KLASSE 9

AUSSAGENLOGIK UND GRAPHEN (3.2.2.2)

HINTERGRUND ZUM UNTERRICHTSGANG

Olaf Grund– E-Mail: olaf.grund@fb75-rpk.de – April 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 3

Aussagenlogik 4

Aussagen, Verknüpfungen und Wahrheitstafeln 4

Die Disjunktion – Hinweise zum ein- und ausschließenden "oder" 5

Die Subjunktion – Notwendige und hinreichende Bedingungen 5

"Wenn a, dann b" – mehrdeutige Formulierungen 6

Implikation und Äquivalenz als Tautologien 7

Boolsche Algebren 8

Allgemeine Boolsche Algebra 8

Das Dualitätsprinzip 9

Interpretation als Mengenalgebra 9

Interpretation als Teileralgebra 10

Boolsche Algebra über der Trägermenge B=[0,1] 12

Zweistellige Boolsche Funktionen 12

Mengenalgebra – Visualisierung mit Venn-Diagrammen 13

Verschiedene Schreibweisen der Interpretationen 14

Abgrenzung der Aussagenalgebra von der elementaren Algebra 14

Boolsche Funktionen und ihre Normalformen 15

Kanonische Disjunktive und Konjunktive Normalform (KDNF, KKNF) 16

Anhang 20

Historische Anmerkungen zur Boolschen Algebra 20

Literatur 21

Einleitung

Die Konzeption der Unterrichtseinheit zur Einführung in die Aussagenlogik fußt auf der Tatsache, dass Aussagen- und Mengenalgebra lediglich zwei (von vielen) Modellen einer gemeinsamen abstrakten Struktur sind, der zugrundeliegenden Boolschen Algebra.

Die Boolsche Algebra lässt sich vielfältig interpretieren. Man kann sie als abstrakte mathematische Struktur auffassen (als Spezialfall eines Ringes oder eines distributiven komplementären Verbandes). Konkrete Modelle trifft man dagegen in vielen Gebieten, wie z.B. der Kombinatorik, Informationstheorie, Graphentheorie oder Matrizenrechnung an.

Große Bedeutung hat ihre Interpretation als Schaltalgebra erlangt, beispielsweise für die Konstruktion von Computern, da durch die Vereinfachung von Schaltkreisen auf Basis der Aussagenalgebra viel Hardware eingespart werden kann.

Allerdings ist diese Interpretation bei weitem nicht nur auf elektrische Netze beschränkt.
Sie ist vielmehr universell anwendbar auf jede Art von Energieübertragung in Leitungsnetzen mit Knoten, an denen der Energiefluss ein- und ausgeschaltet oder umgelenkt werden kann. Es kann sich dabei um Gas- oder Flüssigkeitsströme, Lichtstrahlen oder mechanische Energieübertragung wie z.B. rollende Kugeln handeln.

In diesem Überblick zum fachlichen Hintergrund werden zunächst im ersten Kaptiel in knapper Form die Grundlagen der Aussagenlogik beschrieben, wobei der Schwerpunkt auf Erläuterungen zur kontraintuitiven Subjunktion gelegt wurde. Viele der hier beschriebenen Zusammenhänge sind für die Umsetzung unmittelbar relevant und werden daher auch bei der Beschreibung des Unterrichtsverlaufs aufgegriffen. Nach Ende des ersten Kapitels sollte der im Fokus stehende fachliche Hintergrund zur reinen Aussagenlogik abgedeckt sein.

Die Lektüre des zweiten Kapitels bietet darüber hinausgehende Inhalte zur Vertiefung. Hier werden Eigenschaften und Interpretationen der Boolschen Algebra ausführlicher dargestellt und verschiedene Aspekte zur Vernetzung von Teilgebieten beleuchtet.

Historische Anmerkungen und ein Ausblick auf Anknüpfungspunkte für die weitere Vertiefung runden diese Hintergrundinformationen ab.

Viel Vergnügen beim Lesen!
Anregungen und Korrekturhinweise können Sie mir gerne direkt zukommen lassen.

O. Grund, März 2019
(*olaf.grund@fb75-rpk.de*)

Aussagenlogik

Aussagen, Verknüpfungen und Wahrheitstafeln

In der Aussagenlogik versteht man unter einer Aussage einen sprachlichen oder formalen Ausdruck, dem man genau einen der beiden möglichen Wahrheitswerte (w: wahr, f: falsch) zuordnen kann.
Die Negation (Verneinung) einer Aussage a wird mit ¬a ("nicht" a) bezeichnet und kehrt den Wahrheitsgehalt der Aussage um: ¬a ist genau dann wahr, wenn a falsch ist und umgekehrt. Rechts ist die zugehörige Wahrheitstafel (Wahrheitswerttabelle) zu sehen.

a	¬ a
w	f
f	w

Aussagen bezeichnet man mit Aussagevariablen wie z.B.

a: Ich bin krank. b: Ich gehe zum Arzt. c: Der Arzt kommt zu mir.

Man unterscheidet zwischen *elementaren (atomaren)* und *zusammengesetzten (verknüpften) Aussagen*. Die Art der logischen Verknüpfung beschreibt man mit Operatoren (Junktoren), was hier nur für die vier grundlegenden Verknüpfungen ausgeführt werden soll:

Verknüpfung	formal	Beispiel
Konjunktion	$a \wedge b$	Ich bin krank *und* gehe zum Arzt.
Disjunktion	$b \vee c$	Ich gehe zum Arzt *oder* der Arzt kommt vorbei (oder beides).
Subjunktion	$a \rightarrow b$	*Wenn* ich krank bin, *dann* gehe ich zum Arzt.
Bijunktion	$a \leftrightarrow b$	*Wenn* ich krank bin, *dann* gehe ich zum Arzt *und umgekehrt*. (Ich gehe *genau dann* zum Arzt, *wenn* ich krank bin.)

Hinweis: Hier werden nicht die Aussagen verknüpft, sondern ihre Wahrheitswerte! Trotzdem spricht man anschaulich von der Verknüpfung von Aussagen. Mit Wahrheitstafeln lassen sich diese Verknüpfungen übersichtlich darstellen:

		Konjunktion	Disjunktion	Subjunktion	Bijunktion
a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

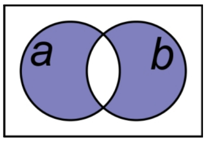
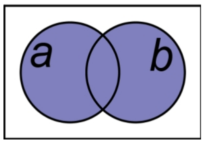
Kontravalenz[1]
$a \oplus b$
f
w
w
f

Auf der linken Seite (hier links vom Doppelstrich) gibt man die atomaren Aussagevariablen und alle möglichen Kombinationen ihrer Wahrheitswerte vor. Rechts werden dann in jeweils einer eigenen Spalte die Wahrheitswerte der betrachteten Aussagen eingetragen. Im Falle von zwei Variablen sind wie hier vier Zeilen nötig, mit jeder weiteren Variable verdoppelt sich die erforderliche Zeilenanzahl, bei n Variablen sind 2^n Zeilen erforderlich.
Neben den oben aufgeführten Verknüpfungen können weitere eingebunden werden.
Eine Übersicht findet man in der Datei `M9aug01a_16Verknuepfungen.odt`.

1 Synonym zum Begriff Kontravalenz werden auch folgende Bezeichnungen verwendet: "ausschließendes Oder", "ausschließende Disjunktion" (auch vollständige oder antivalente Disjunktion), "Bisubtraktion", "Antivalenz", "kontradiktorischer Gegensatz", "Kontrajunktion" oder "Alternation", vgl. Vgl. Wikipedia: Artikel "Kontravalenz", URL: *https://de.wikipedia.org/wiki/Kontravalenz* (abgerufen am 17.3.2019).

Die Disjunktion – Hinweise zum ein- und ausschließenden "oder"

Neben den vier im Bildungsplan geforderten Verknüpfungen ist hier zusätzlich die Wahrheitstafel der Kontravalenz $a \oplus b$ aufgeführt, deren Behandlung für die Begriffsbildung zu den anderen Verknüpfungen vorteilhaft ist.[2] Einerseits kann sie als Negation der Bijunktion (bzw. der Äqivalenz) zu einer vertieften Durchdringung beitragen.[3] Andererseits muss die Disjunktion ("a *oder* b") deutlich von der Kontravalenz ("*entweder* a *oder* b") abgegrenzt werden, da das Bindewort "*oder*" in der Umgangssprache sowohl in ein- als auch ausschließender Bedeutung verwendet wird:

<table>
<tr><td>Beispiel:</td><td>Deutung:</td><td>Visualisierung</td></tr>
<tr><td>"Möchten Sie
Kaffee oder Tee?"</td><td>entweder Kaffee oder Tee, i.d.R. nicht beides
Der Fall "a und b" wird ausgeschlossen.
→ Ausschließendes "oder"
(engl. "exclusive or", Logikgatter: "a XOR b")</td><td>
</td></tr>
<tr><td>"Mit Milch
oder Zucker?"</td><td>Milch oder Zucker oder beides
Der Fall "a und b" wird eingeschlossen.
→ Einschließendes "oder"
(engl. "inclusive or", Logikgatter: "a OR b")</td><td>
</td></tr>
</table>

Um der Mehrdeutigkeit zu begegenen, die im Alltag durch das Nebeneinander von ein- und ausschließendem "oder" besteht, wird die Disjunktion im Unterrichtsgang durch ihre Wahrheitstafel definiert, bevor die Unterschiede zur Kontravalenz aktiv thematisiert werden.

Die Subjunktion – Notwendige und hinreichende Bedingungen

Bei der Einführung der Bijunktion sind keine Probleme zu erwarten, da die SuS hier eine intuitive tragfähige Vorstellung der Gleichheit mitbringen. Bei der Subjunktion verhält sich das anders. Bei der Unterrichtsplanung muss berücksichtigt werden, dass die Definition der Subjunktion kontraintuitiv ist und sich die Zusammenhänge erst schrittweise erschließen lassen. Daher erfolgt die Einführung der Subjunktion in dieser Einheit auch nicht gleichzeitig mit den anderen Verknüpfungen, sondern erst in der dritten Stunde nach der Einführung von Konjunktion, Disjunktion und Bijunktion.[4]

Aus der Wahrheitstafel entnimmt man, dass eine Subjunktion $a \rightarrow b$ nur genau dann falsch ist, wenn die Voraussetzung a wahr und die Behauptung b falsch ist. Diese Vorstellung liegt auch der Definition der Subjunktion in der Unterrichtseinheit zugrunde und spielt eine zentrale Rolle bei der Begriffsbildung.
Die Subjunktion $a \rightarrow b$ (im englischen Sprachraum auch $a \supset b$) wird als materiale Implikation oder Konditional bezeichnet. Falls die Aussage $a \rightarrow b$ wahr ist, dann ist die Wahrheit von a eine hinreichende Bedingung für die Wahrheit von b. Dieser Zusammenhang lässt sich je

2 Die Bedeutung der Kontravalenz in der Logik ist eher gering. In der Schaltalgebra hat sie als XOR-Verknüpfung hingegen große Bedeutung. Im Unterrichtsgang wird daher das Junktorsymbol "⊕" nicht eingeführt und nur auf das Logikgatter "XOR" hingewiesen. Es gibt aber auch (v.a. im engl. Sprachraum) aussagenlogische Konzepte, bei denen die Kontravalenz von Beginn an mit einem eigenen Junktorsymbol eingebunden wird, vgl. [ROS], S. 6/7

3 Zahlreiche Anregungen hierzu findet man in der Beschreibung des Unterrichtsganges.

4 Ein mögliches Vorgehen ist in der Datei `M9aug02_unterrichtsverlauf.odt` ausführlich beschrieben.

nach Perspektive unterschiedlich formulieren[5]:

Formulierung	Beispiel "Nasse Straße"
a ist hinreichend für b	*Dass es regnet, ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Straße nass ist.*
schon wenn a gilt, dann gilt b	*Schon wenn es regnet, ist die Straße nass.*
a setzt voraus, dass b gilt	*Wenn es regnet, muss die Straße nass sein.*
b ist notwendig für a	*Eine nasse (unüberdachte) Straße ist eine notwendige Bedingung dafür, dass es regnet.*
Nur wenn b, dann kann a gelten	*Nur wenn die Straße nass ist, dann kann es regnen.*
wenn a, dann b	*Wenn es regnet, ist die Straße nass.*
a impliziert b [6]	*Regen impliziert Straßennässe*

Dass b genau dann notwendig für a ist, wenn a hinreichend für b ist, kann auf den ersten Blick überraschen, ist aber bei genauerer Betrachtung einleuchtend. Wenn a hinreichend für b ist, zieht die Wahrheit von a die Wahrheit von b nach sich. Daher kann a nicht eintreten, ohne dass b eintritt, die Wahrheit von b ist also „notwendig“ für die Wahrheit von a.[7]

Einerseits sollte im Unterricht an Alltagsbeispielen das Ausblenden kausaler und temporaler Zusammenhänge explizit thematisiert werden. Anderseits können innermathematische Beispiele hilfreich sein, um zentrale Ideen herauszuarbeiten.Dazu noch zwei Beispiele:[8]

1) "Dass eine Scheibe zerbricht, ist notwendig dafür, dass ich einen Stein hindurchwerfe"
Einen Stein durch eine Scheibe zu werfen ist hinreichend dafür, dass diese zerbricht, aber nicht notwendig, da sie auch aus anderen Gründen zerbrechen könnte. Andererseits ist es dafür, dass ich einen Stein durch die Scheibe werfe, notwendig, dass die Scheibe zerbricht. Ich kann den Stein nicht durch die Scheibe werfen, ohne dass dies geschieht.
2) Die Teilbarkeit durch 6 ist hinreichend für die Teilbarkeit durch 3. Umgekehrt ist die Teilbarkeit durch 3 notwendig für die Teilbarkeit durch 6, aber nicht hinreichend.

"Wenn a, dann b" – mehrdeutige Formulierungen

In einer Subjunktion / einem Konditional nennt man a das Antezedens, b das Konsequens oder Sukzedens. Mit dem umgangssprachlichen „wenn … dann“ möchte man fast immer einen inhaltlichen (kausalen oder auch temporalen) Zusammenhang zwischen Antezedens und Konsequens ausdrücken. Dies wird auch am Eingangsbeispiel deutlich: Regen verursacht Straßennässe, erst fällt der Regen, dann wird die Straße nass. Wenn SuS die hinreichende Bedingung falsch verstehen und einen kausalen oder temporären Zusammenhang sehen, dann ist es klar, dass die umgekehrte Richtung „Nur wenn die Straße nass ist, dann kann es regnen“ Probleme bereiten kann. Die Subjunktion (oder materiale Implikation) besagt aber letztlich nur: "Wenn die Aussage a wahr ist, dann ist auch die Aussage b wahr" – ohne kausale oder temporale Zusammenhänge.

Die Formulierung "Wenn a, dann b“ ist also <u>ungünstig</u>, da sie im Deutschen mehrdeutig ist. Sie wird umgangssprachlich nicht für materiale (wahrheitsfunktionale), sondern mehrheitlich

5 Vgl. Wikipedia: Seite „Aussagenlogik", URL: *https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik* (abgerufen: 15.03.2019)
6 Hinweise zum Unterschied zwischen Subjunktion und Implikation folgen im übernächsten Abschnitt.
7 Vgl. wikipedia, Erläuterungen auf der Seite "Aussagenlogik", abgerufen am 15.3.2019), URL: *https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Hinreichende_und_notwendige_Bedingung* (abgerufen: 15.3.2019).
8 Vgl. [AHR], S. 23

für inhaltliche (kausale oder zeitliche) Zusammenhänge verwendet. Zwischen der materialen Implikation und dem umgangssprachlichen „wenn …, dann ...“ muss daher im Unterricht genau unterschieden werden. Dazu sollte man die oben aufgeführten Formulierungen häufiger wechseln, um Missverständnisse zu vermeiden, die aus den vielen Bedeutungen des deutschen „wenn …, dann …“ resultieren können.

Kenneth H. Rosen bringt außerdem noch die Sichtweise eines "Vertrages" ins Spiel, um hilfreiche Vorstellungen zur Subjunktion zu motivieren, indem man den konditionalen Charakter einer Aussage betont.[9] Als Beispiel führt er die Aussage eines Politikers an, der im Wahlkampf verspricht: "Wenn ich gewählt werde, dann werde ich die Steuern senken." Stellt man sich diese Aussage im Kontext eines bindenden Vertrages vor, so werden die Wähler nur dann erwarten, dass der Politiker die Steuern senkt, *wenn* er gewählt wird. Seine Aussage wird nur dann falsch, wenn er gewählt würde *und* die Steuern nicht senken würde.

Implikation und Äquivalenz als Tautologien

In der Aussagenalgebra werden verknüpfte Aussagen auf Allgemeingültigkeit untersucht. Aussagenlogische Terme wie z.B. $(p \vee \neg p)$, die für jede mögliche Einsetzung von Wahrheitswerten wahr sind, nennt man allgemeingültig und bezeichnet sie als Tautologien. Hierzu zwei Beispiele[10]:

p	**q**	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg p \vee q)$
w	w	w	**w**	w
w	f	f	**w**	f
f	w	w	**w**	w
f	f	w	**w**	w
Es gilt:		$(p \rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee q)$

p	q	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
w	w	w	**w**	w
w	f	f	**w**	w
f	w	f	**w**	w
f	f	f	**w**	f
Es gilt:		$(p \wedge q)$	$\Rightarrow$	$(p \vee q)$

Mithilfe von Wahrheitstafeln werden alle möglichen Fälle (Kombinationen der Wahrheitswerte der Variablen) durchgespielt, um wie hier die Allgemeingültigkeit einer Aussage nachzuweisen.

An den Beispielen wird gleichzeitig der Unterschied zwischen Subjunktion und Implikation sowie Bijunktion und Äquivalenz deutlich:
Wenn eine *Bijunktion allgemeingültig* ist, dann spricht man von einer *Äquivalenz* und verwendet als Symbol das Zeichen "$\Leftrightarrow$". Eine *allgemeingültige Subjunktion* wird als *Implikation* bezeichnet und formal mit dem Symbol "$\Rightarrow$" ausgedrückt.

Diese Sichtweise liegt dem Bildungsplan und damit auch dieser Einheit zugrunde. Einige Autoren sind anderer Auffassung und unterscheiden nicht mehr zwischen Subjunktion und Implikation. Daher ist die Verwendung der Symbole für die Junktoren auch nicht einheitlich.

Eine Implikation oder Äquivalenz kann dann eben auch falsch sein und ist nicht per se allgemeingültig. Welche Defintion der Implikation bzw. Äquivalenz zugrundegelegt wurde, ergibt sich dann meistens direkt aus dem Zusammenhang.

Dieser Unterschied ist auch der Grund dafür, dass beim vorliegenden Umsetzungsvorschlag der Begriff "Bijunktion" eingeführt wird, obwohl er im Bildungsplan nicht vorgesehen ist. Da die

9 Vgl. [ROS], S.6, 7

10 aus den Unterrichtsmaterialien, vgl. Datei M9aug03_sub_imp.odt, Aufgabe 4.

Subjunktion als "aktiver" Fachbegriff gekennzeichnet ist und sich daraus zwangsläufig die Abgrenzung zur Implikation ergibt, sollte konsequenterweise auch die Bijunktion von der Äquivalenz abgegrenzt werden.

Boolsche Algebren

Die auffallende Gleichartigkeit so verschiedener Verknüpfungsgebilde wie Aussagenalgebra, Mengenalgebra oder Schaltalgebra führen zu einem gemeinsamen übergeordneten mathematischen Gebilde, das *Boolsche Algebra* bzw. *Boolscher Verband* genannt wird. Ein Boolscher Verband $(B,+,\cdot,\neg)$ ist eine abstrakte Struktur, bei der auf einer Trägermenge B zwei zweistellige Verknüpfungen "+" und "·" mit vorgegebenen Eigenschaften und eine einstellige Verknüpfung "¬" definiert sind.
Als Symbol für die Negation wird neben dem Zeichen "¬" oft auch der Überstrich "¯" verwendet. Für die zweistelligen Verknüpfungen werden häufig die gleichen Symbole "+" und "·" wie in unserer gewohnten Rechenalgebra verwendet, ihnen werden aber bei der Boolschen Algebra keine der möglichen Bedeutungen – logischer, mathematischer oder realer Art – zugeschrieben, sie werden bedeutungsfrei verwendet:

$$\mathbf{(B,+,\cdot,\neg) = (B,\sqcup,\sqcap,\,\bar{}\,) = \ldots}$$

Aussagenalgebra, Mengenalgebra oder Schaltalgebra sind konkrete Interpretationen bzw. Modelle der Boolschen Algebra. Zunächst soll allgemein definiert werden, was man unter der Boolschen Algebra $(B,+,\cdot,\neg)$ versteht, bevor im übernächsten Abschnitt auf die spezielle Boolsche Algebra über der Trägermenge $B=\{0,1\}$ eingegangen wird.

Allgemeine Boolsche Algebra

Eine Boolsche Algebra kann auf vielfache Art und Weise axiomatisiert werden. Den besten Überblick liefert zunächst das redundante Axiomensystem von Guiseppe Peano. Es charakterisiert eine Boolsche Algebra als Menge mit Nullelement 0 und Einselement 1, auf der die zweistelligen Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$ und eine einstellige Verknüpfung $\neg$ definiert sind, durch folgende Axiome (Nummerierung unterscheidet sich von der Peanos[11]):

Kommutativgesetze	(1)	$a\vee b = b\vee a$	(1')	$a\wedge b = b\wedge a$
Assoziativgesetze	(2)	$(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$	(2')	$(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$
Absorptionsgesetze	(3)	$a\wedge(a\vee b) = a$	(3')	$a\vee(a\wedge b) = a$
Distributivgesetze	(4)	$a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$	(4')	$a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
Komplementärgesetze	(5)	$a\vee\neg a = 1$	(5')	$a\wedge\neg a = 0$
Neutralitätsgesetze	(6)	$a\vee 0 = a$	(6')	$a\wedge 1 = a$
Extremalgesetze	(7)	$a\vee 1 = 1$	(7')	$a\wedge 0 = 0$
Dualitätsgesetze	(8)	$\neg 1 = 0$	(8')	$\neg 0 = 1$
Idempotenzgesetze	(9)	$a\vee a = a$	(9')	$a\wedge a = a$
Involutionsgesetz	(10)	$\neg(\neg a) = a$		
De Morgansche Gesetze	(11)	$\neg(a\vee b) = \neg a\wedge\neg b$	(11')	$\neg(a\wedge b)=\neg a\vee\neg b$

11 Hier wurde die Reihenfolge aus [ARZ], S. 28 gewählt.

Die hier verwendete Symbolik wurde auch der Unterrichtseinheit zugrunde gelegt.
Auf verschiedene Schreibweisen wird am Ende von Kapitel 1 eingegangen.

Ein reduziertes Axiomensystem erhält man beispielsweise mit (1)-(6) und (1´)-(6´), die restlichen Gesetze können dann hergeleitet werden.[12]
Man kann nachweisen, dass sich dann auch die Assoziativgesetze (2) und die Absorptionsgesetze (3) aus den übrigen Axiomen folgern lassen.[13] Damit gelangt man zur kompakteren Definition der Boolschen Algebra nach Huntington.[14] Mit den Axiomen zur Kommutativität (1) und (1´), zur Distributivität (4) und (4´), zur Existenz der Komplemente (5) und (5´) und zur Existenz der neutralen Elemente (6) und (6´) ist die Boolsche Algebra bereits vollständig festgelegt.
Die *Boolesche Algebra* kann andererseits auch als distributiver komplementärer Verband definiert werden, wenn man die Kommutativität (1) und (1´), die Assoziativität (2) und (2´), die Absorptioneigenschaft (3) und (3´), eines der Distributivgesetze (4) oder (4´) und die Existenz der Komplemente (5) und (5´) fordert.

_____Das Dualitätsprinzip

Betrachtet man die in der Boolschen Algebra geltenden Gesetze (1)-(11) und (1´)-(11´) näher, so fällt auf, dass die jeweils nebeneinander stehenden Gesetze auseinander hervorgehen, wenn man die Symbole $\wedge$ und $\vee$ sowie 1 und 0 vertauscht. Aus dieser Symmetrie folgt, dass man diese Vertauschungen auch bei allen Folgerungen aus diesen Gesetzen durchführen darf. Diese weitreichende Eigenschaft der Boolschen Algebra nennt man Dualität: Zu jedem Satz existiert ein dualer Satz, der durch die oben beschriebenen Vertauschungen entsteht. Zwei bekannte duale Sätze sind beispielsweise die beiden Regeln von De Morgan:

$$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b \quad \text{und} \quad \neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$$

_____Interpretation als Mengenalgebra

Weitreichende Bedeutung für die schulische Umsetzung hat der Satz von *Stone*:

> "Zu jeder endlichen Boolschen Algebra $(B, \sqcup, \sqcap, \bar{\ })$ gibt es eine Mengenalgebra $(P(M), \cup, \cap, \bar{\ })$, so dass beide algebraischen Strukturen zueinander isomorph sind."[15]

P(M) bezeichnet hier die Potenzmenge der betrachteten Menge M, also die Menge aller möglichen Teilmengen von M. Besitzt die Menge M n Elemente, so besitzt ihre Potenzmenge P(M) bekanntlich 2^n Elemente. Mit dem Satz von Stone kann man daraus direkt folgern, dass *jede* endliche Boolsche Algebra 2^n ($n \in \mathbb{N}_0$) Elemente besitzen muss.[16] Dieser Zusammenhang wird im folgenden Abschnitt am Beispiel von Teilermengen verdeutlicht.

Der Satz von Stone sichert die Isomorphie jeder endlichen Boolschen Algebra zu einer entsprechenden Mengenalgebra und liefert so die Basis für die Visualisierung Boolscher Algebren im Kontext der Mengenalgebra. Venn-Diagramme sind dabei letzten Endes eine

12 Vgl. [LES], S. 82

13 Vgl. [LES], S. 93-95 "Zur Abhängigkeit von Grundgesetzen der Boolschen Algebra" oder auch [ARZ], S. 39ff zur Definition eines Boolschen Verbandes und Herleitung weiterer Gesetze.

14 Vgl. Wikipedia: Artikel "Boolsche Algebra" unter *https://de.wikipedia.org/wiki/Boolesche_Algebra* (zuletzt abgerufen am 9.3.2019).

15 Vgl. [LES], S. 110

16 a.a.O.

weitere (visuelle) Interpretation der Boolschen Algebra als Punktmengenbeziehungen in der Ebene mit Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung als Verknüpfungen.

_____*Interpretation als Teileralgebra*

Eine Vernetzung mit der Teilbarkeitslehre bietet sich ebenfalls an. Sie fußt auf dem Satz:

> "Zu jeder endlichen Boolschen Algebra $(B,\sqcup,\sqcap,\overline{})$ gibt es eine Teileralgebra $(T(n),kgV,ggT,\overline{})$ mit einer geeignet gewählten Zahl n, so dass beide algebraischen Strukturen zueinander isomorph sind."[17]

T(n) bezeichnet hier die Teilermenge der *geeignet zu wählenden* Zahl n.
Wie man n geeignet wählt, soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden.

<u>Beispiel 1</u>: Teileralgebra zu T_6

$(B,+,\cdot,\overline{})=(T_6,+,\cdot,\overline{})$ mit der Teilermenge $T_6=\{1,2,3,6\}$ als Trägermenge und den nebenstehenden Verknüpfungstafeln ist eine endliche Boolsche Algebra.
Die Verknüpfungssymbole "+" und "·" werden dabei als das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) und der größte gemeinsame Teiler (ggT) von je zwei Elementen der Trägermenge gedeutet.

+	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

·	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

Komplement $\bar{a}=\frac{6}{a}$:

a	1	2	3	6
$\bar{a}$	6	3	2	1

Die geforderten Gesetze lassen sich leicht nachprüfen:
(1) und (1´): Aufgrund der Symmetrie der Verknüpfungstafeln gilt die Kommutativität.
(4) und (4´): Die Distributivgesetze lassen sich durch Einsetzen nachweisen.
(5) und (5´): Zu jedem $a \in T_6$ gibt es den Komplementärteiler $\bar{a}$ mit $a+\bar{a}=6$ und $a\cdot\bar{a}=1$.
(6) und (6´): Die neutralen Elemente sind 1 und 6, für jedes $a \in T_6$ gilt: $a+1=a$ und $a\cdot 6=a$

Die dabei zugrundeliegende Menge M={2,3} besteht aus zwei Elementen (die „ersten beiden" Primzahlen). Ihre Potenzmenge P(M) enthält $2^2=4$ Elemente und entspricht T_6 , die als Trägermenge dieser Boolschen Algebra gewählt wurde.

{p1,p2}	kgV(2,3)=6	{6}	Grundmenge M={2,3} Trägermenge: T_6 = {1,2,3,6}
{p2}	kgV(1,3)=3	{3}	
{p1}	kgV(1,2)=2	{2}	
{ }	1	{1}	

Hinweise: Man hätte auch andere Primzahlen wählen können, z.B. würden 7 und 13 zu T_{91} führen und $(T_{91},+,\cdot,\overline{})$ wäre ebenfalls eine Boolsche Algebra. Um die Art der Verknüpfungen deutlich zu machen, kann man diese auch gleich direkt angeben: $(B,+,\cdot,\overline{})=(T_{91},kgV,ggT,\overline{})$.

<u>Beispiel 2</u>: $(B,+,\cdot,\overline{})=(T_{30},kgV,ggT,\overline{})$ mit $T_{30}=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

Zur Konstruktion einer geeigneten Teileralgebra kann man nun umgekehrt vorgehen. Man wählt sich z.B. als Grundmenge M={2,3,5} und gelangt über das Produkt $2\cdot3\cdot5=30$ zur Trägermenge T_{30}, die die weiter unten aufgeführten $2^3=8$ Elemente besitzt.

17 Beweis vgl. [LES], S. 105

Die Verknüpfungstafeln ergeben sich dann wie folgt:

kgV	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	2	3	5	6	10	15	30
2	2	2	6	10	6	10	30	30
3	3	6	3	15	6	30	15	30
5	5	10	15	5	30	10	15	30
6	6	6	6	30	6	30	30	30
10	10	10	30	10	30	10	30	30
15	15	30	15	15	30	30	15	30
30	30	30	30	30	30	30	30	30

ggT	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2	2	1	2
3	1	1	3	1	3	1	3	3
5	1	1	1	5	1	5	5	5
6	1	2	3	1	6	2	3	6
10	1	2	1	5	2	10	5	10
15	1	1	3	5	3	5	15	15
30	1	2	3	5	6	10	15	30

Komplement $\bar{a} = \frac{30}{a}$

a	1	2	3	5	6	10	15	30
$\bar{a}$	30	15	10	6	5	3	2	1

Die Potenzmenge P(M) der Menge M={p1,p2,p3}={2,3,5} ist äquivalent zur Trägermenge B={ { },{p1},{p2},{p3},{p1,p2},{p1,p3},{p2,p3},{p1,p2,p3} } mit den Elementen:

{p1,p2,p3}	1·2·3·5=30	{30}
{p2,p3}	1·3·5=15	{15}
{p1,p3}	1·2·5=10	{10}
{p1,p2}	1·2·3=6	{6}

{p3}	1·5=5	{5}
{p2}	1·3=3	{3}
{p1}	1·2=2	{2}
{ }	1	{1}

Will man eine Teileralgebra mit 16 Elementen konstruieren, so kann man das Produkt von vier beliebigen Primzahlen berechnen, z.B. 2·5·7·11=770 und hätte in der zugehörigen Teilermenge T_{770} eine passende Trägermenge gefunden.[18]

Bemerkungen zu Teileralgebren:

1. Man muss die Zahl *n* also so wählen, dass ihre Primfaktorzerlegung nur einfache Primfaktoren enthält. Nur eine Grundmenge, die aus paarweise verschiedenen Primzahlen besteht, führt zu einer geeigneten Trägermenge.
2. Teilermengen eignen sich bestens für die Vernetzung der Boolschen Algebra und der Teilbarkeitslehre. Ergänzend wäre auch hier wie bereits in Klasse 8 der Brückenschlag zu Teilergraphen möglich (vgl. Hasse-Diagramme).[19]
3. Die Teilmengenrelation der Mengenalgebra ("A ist Teilmenge von B") entspricht bei einer Teileralgebra der Relation "a ist Teiler von b". So ist beispielsweise bei der oben betrachteten Teileralgebra mit T_{30} die Zahl 2 Teiler der Zahl 10. In der zugehörigen Mengenalgebra ist in Analogie hierzu die Menge {p1} Teilmenge der Menge {p1,p3}.
4. Hinweis zur Anzahl der Elemente einer Boolschen Algebra:
   Eine Boolsche Algebra (genauer: ihre Trägermenge) besitzt 2^n Elemente, wobei n die natürliche Anzahl der Elemente der zugrundeliegenden Menge angibt.

18 Weitere Informationen zu den Beispielen und Teileralgebren findet man in [ARZ], S.39 und [LES], S. 97 ff.
19 Hinweise dazu z.B. in [ARZ], S. 82ff

Viele Autoren fassen den Begriff der Boolschen Algebra aber enger und verstehen darunter nur die boolsche Struktur mit der Trägermenge B={0,1}, die nun im Mittelpunkt stehen soll.

Boolsche Algebra über der Trägermenge B=[0,1]

Besonders einfach und effizient werden die Rechnungen, wenn man die „kleinste" Boolsche Algebra wählt, die man erhält, wenn man nur die beiden Elemente 0 und 1 zulässt und hier zusammen mit den UND-, ODER- und NICHT-Operationen betrachtet, die durch folgende Verknüpfungstafeln definiert werden.[20]

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

x	$\neg$x
0	1
1	0

Ein Element dieser Algebra kann nur die beiden Zustände 1 und 0 besitzen. Daraus ergeben sich zahlreiche Interpretationen und Anwendungsgebiete, die eingangs beschrieben wurden. Für die Verknüpfung zweier Elemente a und b kann man alternativ zu den Verknüpfungstafeln die vier möglichen Fälle in Tabellen auflisten, den sog. Wahrheitstafeln:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Zweistellige Boolsche Funktionen

Man erkennt, dass es insgesamt 4^2=16 unterschiedliche zweistelllige Verknüpfungen gibt, die in der folgenden Tabelle aufgelistet sind[21]:

a	**b**	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Junktor-symbole			$\vee$			$\rightarrow$		$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\uparrow$	$\oplus$					$\downarrow$	

Die 16 Spaltenkombinationen lassen sich dabei auf verschiedene Arten systematisch anordnen. Hier wurden z.B. die vier untereinander stehenden Ziffern als Binärzahl gedeutet. Von rechts nach links wurde dann von 0 bis 15 „hochgezählt".

Zunächst fällt die Antisymmetrie der Tabelle auf, die auf dem Dualitätsprinzip beruht. Der zweite Teil der Tabelle ergibt sich durch Spiegelung an der markierten Achse zwischen f_8 und f_9 aus dem ersten Teil, wenn man gleichzeitig 1 und 0 vertauscht (Negation der Werte).
Es gilt z.B. $a \uparrow b \Leftrightarrow \neg(a \wedge b)$ oder $a \oplus b \Leftrightarrow \neg(a \leftrightarrow b)$. Die Funktionen f_9 bis f_{16} sind also auf f_1 bis f_8 zurückführbar, man kommt bereits mit den ersten 8 Funktionen und der Negation $\neg$ aus.

20 Vgl. [BEU], S. 241

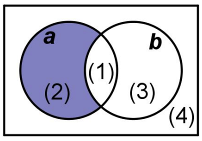
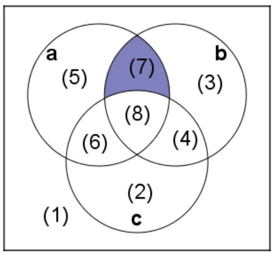
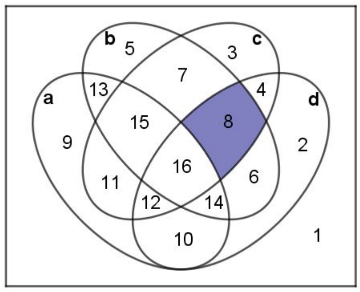
21 Vgl. [REI], S. 14

Man kann auf weitere der acht Funktionen verzichten. Die Verknüpfung f_4 ist von b, f_6 von a, f_1 von a und b unabhängig und daher überflüssig. Außerdem ist f_3 durch Vertauschen von a und b auf f_5 zurückführbar. Insgesamt kann man daher mit den Funktionen f_2, f_5, f_7, f_8 und der Negation $\neg$ bereits alle zweistelligen Verknüpfungen beschreiben.

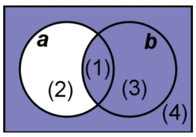
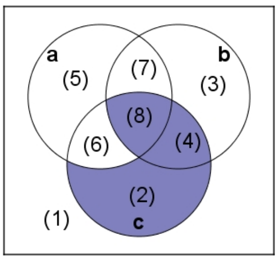
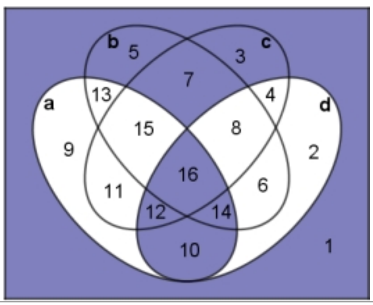
Konjunktion (f_8), Disjunktion (f_2), Subjunktion (f_5) und Bijunktion (f_7) stehen daher auch im Zentrum dieser Unterrichtseinheit. Ihre Wahrheitstafeln sind in der Tabelle oben grau unterlegt. Eine umfassendere Übersicht zu den zweistelligen Verknüpfungen finden Sie in der separaten Datei `M9aug01a_16Verknuepfungen.odt`. Dort wurde allerdings eine andere Reihenfolge der Funktionen gewählt, um die Zusammenhänge auf einer DIN-A4-Seite möglichst umfassend darstellen zu können.[22]

_____*Mengenalgebra – Visualisierung mit Venn-Diagrammen*

Wie bereits erwähnt, kann die Boolsche Algebra u.a. als Mengen-, Aussagen- oder Schaltalgebra ausgelegt werden. Im Kontext der Mengenalgebra ist eine weitere Interpretation wichtig, da sie die Visualisierung mithilfe von Venn-Diagrammen ermöglicht. Betrachtet man in einer Ebene Punktmengen, die gefärbt (=1) oder nicht gefärbt (=0) sein können und legt als Verknüpfungen die Vereinigung, den Schnitt und das Komplement zugrunde, so kann man die Elemente der Boolschen Algebra auch visuell deuten. Dabei kann jede Vollkonjunktion der Aussagevariablen als Venn-Diagramm mit höchstens einer gefärbten Teilfläche visualisiert werden. Für zwei, drei oder vier Variablen sind hier entsprechende Beispiele aufgeführt:

		
$a \wedge \neg b$	$a \wedge b \wedge \neg c$	$\neg a \wedge b \wedge c \wedge d$

Die Wahrheitstafeln der Verknüpfungen von zwei, drei oder vier Aussagenvariablen können ebenso mit Venn-Diagrammen visualisiert werden, auch hier ein exemplarischer Einblick:

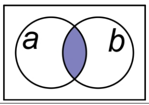
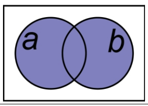
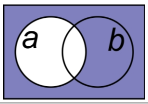
		
$a \rightarrow b$	$(\neg a \wedge c) \vee (b \wedge c)$	$a \leftrightarrow d$

22 Datei `M9aug01a_16Verknuepfungen.odt` im Verzeichnis 1_hintergrund.

Aufgrund der Isomorphie zwischen Mengen- und Aussagenalgebra kann man also Venn-Diagramme zur Begriffsbildung für die Aussagenalgebra nutzen.[23] Gleichzeitig schlägt man so "zwei Fliegen mit einer Klappe". Da die Betrachtung von Mengen und Teilmengen samt ihrer Relationen seit den Erfahrungen des "Bourbakismus" nicht mehr im Kerncurriculum verankert ist, fehlen den SuS meist tragfähige Grundvorstellungen zur Mengenlehre. Diese sind aber in vielen Bereichen wichtig, unter anderem auch in der Stochastik. Im Rahmen der Einführung in die Aussagenlogik können Vorstellungen zur Mengenlehre begleitend angesprochen und entwickelt werden, ohne dass die Mengenalgebra dabei im Zentrum steht.

Verschiedene Schreibweisen der Interpretationen

Operatoren (Junktoren) boolescher Algebren können sehr unterschiedlich aussehen. Die Tabelle zeigt einen ersten Überblick am Beispiel der drei elementaren Verknüpfungen:

Logik-gatter	Aussagen-algebra $(A,\vee,\wedge)$;	Mengen-algebra $(P(M),\cup,\cap)$)	Venn-Diagramme	Teiler-algebra $(T_n$, kgV, ggT)	Boolsche Alegbra $(B,+,\cdot)$; $(B,\sqcup,\sqcap)$
UND *AND*	$a \wedge b$	$A \cap B$		ggT(a,b)	$x \cdot y$; $x \sqcap y$
ODER *OR*	$a \vee b$	$A \cup B$		kgV(a,b)	$x+y$; $x \sqcup y$
NICHT *NOT*	$\neg a$	A^c; A' ; $\overline{A}$		$\bar{a}=\frac{n}{a}$	$\overline{x}$; $\sim x$; ...

Hinweise:
Die ausführlichere Übersicht zu den Schreibweisen wurde in eine separate Datei ausgelagert.[24]
Die elementaren Operatoren AND, OR und NOT und die daraus abgeleiteten Operatoren NAND, NOR, XOR und XNOR stehen als Logikgatter zur Verfügung.[25] Sie könnten z.B. mithilfe einer Tabellenkalkulation in den Unterrichtsgang einbezogen werden. Zur Betonung der Abstraktion werden in Booleschen Algebren häufig die Variablen x, y, z, … und kontextfreie Symbolpaare wie $\sqcap$, $\sqcup$ oder $*$, $\circ$ benutzt. Mathematiker schreiben aber auch häufig „·" für UND und „+" für ODER wegen ihrer entfernten Ähnlichkeit zur Multiplikation und Addition anderer algebraischer Strukturen und stellen NICHT mit einem Überstrich, einer Tilde ~ oder einem nachgestellten Hochstrich dar.

Abgrenzung der Aussagenalgebra von der elementaren Algebra

Zusammengesetzte Aussagen können als zweistellige Wahrheitsfunktionen aufgefasst werden. Die Konjunktion $x \wedge y$ zweier Aussagen entspricht dabei der Multiplikation der zugehörigen Wahrheitswerte, die Disjunktion $x \vee y$ der Addition, die Negation $\neg x$ der Subtraktion $1-x$. Für die Operationen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und beliebige Aussagen gelten die aus der Algebra bekannten Gesetze: das Kommutativ-, das Assoziativgesetz und sogar *zwei* Distributivgesetze. Außerdem existieren neutrale Elemente und zusätzlich zu jedem Element Komplemente (inverse Elemente) bezüglich der beiden definierten Verknüpfungen. Die

23 Vgl. zu Euler- und Venn-Diagrammen: *https://de.wikipedia.org/wiki/Mengendiagramm* (abg. am 22.3.2019)
24 Siehe Datei `M9aug01b_Schreibweisen.odt` im Verzeichnis 1-hintergrund.
25 Informationen zu Logikgattern finden Sie unter *https://de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter* (abg. 23.2.2019).

folgende Übersicht zeigt die Unterschiede der geltenden Gesetze in der Boolschen und der elementaren Algebra:

Rechengesetze	Aussagenalgebra	Elementare Algebra
Kommutativität	$x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$	$x \cdot y = y \cdot x$ $x+y = y+x$
Assoziativität	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ $x+(y+z) = (x+y)+z$
Distributivität	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \cdot (y+z) = (x \cdot y)+(x \cdot z)$
Existenz neutraler Elemente	$1 \wedge x = x$, $0 \vee x = x$	$1 \cdot x = x$ $0+x = x$
Existenz des Komplements	$x \wedge \neg x = 0$, $x \vee \neg x = 1$	

In der gewohnten arithmetischen Algebra gilt das Dualitätsprinzip nicht, insbesondere gibt es keine Komplementbildung und es gilt kein zweites Distributivgesetz. Die grau hinterlegten Flächen markieren diese Unterschiede.

Boolsche Funktionen und ihre Normalformen

Man betrachtet die Boolsche Algebra mit der Trägermenge B={0,1}. Die Funktionen f mit $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, $n \geq 1$ werden als Boolsche Funktionen bezeichnet. Die Anzahl *n* der Argumente (Variablen) einer Boolschen Funktion heißt ihre Stelligkeit. Für n = 1 spricht man von unären (*unary*), für n = 2 von binären (*binary*) und für n = 3 von ternären (*ternary*) Funktionen. Eine Boolsche Funktion ist damit eine Abbildung, die jeweils n bits auf ein einziges bit abbildet. Alle sechzehn binären Boolschen Funktionen sind hier in gleicher Nummerierung wie auf Seite 12 (in modifizierter Tabellenform) nochmals aufgeführt:

	Funktion	**x** **y**	**1** **1**	**1** **0**	**0** **1**	**0** **0**		
1	Konstant 1	1	1	1	1	1	Allaussage	(TRUE)
2	x oder y	$x \vee y$	1	1	1	0	Disjunktion	(OR)
3	wenn y,dann x	$y \to x$	1	1	0	1	Subjunktion	
4	x	x	1	1	0	0		
5	wenn x, dann y	$x \to y$	1	0	1	1	Subjunktion	
6	y	y	1	0	1	0		
7	Äquivalenz	$x \leftrightarrow y$	1	0	0	1	Bijunktion	(XNOR)
8	x und y	$x \wedge y$	1	0	0	0	Konjunktion	(AND)
9	negiertes Und	$x \uparrow y$	0	1	1	1	Negierte Konjunktion	(NAND)
10	exklusives Oder	$x \oplus y$	0	1	1	0	Kontravalenz	(XOR)
11	nicht y	$\neg y$	0	1	0	1	Negation	(NOT)
12	x und nicht y	$x \wedge \neg y$	0	1	0	0		
13	nicht x	$\neg x$	0	0	1	1	Negation	(NOT)
14	nicht x und y	$\neg x \wedge y$	0	0	1	0		
15	negiertes Oder	$x \downarrow y$	0	0	0	1	Negierte Disjunktion	(NOR)
16	konstant 0	0	0	0	0	0	Nullaussage	(FALSE)

a	b	c	y
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

Jede n-stellige Boolesche Funktion kann durch ihre Wahrheitstafel dargestellt werden. Rechts ist z.B. die Wahrheitstafel einer tenären Boolschen Funktion f mit f: y = f(a, b, c) zu sehen. Jede solche Wahrheitstafel enthält je eine Spalte für die Funktionsargumente (atomare Variablen), jeweils eine Zeile für jede Kombination der Wahrheitswerte und eine zusätzliche letzte Spalte, in der der zugehörige Funktionswert angegeben wird.

Die abgebildete Wahrheitstafel hat $2^3=8$ Zeilen, die Wahrheitstafel einer n-stelligen Booleschen Funktion hat 2^n Zeilen. Es gibt $2^{(2^3)}=2^8=64$ dreistellige (tenäre) und $2^{(2^n)}$ n-stellige Boolsche Funktionen.

Die Darstellung mithilfe einer Wahrheitstafel kommt folglich mit wachsender Variablenzahl schnell an ihre Grenzen. Für die Herstellung elektronischer Schaltungen ist es in der Praxis daher sehr bedeutsam, dass zu jeder Wahrheitstafel ein äquivalenter logischer Term generiert werden kann. Statt die Wahrheitstafel mit viel Rechenaufwand aufzustellen, kann dann der äquivalente Term nach den Rechengesetzen der Boolschen Algebra umgeformt und auf der Grundlage des vereinfachten Terms eine Schaltung konstruiert werden.

Beim Aufstellen von äquivalenten Termen zu vorgegebenen Wahrheitstafeln spielen die Normalformen von Boolschen Funktionen eine entscheidende Rolle. Normalformen von Boolschen Funktionen werden im Informatikunterricht der Kursstufe behandelt und sollen daher hier nicht im Mittelpunkt stehen.[26] Vielmehr soll im nächsten Kapitel ein anschaulicher Zugang erläutert werden, der im Rahmen einer optionalen Vertiefung in einer neunten Klasse denkbar wäre und sich dabei hauptsächlich auf binäre Boolschen Funktionen beschränkt.

Kanonische Disjunktive und Konjunktive Normalform (KDNF, KKNF)

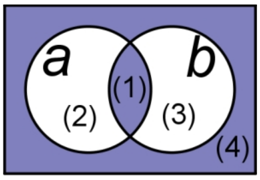
Den aussagelogischen Funktionsterm zu einer durch ihre Wahrheitstafel vorliegenden Boolschen Funktion kann man auf zwei fundamentale Arten generieren. In der *konjunktiven Normalform* (KNF) als Konjunktion von *Disjunktionen* der beteiligten Variablen bzw. ihrer Negationen und in der *disjunktiven Normalform* (DNF) als Disjunktion von entsprechenden Konjunktionen.[27] Wir beschäftigen uns hier nur mit *kanonischen Normalformen*. Anmerkungen zur Unterscheidung von Normalformen (DNF und KNF) und den kanonischen Normalformen (KDNF und KKNF) folgen am Ende dieses Abschnittes.

Was sich hinter den Normalformen verbirgt, soll hier zunächst am Beispiel einer binären Boolschen Funktion erläutert werden. Disjunktive und konjunktive Normalformen lassen sich mit Venn-Diagrammen auch anschaulich motivieren. Jeder Vollkonjunktion[28] der atomaren Aussagen (bzw. ihrer Negationen) in den einzelnen Zeilen der Wahrheitstabelle entspricht dabei eine der Teilflächen im Venn-Diagramm, was hier für den Fall n=2 am Beispiel der Bijunktion a↔b erläutert wird.

26 Zum Einlesen eignet sich z.B. [BEU], S. 245 ff. Dort ist u.a. ein von **K**arnaugh und **V**eitch entwickeltes grafisches Verfahren zur Veinfachung boolescher Ausdrücke beschrieben, bei dem sog. KV-Diagramme eingesetzt werden. [AIG], S. 217ff und [LES], S. 116 ff bieten ebenfalls kompakte Überlicke.

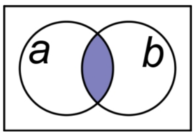
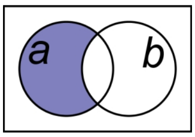
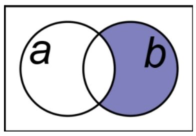
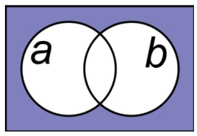
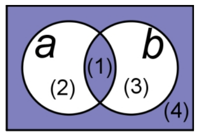
27 Vgl. Aufgabe 2.26 , [AHR], S. 48

28 Von einer Vollkonjunktion spricht man, wenn alle auftretenden Variablen (oder ihre Negationen) eingebunden sind.

Zeile	a	b	f	Venn-Diagramm	a∧b	a∧¬ b	¬ a∧b	¬ a∧¬ b
(1)	1	1	**1**		1	0	0	0
(2)	1	0	0		0	1	0	0
(3)	0	1	0		0	0	1	0
(4)	0	0	**1**		0	0	0	1

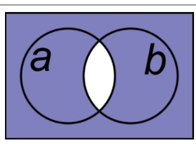
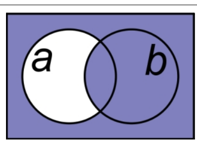
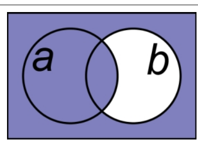
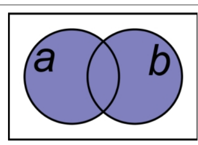
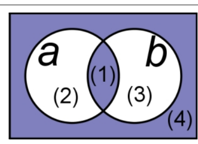
a) Kanonische Disjunktive Normalform (KDNF) von f: $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$
b) Kanonische Konjunktive Normalform (KKNF) von f: $(\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$

a) Wir beginnen mit der **KDNF**, die vier möglichen Vollkonjunktionen sind hier dargestellt.

(1) a∧b	(2) a∧¬ b	(3) ¬ a∧b	(4) ¬ a∧¬ b	f
				

Man bildet die Disjunktion aus *den* Vollkonjunktionen, bei denen in der Spalte von f eine "1" eingetragen ist. Im Beispiel wählt man also (1) und (4) aus und kann sofort die kanonische disjunktive Normalform (KDNF) von f notieren: $\mathbf{(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)}$.
Dieser Term liefert nur bei den Kombinationen (1) und (4) eine "1", anderfalls eine "0".
Im anschaulichen Modell der Mengenalgebra geht man dabei von den Schnittmengen in den ersten vier Spalten aus und setzt durch Vereinigung der passenden Schnittmengen das gesuchte Venn-Diagramm zusammen.
Die Disjunktion (in der Aussagenalgebra) entspricht der Vereinigung (in der Mengenalgebra) bzw. einer Addition (in der Boolschen Algebra). Die Konjunktion (in der Aussagenalgebra) entspricht dem Durchschnitt (in der Mengenalgebra) bzw. dem Produkt (in der Boolschen Algebra). Abstrahiert man dies in der kontextfreien Struktur der Boolschen Algebra, so werden beim Aufstellen der KDNF also Summen von Produkten gebildet, weshalb das Verfahren im engl. Sprachraum auch als *sum of products* (SOP) bezeichnet wird.

b) Das Vorgehen zum Aufstellen der **KKNF** ist dual zu dem bei der KDNF. Die vier möglichen Volldisjunktionen erhält man durch Negation der Vollkonjunktionen von oben:

(1´) ¬ a∨¬ b	(2´) ¬ a∨ b	(3´) a∨¬ b	(4´) a∨ b	f
				

Nun geht man nach dem Dualitätsprinzip vor. Während oben die "Summe von Produkten" gebildet wurde, bildet man nun das "Produkt von Summen" (engl. *product of sums* (POS)).
Man bildet also die Konjunktion aus den Volldisjunktionen, bei denen in der Spalte von f eine "0" eingetragen ist. Im Beispiel wählt man (2) und (3) aus und kann damit die kanonische konjunktive Normalform (KKNF) von f notieren: $\mathbf{(\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)}$.
Dieser Term liefert nur bei den Kombinationen (2) und (3) eine "0", andernfalls eine "1".
Im anschaulichen Modell der Mengenalgebra geht man dabei von Vereinigungsmengen der ersten vier Spalten aus und bildet deren Schnittmenge, um das gesuchte Venn-Diagramm zu

erhalten, eben gerade "anders herum", dual im Sinne der Boolschen Algebra.
Didaktischer Hinweis: Würde man die Venn-Diagramme auf Folie drucken und übereinander legen, so könnte man die Schnittmenge daran erkennen, dass sie am dunkelsten gefärbt wäre. Dazu müsste man die Farbintensität der gefärbten Ausgangsmengen relativ niedrig wählen, was in der mitgelieferten GeoGebradatei `M9aug02_VENN-2Var.odt` mithilfe des Schiebereglers DK ("Deckkraft") realisiert werden könnte. Geschickter ist allerdings das Invertieren der Farben, dann bleibt die der Schnittmenge entsprechende Teilfläche weiß.

Zur Dualität von KDNF und KKNF in der Wahrheitstafel

Betrachtet man die Wahrheitstafeln der vier Vollkonjunktionen, so enthalten diese jeweils genau eine "1" und 4-1=3 Nullen. Durch die Disjunktion der Vollkonjunktionen werden alle Einsen in die Spalte von f "übertragen". Es wird gewissermaßen die Summe gebildet.
Bei der dualen Vorgehensweise der KNF nimmt jede der vier Volldisjunktionen nur genau einmal den Wert "0" an, sonst immer "1". Durch die Konjunktion der Volldisjunktionen werden alle Nullen in die Spalte von f "übertragen", es wird das Produkt gebildet.

Betrachtet man dies in der Wahrheitstafel, so lassen sich die beiden dualen Vorgehensweisen auch auf numerischer Ebene der Tabellen gut nachvollziehen:

Zeile	a	b	(1) $a \wedge b$	(4) $\neg a \wedge \neg b$	f	$\neg$(2) $\neg a \vee b$	$\neg$(3) $a \vee \neg b$
(1)	1	1	1	0	**1**	1	1
(2)	1	0	0	0	**0**	0	1
(3)	0	1	0	0	**0**	1	0
(4)	0	0	0	1	**1**	1	1

$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

$(a \cdot b) + (\neg a \cdot \neg b)$

Kanonische
Disjunktive Normalform
"Summe von Produkten"

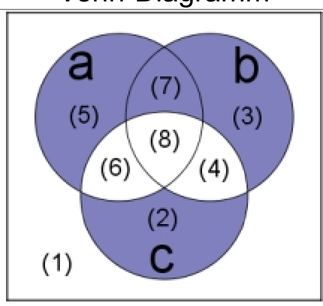
$(\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$

$(\neg a + b) \cdot (a + \neg b)$

Kanonische
Konjunktive Normalform
"Produkt von Summen"

Diese duale Sicht soll nun abschließend noch am Beispiel einer ternären Boolschen Funktion erläutert werden, wobei auf eine ausführliche Darstellung verzichtet wird.

Beispiel: y = f(a, b, c) (Es liegt nur die Wahrheitstafel vor, ein Term ist nicht bekannt)

j	a	b	c	f	Cj	Venn-Diagramm
(1)	0	0	0	0	$\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$	
(2)	0	0	1	1	$\neg a \wedge \neg b \wedge c$	
(3)	0	1	0	1	$\neg a \wedge b \wedge \neg c$	
(4)	0	1	1	0	$\neg a \wedge b \wedge c$	
(5)	1	0	0	1	$a \wedge \neg b \wedge \neg c$	
(6)	1	0	1	0	$a \wedge \neg b \wedge c$	
(7)	1	1	0	1	$a \wedge b \wedge \neg c$	
(8)	1	1	1	0	$a \wedge b \wedge c$	

Analog zum vorangegangenen Beispiel der binären Funktion sind auch hier die Wahrheitstafeln der Vollkonjunktionen (C2, C3, C5 und C7) und der Volldisjunktionen ($\neg$C1, $\neg$C4, $\neg$C6 und $\neg$C8) zu sehen:

Zeile	a	b	c	C2	C3	C5	C7	**f**	¬ C1	¬ C4	¬ C6	¬ C8
(1)	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	1	1	1
(2)	0	0	1	1	0	0	0	**1**	1	1	1	1
(3)	0	1	0	0	1	0	0	**1**	1	1	1	1
(4)	0	1	1	0	0	0	0	**0**	1	0	1	1
(5)	1	0	0	0	0	1	0	**1**	1	1	1	1
(6)	1	0	1	0	0	0	0	**0**	1	1	0	1
(7)	1	1	0	0	0	0	1	**1**	1	1	1	1
(8)	1	1	1	0	0	0	0	**0**	1	1	1	0

$C2 \vee C3 \vee C5 \vee C7$ — KDNF — "sum of products"

$\neg C1 \wedge \neg C4 \wedge \neg C6 \wedge \neg C8$ — KKNF — "product of sums"

Kanonische disjunktive Normalform (Disjunktion von Vollkonjunktionen):

KDNF von f: $y = C2 \vee C3 \vee C5 \vee C7$
$= (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$

Kanonische konjunktive Normalform (Konjunktion von Volldisjunktionen):

KKNF von f: $y = \neg C1 \wedge \neg C4 \wedge \neg C6 \wedge \neg C8$
$= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$

Unterschied zwischen Normalformen und kanonischen Normalformen

Wie bereits angemerkt, spricht man bei einer Konjunktion, in der alle auftretenden Variablen (oder ihre Negationen) einmal eingebunden sind, von einer *Vollkonjunktion* (*Minterm*). Bei einer Volldisjunktion (*Maxterm*) verhält es sich analog. Wenn in einer DNF nur Vollkonjunktionen auftreten, so wie das hier der Fall war, so handelt es sich um eine kanonische disjunktive Normalform (KDNF). Entsprechend spricht man von einer kanonischen konjunktiven Normalform (KKNF), wenn nur Volldisjunktionen auftreten. Bei der KDNF (KKNF) sind also alle Variablen (bzw. ihre Negationen) in allen Klammern genau einmal enthalten.
Die DNF ist dagegen "nur" als disjunktive Verknüpfung konjunktiver Terme definiert, deswegen können bei einer DNF auch Variablen (bzw. ihre Negationen) fehlen, z.B. wäre $f(a, b, c) = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee \neg c$ eine DNF. Analog verhält es sich bei der KNF.
In Klasse 9 ist diese Unterscheidung nicht erforderlich. Man kann vereinfachend von der DNF bzw. KNF sprechen, da jede KDNF (KKNF) gleichzeitig eine DNF (KNF) ist, nur umgekehrt ist dies nicht der Fall.[29]

29 Eine Möglichkeit zur Vertiefung bietet die im Unterrichtsgang näher beschriebene Lernplattform LogicTraffic von Ruedi Arnold, bei der auch zwischen DNF und KDNF unterschieden werden könnte.

Anhang

Historische Anmerkungen zur Boolschen Algebra

Den Namen *Boolesche Algebra* (engl. *boolean algebra*) prägte Henry Maurice Sheffer (1882-1964) erst 1913. Die Anfänge der booleschen Algebra gehen auf George Boole (1815-1864) zurück, der mit seinem Logikkalkül von 1847 erstmals algebraische Methoden in der Klassenlogik und Aussagenlogik anwandte. Die grundlegende Idee, alle in der formalen Logik auftretenden Begriffe durch Symbole zu ersetzen, war schon anderen vor Boole gekommen, aber er war der erste, der ein praktikables System schuf.[30]

In seinem Hauptwerk *An investigation into the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* aus dem Jahr 1854 führte er die Ansätze von 1847 aus und stellte sie systematisch dar. Der Titel macht deutlich, dass Boole auch schon die enge Verbindung von Aussagenalgebra und Stochastik erkannte, die Anwendbarkeit logischer Gesetze auf das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, die dann auch Werte zwischen den Wahrheitswerten 0 und 1 annehmen.[31]

Ihre heutige Form verdankt die Boolsche Algebra der Weiterentwicklung durch Mathematiker wie John Venn (1834-1923), William Stanley Jevons (1835-1882), Charles Peirce (1839-1814), Ernst Schröder (1841-1902) und Giuseppe Peano (1858-1932).
In Booles originaler Algebra entspricht die Multiplikation dem UND, die Addition dagegen weder dem exklusiven ENTWEDER-ODER noch dem inklusiven ODER. Die genannten Boole-Nachfolger gingen dagegen vom inklusiven ODER aus. Dieser Übergang wurde erstmals von Jevons vollzogen.[32]

Charles Sanders Peirce führte 1880 den Peirce-Pfeil "↓" als Symbol für die Negation der Disjunktion ein (($a \downarrow b \Leftrightarrow$ a NOR b) und für die Negation der Konjunktion verwendete Henry Maurice Sheffer 1913 den nach ihm benannten Sheffer-Strich "|" ($a \mid b \Leftrightarrow a \uparrow b \Leftrightarrow$ a NAND b). Das aussagenlogische ODER-Zeichen $\vee$ wurde 1906 von Bertrand Russell (1872-1970) eingeführt[33] und der niederländische Mathematiker Arend Heyting (1898-1980) brachte 1930 die heute gebräuchlichen Symbole $\wedge$ und $\neg$ ein.

Ernst Schröder wurde in Mannheim geboren. Nach dem Studium der Mathematik und Physik in Heidelberg und Königsberg habilitierte er 1865 in Zürich und wirkte ab 1876 als Professor an der TH Karlsruhe und errang mit seinen Arbeiten zur *Algebra der Logik* internationale Anerkennung. Er optimierte die Logik von George Boole und entwickelte 1877 das erste vollständige Axiomensystem der booleschen Algebra.[34] Unter anderem führte er auch den Begriff der Normalform ein und entdeckte das Dualitätsprinzip in der Klassenlogik.

Peano brachte Schröders System 1888 in die heutige Form und führte dabei die Symbole $\cap$ und $\cup$ ein. Sein erweitertes (und redundantes) Axiomensystem (vgl. S. 8) diente auch als als Ausgangspunkt für diese Hintergrundinformationen zur Boolschen Algebra.

30 Vgl. [GAR], S. 101
31 Der von Heinz Klaus Strick 2018 verfasste Lebenslauf Georg Booles bietet einen sehr guten Überblick. Herr Strick hat im Rahmen seines mathematischen Monatskalenders zahlreiche Lebensläufe berühmter Mathematiker verfasst, weitere Informationen finden Sie auch auf seiner Homepage unter *https://www.mathematik-ist-schoen.de/mathematiker/* (abgerufen am 9.3.2019).
32 Vgl. [GAR], S.104
33 Apostolos Doxiadis und Christos H. Papadimitriou legten Bertrand Russells bewegtes Leben dem Comic "Logiccomix" zugrunde, der einen ersten Zugang zur Entwicklung der Logik im 20. Jahrhundert bietet.
34 Zitiert nach wikipedia *https://de.wikipedia.org/wiki/Ernst_Schröder_(Mathematiker)*) (abgerufen am 9.3.2019). Sein dreibändiges Hauptwerk "Algebra der Logik" entstand von 1890-1895 in Karlsruhe.

Literatur

[AHR] Ahrens, Tilo; Hettlich, Frank; u.a.: „Mathematik“, Springer Spektrum, 2018, 4. Auflage

[AIG] Aigner, Martin: „Diskrete Mathematik“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 6. Auflage

[ARN] Arnold, Ruedi; Hartmann, Werner: „LogicTraffic – Logik in der Allgemeinbildung“, Artikel in: Informatik-Spektrum, Vol. 30, Nr. 1, Springer Verlag, 2007

[ARZ] Arzt, Kurt; Goller, Wilhelm: „Lambacher Schweizer Aussagenlogik und Schaltalgebra“, Klett Verlag, Stuttgart, 1973

[BEU] Beutelspacher, Alfred; Zschiegner, Marc-Alexander: „Diskrete Mathematik für Einsteiger“, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014, 5. erweiterte Auflage,

[ENG] Engesser, Herrmann (Red.): Schülerduden „Mathematik“, Dudenverlag, 1990, 5. Auflage

[GAR] Gardner, Martin: „Mathematischer Zirkus“, Ullstein Verlag, Berlin, 1984, (Originalausgabe: „Mathematical Circus“, Verlag Alfred. A. Knopf, New York)

[GLO] Glossauer, Tobias: „(Hoch-)Schulmathematik,“ Springer Spektrum, Wiesbaden. 2015

[LES] Lesky, P.; Ulshöfer, K.: „Themenhefte Mathematik – Boolsche Algebra“, Klett Verlag, Stuttgart, 1977

[LOE] Löh, Clara; Krauss, Stefan; Kilbertus, Niki (Hrsg.): „Quod erat knobelandum – Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg“, Springer Spektrum, Heidelberg, 2016

[REI] Reinhardt, Fritz; Söder, Heinrich: „dtv-Atlas zur Mathematik, Band 1“, DTV, München, 1991, 9. Auflage

[ROS] Rosen, Kenneth H.: "Discrete Mathematics and its applications", McGraw-Hill, New York, 2012, 7. Auflage

[SMU1] Smullyan, Raymond: „Logik-Ritter und andere Schurken, Diabolische Rätsel, Interplanetarische Verwicklungen und Gödelsche Systeme“, Deutsche Ausgabe: S. Fischer Verlag, Frankfurt, 1989; (Originalausgabe: „Forever undecided. A puzzle guide to Gödel“, Verlag Alfred A.Knopf, New York, 1987)

[SMU2] Smullyan, Raymond: „The Riddle of Scheherazade and Other Amazing Puzzles“, A Harvest Book, Harcourt, Brace & Company, Florida, USA, 1998, (originally published: Alfred A. Knopf, New York, 1997)