„Neutrale“ und „inverse“ Elemente

Lösungen:

1. $(\mathbb{Z}\ ;+)$

   Neutrales Element: $z + a = z \Leftrightarrow a = 0$

   Inverses Element: $z + b = 0 \Leftrightarrow b = -z$

2. für n = 17: neutrales Element $c \bmod 17 + a \bmod 17 \equiv c \bmod 17$

   $\Leftrightarrow a \equiv 0 \mod 17$

   inverses Element: $c \bmod 17 + b \bmod 17 \equiv 0 \mod 17$

   $\Leftrightarrow (c + b) \bmod 17 \equiv 0 \mod 17$

   $\Leftrightarrow c + b \equiv 0 \mod 17$

   $\Leftrightarrow b \equiv (17 - c) \mod 17$

   für allgemeines n:

   neutrales Element $c \bmod n + a \bmod n \equiv c \bmod n$

   $\Leftrightarrow a \equiv 0 \mod n$

   inverses Element: $c \bmod n + b \bmod n \equiv 0 \mod n$

   $\Leftrightarrow (c + b) \bmod n \equiv 0 \mod n$

   $\Leftrightarrow c + b \equiv 0 \mod n$

   $\Leftrightarrow b \equiv (n - c) \mod n$

3.

- Neutrales Element: Drehung um $\alpha = r \cdot 360°,\ r \in \mathbb{R}$

  Inverses Element zu Drehung um α: Drehung um $\beta = -\alpha$ (Gegenricht.)
- <u>Neutral:</u>

  keine Veränderung der abgebildeten Figur (mathematisch: Abbildung ist die „Identität“)
- <u>Invers:</u>

  1. Möglichkeit: es wird immer um $\beta = -\alpha$ gedreht.

  2. Möglichkeit: es wird in die gleiche Richtung gedreht, jedoch dann um den Winkel $360° - \alpha$
- Individuell. Kernpunkt: Nach Überschreiten einer bestimmten Grenze beginnt die „Zählung“ von Neuem.

4. *Menge die Potenzfunktionen* $f: x \to f(x) = x^n; n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R} > 0$.

Wir suchen die Potenzfunktion, für die bei der Verkettung mit einer Potenzfunktion g gilt,...

- Neutrales Element: ...dass sich nach der Verkettung als Ergbnis wieder die Potenzfunktion g ergibt.

  Inverses Element: ...nach Verkettung mit der Potenzfunktion g als Ergebis das neutrale Element ergibt.

- Bestimmung der jeweiligen Funktionen:

  Neutral: $(a \circ g)(x) = a(g(x)) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad a(x) = x \quad$ (Bem.: $x = x^1$)

  Invers: Es sei $b(x) = x^r$ und $g(x) = x^t$

$$
\begin{aligned}
& (b \circ g)(x) = b(g(x)) = x^1 \quad . \\
\Leftrightarrow \quad & (x^t)^r = x^{t \cdot r} = x^1 \\
\Leftrightarrow \quad & t \cdot r = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & r = 1/t.
\end{aligned}
$$

  Beachte: Wir haben jetzt zwar eine Lösung gefunden, jedoch liegt diese nicht in unserer Funktionenklasse: Ist t eine natürliche Zahl (wie gefordert), so ist $r = 1/t$ ein echter Bruch. Und damit ist die Funktion $b(x) = x^r$ keine unserer betrachteten Funktionen. Hier existiert kein inverses Element bezüglich der Verkettung.