

„Wenn da steht ableiten musste nur die Hochzahl vorne  
dran schreiben und oben eins weniger machen.“

Was bleibt eigentlich von Analysisunterricht?

## Aufbau

- Konzeptionelle Vorüberlegungen
- Exemplarische Unterrichtsbeispiele
- Experimentieren

2 / x

## Aufbau mathematischen Wissens

Mathematik schreitet voran, indem man Prozesse in Konzepte verwandelt.

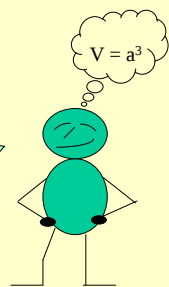


→ 5

$$543 + 621 =$$

3 / x

Formal-operationales Denken



Konkret  
operationales  
Denken

4 / x

## Übergang

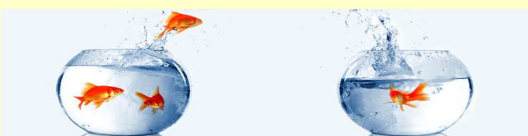
### formales – operationales Denken

verbreitete Annahme:

Übergang vom konkret operationalen zum formal operationalen Denken ist stetig und primär abhängig von der eingesetzten Lernzeit.

Beobachtung:

Der Übergang vom konkret operationalen zum formal operationalen Denken ist unstetig und primär abhängig von der eingesetzten Denkkraft.



5 / x

## Jean Piaget

Ich meine, dass einer der wohl entscheidendsten lernpsychologischen und didaktischen Fehler dann geschieht, wenn Lehrpersonen von ihren Schülern zu früh fordern, die gesicherte Basis der konkreten Erfahrung zu verlassen.



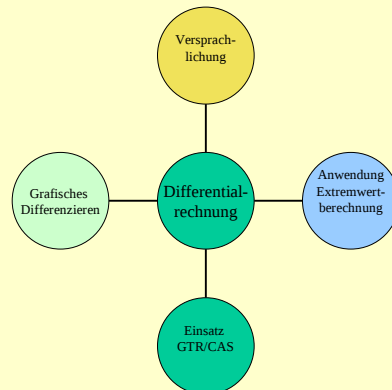
Mathematisieren und Formalisieren und ein stark gewichtetes rein deduktives Vorgehen wirken entmutigend und hemmend auf die Entwicklung des formal-deduktiven Denkens.

6 / x

## Folgerungen ?

- Lernumgebungen anbieten, in denen die Begegnungen auf beiden Ebenen möglich sind
- Freiheit zur eigenständigen Lernzeitgestaltung geben
- Unterschiedliche Perspektiven einnehmen, um möglichst viele Aspekte eines Begriffs zu beleuchten

## II. Unterrichtsbeispiele



## Unterrichtsbeispiele mit Reisetagebüchern

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler, wie gewünscht eine Ferienarbeit.... Im Vordergrund stehen aber nicht die fertigen Ergebnisse, sondern wie Sie zu diesen Ergebnissen kommen. Dokumentieren Sie deshalb bitte alle Gedanken, Ideen, Bilder und Gefühle, die Ihnen während der Bearbeitung durch den Kopf gehen.

Die Fragen:

- Was bedeutet der Ausdruck:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$
- Zeigen Sie, dass der Ausdruck gilt.

## Schülerbeitrag 1

Erst einmal durchlesen, was wir überhaupt machen sollen... Hmmm, Mathematik sollte als Sprache eingeführt werden, keine Ahnung, was das soll. Na ja, vielleicht wird es einfacher, wenn ich mir erst einmal durchlese, was wir in den letzten Stunden gemacht haben ....

*Einige Gläser Apfelsaftschorle später*

Ok, jetzt ist schon einiges klarer..

## Schülerbeitrag 2

Ferienaufgabe 2009

1. Als ich mir die Ferienaufgabe, das erste Mal anschaute, ließ es mich eiskalt den Rücken runter. Da Mathematik eh nicht so zu meinen Lieblingsfächern gehört, schob ich mich diese deshalb.

2. Wenn ich eine Weile darüber nachdenke fallen mir zur eulerschen Zahl erstmal die Logarithmen ein, die ich nicht sonderlich mag.

## Schülerbeitrag 3

Ich zeigen, dass der Ausdruck gilt. Ich gab die Operation ein ... und ...  $e^x$ ! Ja, wolle! Auf einmal war alles so simpel. Die Antwort auf Frage 1 lautet nun einfach: Der Ausdruck bedeutet, dass die Tangentensteigung die  $e$ -Funktion ist und folglich der Funktionswert von  $e$  und die Tangentensteigung in einem Punkt übereinstimmen. Ein langer Weg, um an diese Erkenntnis zu gelangen. Um das ganze abzurunden, hoffe ich, dass mein Plan nun aufgeht und Tangentensteigung und  $e$ -Funktion in einem Punkt übereinstimmen.



#### Schülerbeitrag 4

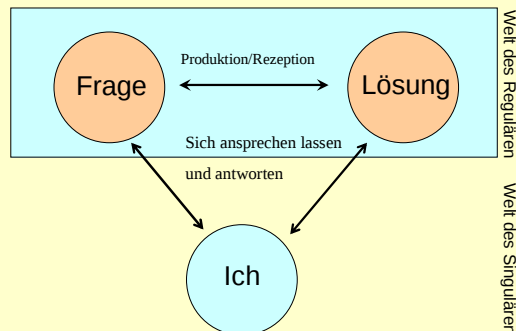
*Also, wenn ich für h immer kleinere Werte einsetze, kommt irgendwann  $e^x$  heraus.*

|                   |                       |                       |                        |                |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|----------------|
| h                 | 0,1                   | 0,001                 | 0,0001                 | 0,00000001     |
| $(e^{x+h}-e^x)/h$ | 1,05171e <sup>x</sup> | 1,0005 e <sup>x</sup> | 1,00005 e <sup>x</sup> | e <sup>x</sup> |

*Ich glaube, dass über die allgemeine Definition und dieser mit h (Differenzenquotient) auf die angegebene Gleichung (1. Ableitung) kommt. Ich kam mit dieser Ferienaufgabe nicht so gut zurecht. Es ist mir schwerer gefallen, meine Gedanken dazu zu formulieren, das fand ich bei der 1. wesentlich einfacher. stop*



„Entscheiden ist, dass der Stoff überhaupt zu einem Gegenüber wird mit dem man reden kann.“ (Gallin / Ruf)



Weit des Regulären

Weit des Singulären



#### Grafisches Differenzieren

- Drei Stufen
- Zeitaufwand: eine Doppelstunde zum Experimentieren



#### Grafisches Differenzieren I

Skizzieren Sie die Kurve in das untenstehende Schaubild.

Fahren Sie dann mit dem Gefährt die Kurve entlang, bestimmen Sie den Steigungswinkel und berechnen Sie die Steigung an der jeweiligen Stelle.

Erinnern Sie sich? Die Steigung berechnet man mit :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$$

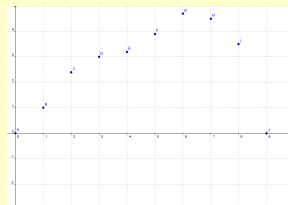


Tragen Sie nun die Steigungswerte an den entsprechenden Stellen ein. Zeichnen Sie davon ausgehend die Ableitungsfunktion. Welche Zusammenhänge zwischen dem Graphen von f und dem der Ableitungsfunktion f' stellen Sie fest?



#### Grafisches Differenzieren II

- Skizzieren Sie nun, bevor Sie mit dem Messen der Steigungswinkel beginnen, den möglichen Verlauf der Ableitungsfunktion.
- Gehen Sie dann wie an der ersten Station vor.



- Antizipation des Verlaufs der Ableitung
- Überprüfung der eigenen Hypothese am Modell
- Sattelpunkt



#### Grafisches Differenzieren III

Welche Zusammenhänge zwischen den Hoch-, Tief und Wendepunkten des Graphen von f und den Funktionswerten f' stellen Sie fest? Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

|                                                |                                           |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Die Funktion f hat an der Stelle a ein Maximum | dann hat die f' an der Stelle x = a ..... |
|                                                |                                           |



- Ableitungsgraph der Sinusfunktion wird antizipiert
- Vorbereitung zur Berechnung und Charakterisierung der Extrema



## Konfrontation oder Motivation oder einfach nur Einstiegsphase?

Das erste, womit das Verstehen beginnt ist, dass etwas uns anspricht.

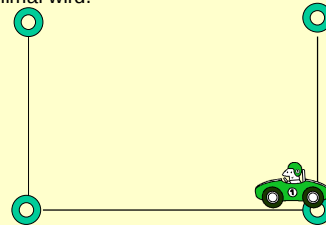


Hans-Georg Gadamer

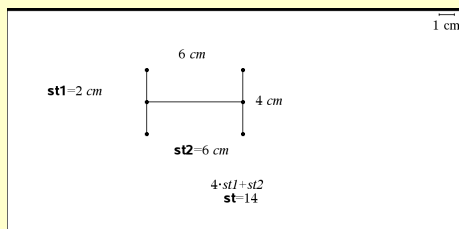


## Modellierung Vier Städte Problem

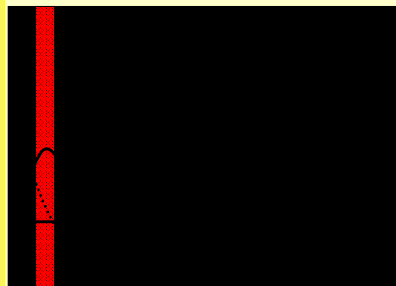
Vier Städte liegen auf den Eckpunkten eines Rechtecks und sollen so durch Straßen verbunden werden, dass die Gesamtlänge der Strassen und damit der Asphaltverbrauch minimal wird.



## Modellierung Vier Städte Problem



## Die Umgebung ist rot



## Literatur

- Barzel, Bärbel: Mathematik Methodik, Cornelsen Skriptor, Berlin 2007.
- Leuders, Timo: Mathematikdidaktik – Praxishandbuch für Sekundarstufe I und II. Cornelsen 2003.
- Malle, Günther: Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden 1993
- Ruf, U./ Gallin, P.: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Kallmeyer, Seelze-Velber 1998
- Stewart, Ian: Warum gerade Mathematik? Spektrum Verlag, München 2007