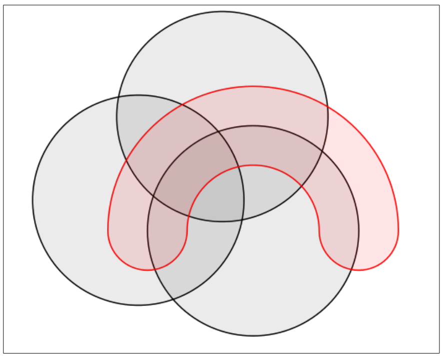
29 Weitere Informationen zur KDNF und KKNF findet man in der Datei `M9aug01_hintergrund.odt` im Verzeichnis 1_hintergrund.

Die Nutzung der Lernumgebung und ihre Vorbereitung durch die Aufgaben 1-3 geht über den Bildungsplan hinaus. Falls die Lernumgebung eingesetzt wird, können die SuS in der Folgestunde binnendifferenziert effizient üben und dabei vielfältige Entdeckungen machen. Falls die Lernumgebung nicht eingesetzt wird, könnte auch die Aufgabe 4 im Zentrum der Stunde stehen, um Logikrätsel mit vier Variablen einzuführen. Die beiden Übungsaufgaben 5 und 6 ergänzen das Material.

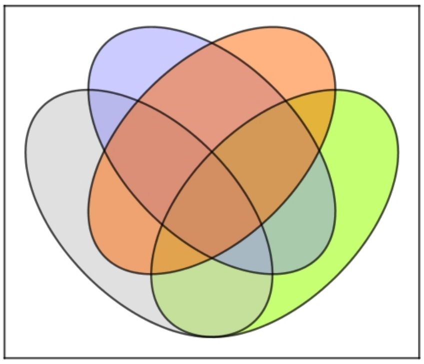
4. **Abgeschrieben – Logikrätsel mit vier Aussagevariablen**

Diese Aufgabe bietet einen alternativen oder ergänzenden Zugang zu Logikrätseln mit vier Variablen. Falls man sich bei der Unterrichtsplanung gegen den Einsatz der Lernumgebung LogicTraffic entscheidet und vielleicht deshalb auch die ersten drei Aufgaben nicht vollständig bearbeiten lassen möchte, könnte man auch gleich mit Aufgabe 4 beginnen. Sie ermöglicht ebenfalls vertiefende Einblicke. Die SuS erkennen einerseits, dass der Wahrheitsgehalt aller Aussagen mit einer passenden Wahrheitstafel ermittelt werden kann, diese andererseits aber sehr unpraktisch werden kann, wenn die Anzahl an Aussagevariablen wächst.

Die Aufgabe sieht vor, dass die SuS eine Wahrheitstafel mit 16 Zeilen ausfüllen, um das Logikrätsel auf sicherem Weg "zu Fuß" zu lösen. Parallel dazu sollten im c)-Teil aber auch Argumentationen zur Lösungsfindung entwickelt und eingebunden werden. Aus der unpraktischen Größe der Wahrheitstafeln wird für die SuS in Teil d) einsichtig, dass man Verfahren benötigt, um aussagenlogische Terme zu vereinfachen. Dieser Gedanke führt dann wie bereits erwähnt zu den Rechengesetzen der Aussagenalgebra in Klasse 10.



Grafik gemeinfrei[30]



Eigenes Bild

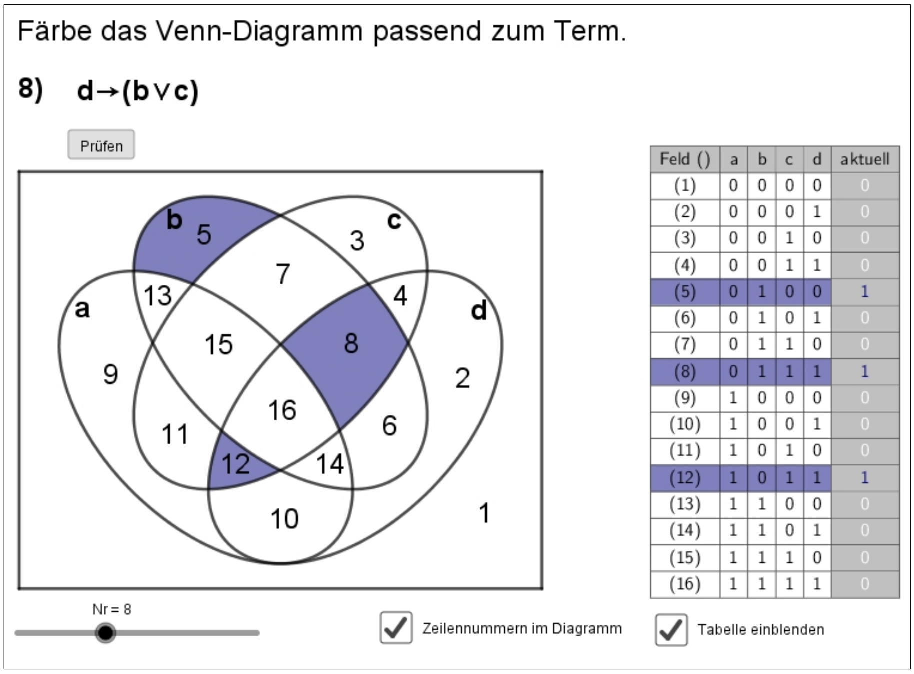
Aufgabenteil e) liefert den Impuls, Venn-Diagramme auch im Falle von vier Variablen einzubinden, um aussagenlogische Zusammenhänge anschaulich interpretieren zu können. An dieser Stelle wäre es schade, wenn man die von Venn selbst entworfenenen vier Ellipsen einfach vorgeben würde. Im e)-Teil werden die SuS daher zuerst zu eigenen Skizzen ermutigt.

Auch die eingeführte Strategie des Ausschließens lässt sich nahtlos übertragen. In den Lösungsdateien wurde das Ausschlussverfahren bei vier Aussagevariablen aber nicht direkt eingebunden, da es zu aufwendig ist, als dass es für den Unterricht im Plenum für alle SuS geeignet wäre. Da es aber durchaus binnendifferenzierendes Potenzial besitzt, wurde das Vorgehen am Ende der Lösungsdatei auf einer zusätzlichen Seite zu den Aufgaben 4, 5 und 6 dokumentiert.

Zur Übung steht auch hier eine interaktive GeoGebradatei zur Verfügung, bei der die SuS

30 Man sieht zwei mögliche Venn-Diagramme mit vier Grundmengen. Links: Kopophex at en:wikipedia [Public domain], *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Venn4.svg* (abgerufen am 4.3. 2019).

analog zu den Dateien bei zwei und drei Aussagevariablen Venn-Diagramme zu vorgegebenen Termen färben müssen und direkt Rückmeldung erhalten. Unten ist ein "Screenshot" der Datei zu sehen, wobei die 16 Teilflächen entsprechend der Reihenfolge der zugehörigen Tabellenzeilen durchnummeriert sind. Beim Anklicken einer Teilfläche wird auch die zugehörige Tabellenzeile blau markiert. So kann die Datei bei Bedarf auch im Unterricht flexibel zur Visualisierung oder zu Hause als Bildgenerator eingesetzt werden, falls Venn-Diagramme mit vier Variablen benötigt werden. Wenn die SuS im Computerraum oder über mobile Endgeräte Zugriff auf diese Datei haben, ermöglicht ihr Einsatz eine kooperative und binnendifferenzierte Übungsphase.



Eigenes Bild

5. **"Angels Gate"**
Eine weitere Übungsaufgabe mit vier Variablen, bei der einfache Aussagen verwendet wurden. Die Lösung ist hier erstmals nicht eindeutig, es bleiben am Ende drei mögliche Tabellenzeilen (Teilflächen) übrig, was von den SuS erkannt und geeignet interpretiert werden muss.

6. **Scotty weiß alles**
Abschließend folgt eine kleine Übungsaufgabe, in der zur Wiederholung als Verknüpfungen auch die Äquivalenz und ihre Negation (die Kontravalenz) eingebunden wurden.

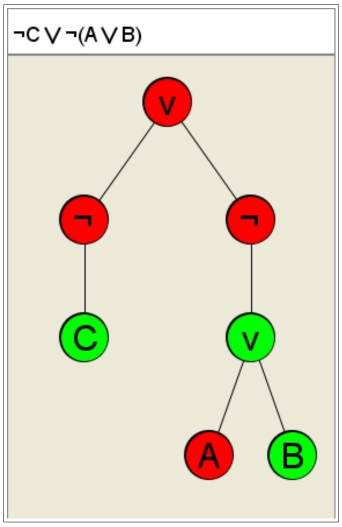
Die Venn-Diagramme zur Dokumentation des Ausschlussverfahrens zu diesen beiden Aufgaben sind ebenfalls auf der letzten Seite der Lösungsdatei zu finden.

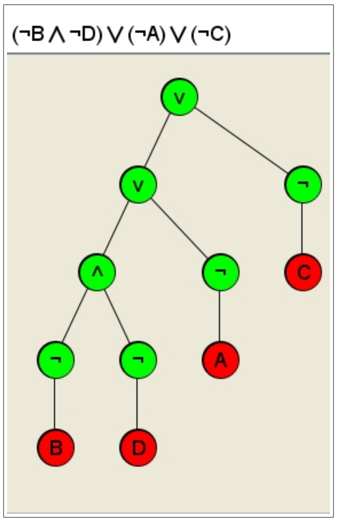
6. Stunde: Optionaler Exkurs zu Logic Traffic

Möglicher Ablauf, Inhalte	Hinweise
• Präsentation der Hausaufgaben durch SuS • Eigene Gestaltung auf Basis des von Ruedi Arnold bereitgestellten Materials • Möglicher Ablauf: - Kurze Einführung mit 4-5 Folien der ppt-Präsentation - zur Unterstützung ggf. das Handout als Anleitung austeilen - eigenständige Erarbeitung der Stationen 1-3 mit Sicherung auf einem begleitenden Arbeitsblatt - Individuelle Betreuung von SuS oder Gruppen - Zwischenpräsentation einer Aufgabe durch SuS - zahlreiche differenzierende Zusatzaufträge denkbar (DNF, KDNF, Visualisierung durch Parse-Bäume, …) - evtl. kurze Plenumsphase zu ausgewählten Aspekten - Am Ende Abrundung und Ausblick • Stellen der Hausaufgaben aus dem Fundus (z.B. auch Vorgriff auf Material der Stunde 7 möglich)	• Material: `M9aug06_logicTraffic_Exkurs.odt` • Binnendifferenzierung durch reichhaltiges Angebot der interaktiven Übungsplattform, das im Idealfall kooperativ in Partnerarbeit genutzt werden kann. • Für die Sicherung steht eine Aufgabensammlung zur Verfügung, aus der bestimmte Stationen ausgewählt und als begleitendes Arbeitsblatt aufbereitet werden können. • Der Einsatz kann bei Zeit und Interesse der Lerngruppe ausgedehnt werden.

Erläuterungen

Die Lernplattform ist didaktisch sehr gut konzipiert und dokumentiert, so dass sich ausführliche Erläuterungen erübrigen. Hier sollen nur kurz visuelle Eindrücke der Parse-Bäume gezeigt werden, die ähnlich wie Rechenbäume verständnisunterstützend zur Visualisierung der Termstrukturen eingesetzt werden können. Zu jedem Term kann der entsprechende Parse-Baum generiert werden.





Bilder: Screenshots aus "LogicTraffic", von Ruedi Arnold lizenzfrei für Bildungszwecke zur Verfügung gestellt, frei zugänglich unter *https://www.swisseduc.ch/informatik/infotraffic/* (abgerufen am 6.3.2019).

7. Stunde: Abschließende Übungsstunde zur Einheit

Möglicher Ablauf, Inhalte	Hinweise
• Präsentation der Hausaufgaben durch SuS • Eigene Gestaltung auf Basis der ausgearbeiteten Aufgaben • Exemplarische Auswahl und Schwerpunktsetzung, Hinweise dazu in den Erläuterungen • Methodische Umsetzung flexibel, denkbar wäre z.B.: - mit Arbeitsblatt und kurzen Präsentationsphasen - Stationsbetrieb mit hinterlegten Musterlösungen - Gruppenpuzzle oder Gruppenarbeit • Inhaltliche Aufteilung in 4 Bereiche denkbar: <u>Aufgaben</u> 1) Grundlagen – 2 Variablen: Fokus auf Subjunktion 1,2,3,4 2) Logikrätsel mit 3 Variablen 5,6,7 3) Logikrätsel mit 4 Variablen 8,9 4) Vertiefende Aufgaben 10,11 • Einbindung digitaler Werkzeuge denkbar: Übungen mit einem Wahrheitstafeltrainer oder den GeoGebra-Dateien zur Vernetzung von Wahrheitstafeln und Venn-Diagrammen • ggf. Stellen der Hausaufgaben	• Material: `M9aug07_Uebungen.odt` • Binnendifferenzierung durch differenzierendes Aufgabenmaterial und methodische Umsetzung. • Differenzierende Zusatzaufträge zur Vertiefung möglich, z.B. Nr. 7 (komplexeres Rätsel), Nr. 10 (Gesamtaussage aufstellen), Nr. 11 (5 Aussagevariablen) • Einsatz digitaler Werkzeuge

Erläuterungen

Damit Sie passend auswählen können, sollen die elf ausgearbeiteten Übungsaufgaben im Folgenden kurz eingeordnet werden.

1. **Volleyball**
Die Aufgabe bietet einen "weichen" Einstieg und ermöglicht die Wiederholung grundlegender Zusammenhänge. Die alltagssprachlichen Aussagen (im Kontext der Auswahl für ein Volleyballteam) werden formalisiert und die zugehörigen symbolischen Aussagenterme durch die Vernetzung mit Venn-Diagrammen visualisiert. Hier wird noch mit den Wahrheitswerten w/f gearbeitet, während in den weiteren Aufgaben die binären Werte 1/0 verwendet werden.

2. **Allgemeingültige Aussagen**
Hier soll zunächst die pragmatische Nutzung von Wahrheitstafeln zum Nachweis von logischen Äquivalenzen genutzt werden, um ggf. auch den Einsatz des Wahrheitstafeltrainers von Jan Schreiber aufgreifen zu können.[31] Geübt wird das Bestimmen der Wahrheitswerte vorgegebener Aussagen. Inhaltlich liegt der Schwerpunkt dabei auf einem vertieften Verständnis der Subjunktion $a \rightarrow b$, die aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet und u.a. auf die Disjunktion $\neg a \lor b$ und die negierte Konjunktion $\neg(a \land \neg b)$ zurückgeführt wird. Der formale Zugang ermöglicht so das Wiederholen der Grundvorstellungen zur Definition der Subjunktion. In den Lösungen wurde dazu ein entsprechender Hinweis eingebunden.

31 Vgl. S. 18, Hinweise zur 3. Stunde, Aufgabe 7

3. **Gewonnen**

Diese Aufgabe verknüpft verschiedene alltagssprachliche Formulierungen der Aussagen mit ihrer symbolischen Darstellung als Aussagenterme und bringt für die SuS überraschende Einsichten mit sich. Folgende Verknüpfungen wurden eingebunden:

(1) $(\neg t) \vee u$ (2) $(\neg t) \vee (\neg u)$ (3) $\neg(t \wedge u)$ (4) $\neg(t \wedge (\neg u))$ (5) $(\neg u) \rightarrow (\neg t)$

Drei der fünf Aussagen (1,4 und 5) sind äquivalent zur Subjunktion $t \rightarrow u$, was auf den ersten Blick nicht ersichtlich ist, in Aufgabe 2 aber inhaltlich vorentlastet wurde. Das kann genutzt werden, um den formalen Zugang zur Subjunktion aus Aufgabe 2 mit der sprachlichen Welt der SuS zu verzahnen. Die Aussagen 2 und 3 sind ebenfalls äquivalent, was ggf. mit einem Rückgriff auf Venn-Diagramme erläutert werden kann, ohne dass man die Regeln von De Morgan explizit erwähnen sollte.

4. **Mit Wahrheitstafeln beweisen**

Hierbei handelt es sich um eine abschließende Übungsaufgabe zur Wiederholung des Vorgehens beim Beweisen mit Wahrheitstafeln. Daher ist hier nun auch keine Tabelle vorgegeben, denn die SuS sollen sich ihr Vorgehen und die gewählte Struktur selbst zurechtlegen. Inhaltich kann hier zum Abschluss der Grundlagen noch einmal die Definition der Subjunktion in den Blick genommen werden.

5. **Auf der Tanzfläche**

Der Kern dieser Aufgabe ist identisch mit dem der Aufgabe "Wer trinkt Cola?" (AB 4, Nr.2). Durch die andere Einkleidung sollte dies den SuS zunächst nicht auffallen, könnte dann aber reflektiert werden. Mit dem d)-Teil kann das Ausschlussprinzip von den Venn-Diagrammen losgelöst als allgemeine heuristische Strategie betrachtet werden. In den Lösungen sind dazu bewusst nur kurze exemplarische Hinweise eingebunden, damit man bei der Ausgestaltung flexibel bleibt. Ein exemplarisches Tafelbild könnte z.B. so aussehen:

Aufgabe Nr 5: Vertiefung zum Ausschlussprinzip

ohne Eintrag der Wahrheitswerte werden schrittweise Kombinationen ausgeschlossen:

1) II und IV überprüfen:

d	e	f	nicht erfüllt
0	0	0	II $d \vee f$
0	0	1	
0	1	0	II $d \vee f$
0	1	1	
1	0	0	IV $\neg(e \wedge f)$
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	IV $\neg(e \wedge f)$

nach 1) verbleiben →

2) I und III überprüfen:

d	e	f	nicht erfüllt
0	0	1	III $f \rightarrow d$
0	1	1	III $f \rightarrow d$
1	0	1	I $d \rightarrow e$
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	

3) Ergebnis nach 2)

Nur für $d \wedge e \wedge \neg f$ sind die Aussagen I-IV alle erfüllt.

Es gilt also die logische Äquivalenz $(d \rightarrow e) \wedge (d \vee f) \wedge (f \rightarrow d) \wedge \neg(e \wedge f) \Leftrightarrow (d \wedge e \wedge \neg f)$

Der Hinweis am unteren Rand kann ergänzend eingebunden werden. Er ermöglicht an dieser Stelle eine plakative Sicherung des zentralen Grundgedankens der Einführung in die Aussagenlogik. In der Einheit wurden solche Äquivalenzen noch anschaulich unter Verwendung des Ausschlussprinzips oder mithilfe von Wahrheitstafeln bewiesen, in Klasse 10 wird das dann auch durch abstrakte Umformungen aussagenlogischer Terme erfolgen.

Das Tafelbild kann vielfältig variiert werden. Man könnte z.B. oben nach jeder überprüften Bedingung eine neue Liste / Tabelle anlegen, um das schrittweise Vorgehen zu verdeutlichen. Alternativ könnte man auch alle vier Bedingungen nur in der ersten Tabelle überpüfen und dort gleich sieben Zeilen ausschließen, um es kompakt zu halten. Im Tafelbild wurde der Mittelweg gewählt, da auch der Gedanke des schrittweisen Überprüfens deutlich werden sollte.

Wenn die SuS das Ausschlussprinzip beherrschen und in einem Logikrätsel ohne sorgfältige Dokumentation effektiv eine Lösung gefunden werden soll, bietet sich die nebenstehende Konzentration aufs Wesentliche an.

d	e	f	?
~~0~~	~~0~~	~~0~~	II
~~0~~	~~0~~	~~1~~	III
~~0~~	~~1~~	~~0~~	II
~~0~~	~~1~~	~~1~~	III
~~1~~	~~0~~	~~0~~	IV
~~1~~	~~0~~	~~1~~	I
1	1	0	
~~1~~	~~1~~	~~1~~	IV

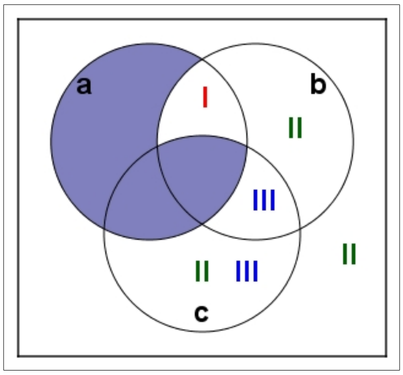
In Form von als Binärzahlen deutbaren Zeichenketten werden alle Fälle notiert und dann unter Angabe einer nicht erfüllten Bedingung ausgeschlossen. Aus verschiedenen Gründen halte ich es für sinnvoll, diese effiziente Form der Dokumentation erst am Ende der Einheit zu erläutern, wenn ausreichend viele Wahrheitstafeln ausgefüllt wurden.

In der vertiefenden Aufgabe Nr. 11 bietet sich abschließend die Gelegenheit, das Ausschlussprinzip anzuwenden, da kaum jemand eine Wahrheitstafel für fünf Aussagevariablen ausfüllen möchte.

6. **Kommissar Maigret**

Es folgt eine Übungsaufgabe mit dem besonderen Aspekt, dass hier am Ende mehrere mögliche Wahrheitswertkombinationen der Aussagevariablen in Frage kommen und daher keine eindeutige Antwort auf die Frage der Verhaftung gegeben werden kann.
Das Venn-Diagramm zur Dokumentation des Ausschlussprinzips wurde in die Lösung eingebunden. Es soll hier noch einmal der oben erwähnten reduzierten Dokumentation gegenübergestellt werden, um im Sinne der "rule of four" zwei der vier Darstellungsformen der zugrundeliegenden boolschen Funktion zu vernetzen, die selbst gar nicht erscheint:

visuelle Ebene



Funktionswerte:
w / f
blau/ nicht blau
(nicht beschriftet / beschriftet)

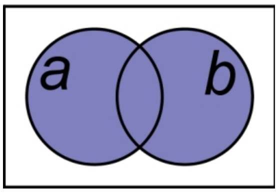
numerische Ebene

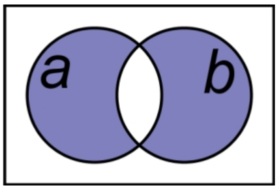
a	b	c	?
~~0~~	~~0~~	~~0~~	II
~~0~~	~~0~~	~~1~~	II
~~0~~	~~1~~	~~0~~	II
~~0~~	~~1~~	~~1~~	III
1	0	0	
1	0	1	
~~1~~	~~1~~	~~0~~	I
1	1	1	

Funktionswerte:
w / f bzw. 1 / 0
nicht gestrichen / gestrichen

7. **Gute Vorsätze**

Diese Aufgabe bietet eine sinnvolle Vertiefung zur Unterscheidung des ein- bzw. ausschließenden "oder", also zur Abgrenzung der Disjunktion von der Kontravalenz.





als KKNF[32]*:*	$a \vee b$	$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)$ [33]
als KDNF:	$(a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b)$	$(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$
	einschließendes "Oder"	ausschließendes "Oder"

Die Aufgabe wird allerdings bei drei Aussagevariablen und den verschachtelten Verknüpfungen sicher nicht einfach für die SuS und stellt eine Herausforderung dar. Daher ist diese Aufgabe als Vertiefung ausgewiesen, die im Sinne der Binnendifferenzierung auch dazu anregen könnte, die bisher betrachteten Logikrästel mit dem Werkzeug der Tabellenkalkulation in den Blick zu nehmen.

Da die zugehörigen Logikgatter AND, OR, NOT, XOR, ... weitreichende Bedeutung für die Informatik besitzen, bietet sich ggf. hier auch ein Exkurs mit einer Tabellenkalkulation an, den man auf die ganze Einheit ausweiten könnte, wenn man die Zeit dazu hätte.
Zu ausgewählten Logikrätseln könnten die SuS mithilfe einer Tabellenkalkulation Wahrheitstafeln erstellen. Eventuell wäre das auch ein geeignetes Thema für eine GFS oder eine andere Zusatzleistung für interessierte SuS.

8. **IMP-Festival**

Bei dieser Aufgabe mit vier Aussagevariablen wird das Erstellen der Wahrheitstafel mehr Zeit kosten. Möglicherweise greifen die SuS daher auch hier lieber auf das Ausschlussprinzip zurück, dessen Anwendung im Venn-Diagramm in den Lösungen dokumentiert wurde.
Auch argumentative Lösungen der SuS können hier genutzt werden.

9. **Druckaufträge**

Diese technisch orientierte Aufgabe entstand in Anlehnung an Aufgaben ähnlichen Typs von Kenneth H. Rosen, einem amerikanischen Logikprofessor.[34] Hier sind nun vier Aussagevariablen und fünf Bedingungen beteiligt und die Aufgabe ist so konzipiert, dass ebenfalls nur eine Elementarkombination exisitiert, bei der alle fünf Bedingungen erfüllt sind.

32 Erläuterungen zu den kanonischen Normalformen findet man im Verzeichnis 1_hintergrund in der Datei `M9aug01_hintergrund.odt`.

33 Die Kontravalenz kann formal auch als $a \oplus b$ notiert werden. Das Symbol "⊕" wurde in der Einheit nicht eingeführt und wird bei uns im deutschen Sprachraum kaum verwendet, da die Kontravalenz i.d.R. auf die Disjunktion und Konjunktion zurückgeführt wird. Folgende Symbole werden bei Wikipedia für die Kontravalenz angegeben : $a \nleftrightarrow b$, $a \not\equiv b$, $a \dot\vee b$, $a \veebar b$, $a \oplus b$.

34 Vgl. z.B. die Aufgabe in [ROS], S. 23, Nr. 12. Das äußerst umfangreiche Lehrwerk (1071 Seiten) zur diskreten Mathematik bietet zahlreiche weiterführende Anregungen und Aufgaben zur Vertiefung.

10. **Lüge vor Gericht**
Mit dieser für eine 9. Klasse machbaren, aber sicherlich anspruchsvollen Aufgabe kann ein weiterer Aspekt der Aussagenlogik eingebunden werden. Eine wesentliche didaktische Reduktion dieser Einheit äußerte sich ja in der Tatsache, dass meistens in der Aufgabenstellung bereits festgelegt wurde, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. In der Praxis weiß man aber genau dies oft nicht.
Daher wurde im Sinne eines Ausblickes hier noch ein Rätsel eingebunden, bei dem konsequente Fallunterscheidungen schon beim Aufstellen der Terme berücksichtigt werden müssen. Zahlreiche weiterführende Anregungen und Aufgaben dazu finden sich in Raymond Smullyans Büchern.[35]

Bei der Behandlung dieser Aufgabe lassen sich die verschiedenen Aspekte der Einheit gut vernetzen, da hier Subjunktionen durch Konjunktionen verknüpft und die zusammengesetzten Aussagen dann auf Disjunktionen zurückgeführt werden. Die Ermittlung der eindeutigen Lösung kann dann mit einer Warheitstafel oder nach dem Ausschlussprinzip erfolgen.

11. **Müllers zu Besuch**
Für den Abschluss der Materialien wurde eine Aufgabe mit fünf Aussagevariablen gewählt, in der allerdings eine Variable durch eine Äquivalenz "verdoppelt" wurde. Das Rätsel kann daher auf vier Aussagevariablen zurückgeführt werden.

Auch hier wurde in der Musterlösung das Ausschlussprinzip in den Vordergrund gestellt, um den SuS Alternativen zum Erstellen der sehr umfangreichen Wahrheitstafeln aufzuzeigen. Die Musterlösung wurde so konzipiert, dass es prinzipiell möglich ist, erst hier das Ausschlussprinzip zu verallgemeinern, um abschließend die Einheit abzurunden und den Ausblick auf die Weiterführung in Klasse 10 zu geben.[36]

35 Zu empfehlen ist hier in erster Linie sein Buch "Logik-Ritter und andere Schurken"[SMU1] . Dort sind zahlreiche anregende Logikrätsel im Kontext von Lüge und Wahrheit zu finden.
36 Vgl. [ARZ], 1973, S. 1 und S. 42.

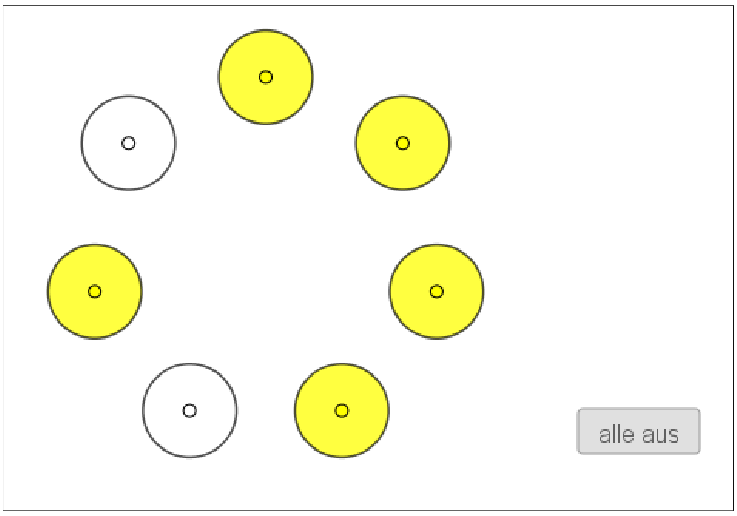
8. Stunde: Optionaler Exkurs zur Simulation "Lights on!" mit GeoGebra

Dieser optionale Exkurs wird hier nicht im Rahmen eines ausführlichen exemplarischen Stundenverlaufs dargestellt. Es sollen nur einzelne Aspekte erläutert werden:

Motivation:
SuS lösen im Vorfeld oder zu Beginn einer Doppelstunde das Rätsel "Lights on!"
Ggf wurde auch schon der theoretische Hintergrund erläutert, das ist aber nicht zwingend erforderlich.

Zielsetzung: Zur Vertiefung der Kenntnisse rund um Wahrheitswerte und Boolsche Variablen, werden diese in der Praxis in GeoGebra eingesetzt, um ein Logikrätsel zu simulieren. Konkret werden dabei "Kontrollkästchen" zur Steuerung der dynamischen Farbgebung von Objekten verwendet und erste Erfahrungen mit einfachen GeoGebra-Skriptbefehlen gemacht.

Umsetzung
im PC-Raum oder mit Tablets im Klassenzimmer, in Einzelarbeit mit kooperativer Unterstützung durch Nachbarn und die Lehrkraft. Die SuS erstellen auf Basis der Anleitung (siehe Material) eine Simulation des Logikrätsels "Lights on!", bei dem sieben Lampen unter erschwerten Bedingungen zum Aufleuchten gebracht werden müssen. Jeder Klick ändert nicht nur den Zustand der ausgewählten Lampe, sondern auch den der beiden Nachbarlampen.



Binnendifferenzierung ...
durch verschiedene Versionen der Simulation. Die SuS erstellen entweder die Basisversion oder eine erweiterte Version. In beiden Versionen ist die Steuerung mittels Boolscher Variablen prinzipiell identisch. In der Basisversion werden die sieben Lampen als Punkte modelliert, bei deren Auswahl ("Anklicken") jeweils bestimmte Aktionen ausgelöst werden. In der erweiterten Version werden die Lampen als Kreisflächen modelliert. Dadurch ergeben sich mögliche Vertiefungen. Neben der Anwendung einfacher geometrischer Abbildungen betrifft dies vor allem die Vernetzung von Geometrie und Algebra am Beispiel von Kreisflächen, die als Visualisierung bestimmter quadratischer Ungleichungen entdeckt werden.

Material:
`M9aug08_Lights_on.odt`
`M9aug08_7Lampen_basisversion.ggb`
`M9aug08_7Lampen.ggb`

Literatur

[AHR] Ahrens, Tilo; Hettlich, Frank; u.a.: „Mathematik“, Springer Spektrum, 2018, 4. Auflage

[AIG] Aigner, Martin: „Diskrete Mathematik“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 6. Auflage

[ARN] Arnold, Ruedi; Hartmann, Werner: „LogicTraffic – Logik in der Allgemeinbildung“, Artikel in: Informatik-Spektrum, Vol. 30, Nr. 1, Springer Verlag, 2007

[ARZ] Arzt, Kurt; Goller, Wilhelm: „Lambacher Schweizer Aussagenlogik und Schaltalgebra“, Klett Verlag, Stuttgart, 1973

[BEU] Beutelspacher, Alfred; Zschiegner, Marc-Alexander: „Diskrete Mathematik für Einsteiger“, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014, 5. erweiterte Auflage,

[ENG] Engesser, Herrmann (Red.): Schülerduden „Mathematik“, Dudenverlag, 1990, 5. Auflage

[GAR] Gardner, Martin: „Mathematischer Zirkus“, Ullstein Verlag, Berlin, 1984, (Originalausgabe: „Mathematical Circus“, Verlag Alfred. A. Knopf, New York)

[GLO] Glossauer, Tobias: „(Hoch-)Schulmathematik,“ Springer Spektrum, Wiesbaden. 2015

[LES] Lesky, P.; Ulshöfer, K.: „Themenhefte Mathematik – Boolsche Algebra“, Klett Verlag, Stuttgart, 1977

[LOE] Löh, Clara; Krauss, Stefan; Kilbertus, Niki (Hrsg.): „Quod erat knobelandum – Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg“, Springer Spektrum, Heidelberg, 2016

[REI] Reinhardt, Fritz; Söder, Heinrich: „dtv-Atlas zur Mathematik, Band 1“, DTV, München, 1991, 9. Auflage

[SMU1] Smullyan, Raymond: „Logik-Ritter und andere Schurken, Diabolische Rätsel, Interplanetarische Verwicklungen und Gödelsche Systeme“, Deutsche Ausgabe: S. Fischer Verlag, Frankfurt, 1989; (Originalausgabe: „Forever undecided. A puzzle guide to Gödel“, Verlag Alfred A.Knopf, New York, 1987)

[SMU2] Smullyan, Raymond: „The Riddle of Scheherazade and Other Amazing Puzzles“, A Harvest Book, Harcourt, Brace & Company, Florida, USA, 1998, (originally published: Alfred A. Knopf, New York, 1997)