Logisch-deduktiv strukturieren – Eine kognitive Herausforderung

Aufgearbeitet am Beispiel der Elementargeometrie

Inhalt Seite

A. Einführung und Zielsetzung

Unterrichtsqualität ist fachspezifisch. Für den Mathematikunterricht ist eine geeignete und für die Schüler sichtbare und nachvollziehbare Strukturierung ein Qualitätsmerkmal. Dazu müssen wir Lehrer für uns selbst die Inhalte ordnen, sie in Beziehung zu dem Großen-Ganzen setzen und letztlich für uns die fundamentalen Fragen beantworten:
Warum soll das gelernt werden? Wie soll dieses Material gegliedert sein? Nach welchen Strukturierungsmerkmalen? Welches sind die übergeordneten Lernziele? In welcher Weise kann man einen roten Faden, einen Gesamtzusammenhang herstellen? Wie kann ich vor dem Kind/dem Jugendlichen/den Eltern meinen Mathematikunterricht als bildungs-wertvoll begründen?

Als Antworten auf diese Fragen genügt i.a. nicht der Verweis auf verpflichtende Lehrplaninhalte, auf die mathematischen Anforderungen eines bestimmten Studiums oder der Hinweis auf die Bewältigung einer bestimmten lebenspraktischen Situation.

Wir sollten auch bedenken, dass ein nicht strukturierter Unterricht, im Extremfall ein Neben- und Hintereinander von Inhalten, dem Schüler zu Recht als sinnlos erscheint. Es ist hier die unterrichtlich grundsätzliche Frage von Sinn und Bedeutung gestellt. Der Schüler (der Lernende) lernt besser, wenn er sein Tun in einen Sinnzusammenhang (einen Bedeutungszusammenhang) bringen kann. Dem Schüler einen solchen Zusammenhang zu bieten, heißt auch, ihn nicht nur als „Inhaltsschlucker“ anzusehen, sondern als denkendes Individuum. Bietet man dem Schüler keinen Zugang zu Sinn und Bedeutung oder ist darin unklar, wird ihm das Lernen erschwert und er gerät in einen Bedeutungskonflikt mit der Schule (der Gesellschaft) und „versteht die Welt nicht mehr“.

Wenn man nun strukturieren will, muss man sich überlegen, welche Merkmale und Prinzipien man zugrunde legt. Im Folgenden soll aufgezeigt werden, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen geeignete Strukturierungsmerkmale bieten. Für die Strukturierung „im Großen“ sind das die überfachlichen Kompetenzbereiche **Lernen, Begründen, Problemlösen, Kommunizieren.** Für die Strukturierung „im Kleinen“ müssen diese entsprechend herunter gebrochen werden. Diese Gedanken führen wieder auf die These des Eingangsreferats:
Kompetenzorientierter Mathematikunterricht orientiert sich nicht nur an Inhalten, sondern entwickelt mittels Inhalten mathematische Schülerkompetenzen weiter.

Bei all dem ist zu bedenken, dass die Mathematik, die wir lehren, schon strukturiert ist. Und zwar nach einem Kriterium, dass spezifisch für die Wissenschaft Mathematik ist und sie gegenüber anderen Disziplinen unverwechselbar macht:

Mathematik kann man axiomatisch-deduktiv ordnen

Das heißt nicht, dass man das nur auf eine Art und Weise tun könnte. Aber dass man es kann und als wissenschaftlicher Mathematiker sogar muss, ist unabdingbar. Diese Art zu denken,

„more geometrico“, „nach Art der Geometer“ sagte man früher, kann in dieser Reinheit und Ausprägung keine andere Wissenschaft für sich beanspruchen. Die Schulung des „logischen Denkens“ war zu allen Zeiten ein starkes Argument für das Fach Mathematik im Rahmen einer gymnasialen Allgemeinbildung. Man kann den hohen kognitiven Anspruch einer deduktiven Ordnung kaum bestreiten.
Der Bildungswert der deduktiven Ordnung in der Mathematik wird in einem Zitat von Martin Wagenschein beleuchtet:
Aus: Martin Wagenschein; Das exemplarische Lernen als fächerverbindendes Prinzip: der Satz des Pythagoras (1960); in Naturphänomene sehen und verstehen, E. Klett Verlag 1968

Ich meine dabei aber . . . . . nicht das „Denken lernen“ überhaupt; das kann man auch anderswo lernen, etwa beim Übersetzen aus dem Lateinischen. Sondern ich meine, dass wir etwas spezifisch *Mathematisches* gelernt haben; etwas, was der Mathematik „überhaupt“ zukommt, und wofür der Beweis des „Pythagoras“ nur ein Beispiel war:
Wir haben gelernt, in welchem Sinne und Grade mathematische Wahrheiten gewiss sind.
Sie stehen nicht voneinander isoliert. Sie ruhen aufeinander, sie tragen einander sie stehen beisammen. Zuunterst liegt Unbeweisbares, Hinzunehmendes, Selbstverständliches. . . . .
Eine mathematische Wahrheit verstehen heißt einsehen, wie sie auf einer einfacheren ruht: Zum Beispiel der „Pythagoras“ auf dem Winkelsummensatz und auf dem Parallelenaxiom. Wer das Axiom anerkennt, kann die Folgen nicht abstreiten.
Das lokale, das primäre Staunen über „so etwas wie den Pythagoras“ weicht dem höheren Staunen darüber, dass es so einen Zusammenhang „gibt“.. . .
Diese Einsicht betrifft das *Ganze* der Mathematik. Wer sie am „Pythagoras“ begriffen hat, der hat etwas begriffen, was *mehr* ist als der Pythagoras. Und zwar nicht *noch* so etwas wie er ist, sondern etwas Übergeordnetes. Das Ganze, ohne dass es inhaltlich zu durchlaufen werden braucht, „spiegelt sich“ also in diesem Einzelnen. Diese Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten ist ein „Funktionsziel“ des mathematischen Unterrichts.
. . . . . .
Das „Funktionsziel“: zu erfahren, was es in der Mathematik heißt, einer Sache gewiss zu sein, wir *ganz* erst klar, wenn wir nicht nur den „Pythagoras“ , wenn wir die Mathematik selbst *verlassen* und vergleichen: Nirgendwo anders nämlich gibt es das berauschende Maß von Gewissheit, das uns in der Mathematik erreichbar ist. Denn hier sind wir uns schließlich alle einig, weil wir alle dieselben Axiome anerkennen und dieselben Schlussweisen, die uns von dort zu den - anfangs – undurchsichtigen und deshalb erstaunlichen komplexen Wahrheiten geleiten. *Hier gibt es keinen Streit.*
Wenn wir dagegen miteinander über politische, philosophische oder religiöse Probleme nachdenken oder streiten, sind wir nicht in dieser glücklichen Lage, dass es schlimmstenfalls Missverständnisse geben kann. Trotzdem ist es aber wichtig, dass der politische Streiter das Vergleichsbild der Mathematik *kennt* , und *nicht* als Vorbild. Dann sieht er: Hier, im „weltanschaulichen“ Bereich, sind die Axiome von einem zum anderen, oder von einer Gruppe zur anderen, *verschieden*, sind letzte Entscheidungen, Glaubenssätze, Grund-Entschlüsse. Und jedes faire Streitgespräch, solange es sich *logischer* Argumente bedient, kann nur den Sinn haben, beiderseits auf die – nun verschiedenen – Axiome zurückzugehen, jeder auf seine. Das heißt im eigentlichen Sinn des Wortes: „sich auseinandersetzen“. Ist das geschehen, so ist das logische Gespräch zu Ende. Jeder hat seine, unabweisbare, Position bezogen. Man kann den Gegner überführen, dass seine Behauptungen logisch nicht miteinander harmonieren. Ob man seine letzten Grundsätze teilt oder als unerträglich bekämpft, das hat ernstere als nur logische „Gründe“.
Damit wird ein Ziel der Selbsterziehung deutlich, das Voraussetzung ist dafür, dass Gespräche einen anständigen Sinn haben: Jeder sollte sich selbst darüber klar werden, auf welchen *letzten* Überzeugungen seine Urteile über ein bestimmtes, rational *nicht* auflösbares Wirklichkeitsgebiet beruhen. Er sollte Ordnung in seinen Überzeugungen haben, „mit sich ins Reine kommen“.

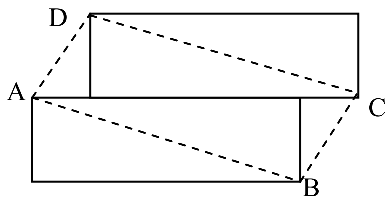
Eine der ersten Beschreibungen des Mathematikspezifischen Denkens findet man bei Platon (427 -347 v.Ch.). Hier ist auch klar ausgedrückt, dass die Mathematik von Idealisierungen handelt, als nicht von einem gezeichneten Rechteck, sondern vom „Rechteck an sich“. Diesen Prozess der Idealisierung der geometrischen Figuren beim Schüler in Gang zu bringen, ist eine der Voraussetzungen für deduktives Denken.

Aus: Platon; Der Staat; Reclam 1994; Sechstes Buch
„. . Du weißt ja wohl, die Leute, sie sich mit Geometrie, Rechnen und ähnlichem beschäftigen, bedienen sich dabei gewisser Voraussetzungen, wie der Geraden und Ungeraden, der Figuren, der drei Arten von Winkel und Verwandtes mehr; diese Voraussetzungen machen sie so, als ob sie darüber genau im klaren wären, ... Von da gehen sie aus und erreichen in weiterem Fortschritt folgerichtig ihr Ziel dort, wo sie es sich für ihre Untersuchung gesteckt haben.. . . .
Nun weiter ! Sie behelfen sich mit sichtbaren Figuren und untersuchen sie, denken aber dabei nicht an die Figuren, sondern an die Urbilder, denen sie gleichen; so untersuchen sie das Viereck an sich und seine Diagonale, aber nicht die gezeichnete, . . … Die Gebilde, die sie formen und zeichnen, . . ., diese gebrauchen sie nur als Abbilder und suchen die Urbilder an sich zu erkennen, die man nur durch das reine Denken erkennt.“

Für ein Eingehen in diese Gedankenwelt im Unterricht sind verschiedene Voraussetzungen notwendig. Zunächst müssen wir Lehrer die schulischen Inhalte für uns deduktiv geordnet haben. Diese „deduktive Ordnung im Hintergrund“ wird i.a. eine stark vereinfachte bzw. unvollständige wissenschaftliche deduktive Ordnung sein. Die „Hintergrund-Ordnung“ bildet aber die Voraussetzung dafür, dass sich unsere Schüler von der Mathematik ein zutreffendes Bild machen: Als einer strukturierten Wissenschaft mit klaren, offen gelegten und reflektierten Problemstellungen und Vorgehensweisen. Dann müssen wir auf Grund didaktischer Überlegungen entscheiden, was davon in welcher Strenge im Unterricht zur Sprache kommen soll. Dies bedarf aber eines bedeutenden fachdidaktischen Wissens über Möglichkeiten der sachlogischen Strukturierung, über alternative fachliche Zugänge, über die Kenntnis angemessener Reduktionen (z.B. lokales Ordnen) und einer daraus resultierender Urteilskraft, die Stellung eines konkreten Unterrichtsgegenstandes in dem Gesamtgefüge zu diskutieren.

Ein **Beispiel** aus dem Themenkreis Parallelogramm soll die Abstufungen der „Begründungskompetenz“ illustrieren.

Problemstellung:
Aus zwei übereinander gelegten Blättern Papier werden zusammen zwei Rechtecke ausgeschnitten. Die Rechtecke werden an jeweils längeren Seiten aneinandergelegt und ein Stück verschoben.



Handelt es sich bei dem Viereck ABCD um ein besonderes Viereck? Begründe!

In jeder Stufe der Entwicklung sollten Beispiele gezeichnet und daraus die Vermutung gewonnen werden: Beim Viereck ABCD muss es sich um ein Parallelogramm handeln. Diese Vermutung kann nun auf ganz verschiedenen kognitiven Stufen begründet werden.

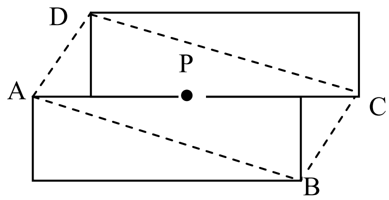
Stufe 1: Die Schüler verbinden mit dem Begriff „Parallelogramm“ das Phänomen der Gesamtfigur, des gezeichneten Objekts. Dieser Erkenntnisstand ist propädeutisch, eine logische Strukturierung fehlt völlig. Man „sieht“ es einfach.

Stufe 2: Die Schüler beziehen sich bei der Beurteilung, ob ein Parallelogramm vorliegt, nicht mehr nur auf die Figur. Sie wissen, dass das ein Parallelogramm bestimmte Eigenschaften haben muss, die sie aber zunächst als Auflistung formulieren: „Bei einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel und gegenüberliegende Winkel sind gleich weit und die Diagonalen halbieren sich und . . . “. Diese Eigenschaften werden durch Nachmessen oder anschauliche Begründungen „nachgewiesen“. Eine Trennung in eine definierende Eigenschaft und sich daraus ergebende Eigenschaften hat noch nicht stattgefunden. Das ist etwa der Stand in Klasse 5.

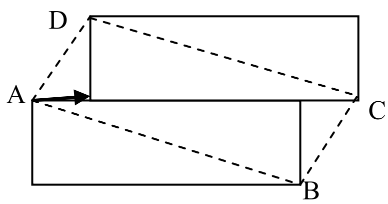
Stufe 3:
Die Schüler wissen (ohne formale Begründung) , dass man von einem Viereck nicht alle der oben angeführten Eigenschaften wissen muss, um auf ein Parallelogramm zu schließen.
Es genügt z.B.
(i) Das Viereck hat zwei Paare paralleler Gegenseiten oder
(ii) Das Viereck hat ein Paar paralleler und gleich langer Gegenseiten oder
(iii) Das Viereck hat zwei Paare gleich langer Gegenseiten oder . . . . .
Die anderen Eigenschaften folgen dann „automatisch“.
Vielleicht kann man auch schon Sachverhalte in der „Wenn. . . , dann . . „ -Form formulieren: „Wenn in einem Viereck gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, dann sind gegenüberliegende Seiten parallel“ usw..

Jetzt sind erste Beweise auf der Basis von Abbildungen bzw. Symmetrie möglich (etwa gegen Ende der Klasse 6):

3a) Ein Sch. könnte sagen: Das obere Rechteck geht aus dem unteren Rechteck mittels einer Punktspiegelung an P (Mitte von AC) hervor. (Diese Aussage spielt jetzt die Rolle eines Axioms.) B wird auf D gespiegelt, A auf C. Die Strecken AB und DC sind deshalb gleich lang und parallel, das ergibt sich aus den Eigenschaften der Punktspiegelung.



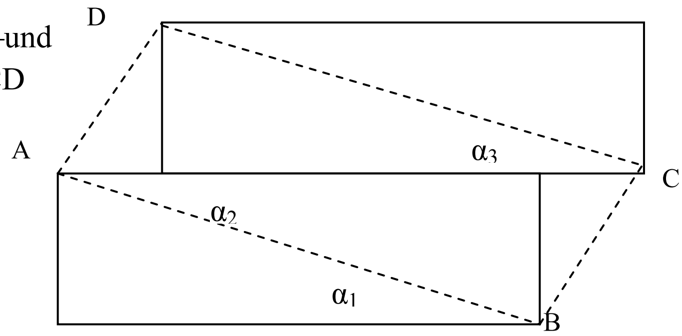
3b) Ein Sch. könnte auch anschaulich mit einer Verschiebung argumentieren (nicht im Kerncurriculum).
Das obere Rechteck ist aus dem unteren Rechteck durch Verschiebung mit dem eingezeichneten Pfeil entstanden. (Diese Aussage spielt jetzt die Rolle eines Axioms.)
Beim Verschieben bleiben Streckenlängen und Winkelweiten gleich, also sind AB und DC parallel und gleich lang.



Man sieht in beiden Fällen: Hier gibt es zum ersten Mal ein „Weil … , also . . .“, ein erster Schritt zum deduktiven Denken.

Stufe 4: In Stufe 3 wurden die Abbildungen als Beweismittel eingesetzt. Dabei können die Begründungsketten nicht immer zufriedenstellend aufgebaut werden. Dies wird in Klasse 7 besser, wenn die ersten Beweismittel in Satzform zur Verfügung stehen.

Zeige mit Hilfe der Sätze vom Stufen –und Wechselwinkel, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramnm ist.



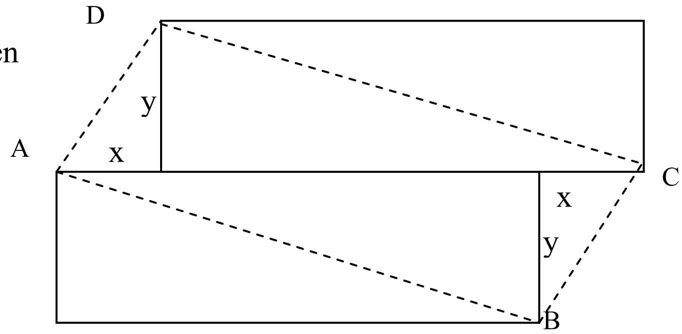
Wir zeigen:
AB parallel zu DC und AB = DC.
(i) AB = DC, da es sich um deckungsgleiche Rechtecke handelt.
(ii) $\alpha_2 = \alpha_1$ (WW an parallelen Rechteckseiten)
$\alpha_3 = \alpha_1$ (Entsprechender Winkel in deckungsgleichen Rechtecken)
Also $\alpha_2 = \alpha_3$.
Also AB parallel DC (WW an AC).

(Hier liegt der Schülerfehler nahe, Voraussetzung und Behauptung zu vertauschen:
$\alpha_2 = \alpha_3$ (WW), also AB parallel DC)

Stufe 5: Der Gipfel des Anspruchs wäre erreicht, wenn Schüler stellenweise in der Lage sind, eine solche Vermutung zielgerichtet deduktiv zu begründen bzw. ein Problem zielgerichtet zu lösen. Zielgerichtet bedeutet: Die Beweismittel „fallen nicht vom Himmel", sondern sind Ergebnis strukturierten Nachdenkens.
Der Schüler würde dann etwa sagen (Ende Klasse 8): „Ich will Parallelität nachweisen. Dazu habe ich folgende Sätze zur Verfügung: Satz vom Stufenwinkel; Satz vom Wechselwinkel, Satz vom Parallelogramm, die Kongruenzsätze (später auch Strahlensätze). Mit diesen Sätzen muss ich jetzt argumentieren. Ich warte nicht darauf, dass eine Beweisidee vom Himmelfällt, sondern ich versuche, gezielt diese Sätze anzuwenden." Z.B.

a)"Ich suche nach kongruenten Dreiecken"

Die beiden kleinen Dreiecke sind nach dem Kongruenzsatz sws kongruent. Also stimmen sie in allen entsprechenden Teilen überein. Es ist AD = BC. Auch entsprechende Winkel sind gleich usw..



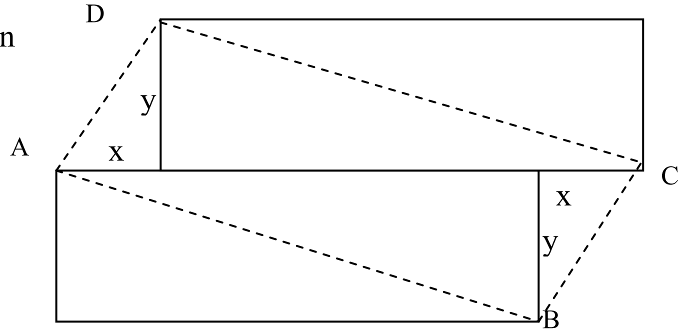
Das wäre jetzt „Vorwärtsarbeiten". Beim „Rückwärts arbeiten" ginge das so:
Ich will AD parallel BC nachweisen. Dazu benötige ich zwei gleiche Winkel an der Gerade AC (Wechselwinkelsatz). Diesen Nachweis

kann ich mit Hilfe kongruenter Dreiecke führen usw..

b) „Ich verwende den Pythagoras, weil es viele rechtwinklige Dreiecke hat“

Mit dem Satz des Pythagoras erhält man leicht AB = DC und AD = BC.

Wie komme ich jetzt von gleichlangen Gegenseiten auf parallele Gegenseiten ? Gibt es dafür Sätze ?



Man sieht, dass auf dieser Stufe das Beweisen offen unterrichtet werden kann im Sinne von „es gibt verschiedenen fachliche Zugänge zum Beweis“. Das gilt für die überwiegenden Anzahl geometrischer Problemstellungen. Voraussetzung für einen solchen Unterricht ist natürlich die Kenntnis des Lehrers im Hinblick auf diese Fachmethoden (Beweismittel) und der Wille, die Wege zu einem Satz (einer Problemlösung) zu thematisieren, zu vergleichen und zu bewerten.

Dabei soll klar gesagt werden: Diese Strukturierungsvorschläge wollen eine Diskussionsgrundlage bieten. Sie müssen, wie alle didaktischen Überlegungen, an der schulischen Wirklichkeit gemessen werden. Aber gültig bleibt: Wir Lehrer müssen eine Strukturierung bewusst auswählen, sie den Schülern sichtbar machen und den Inhalten damit in einem Gesamtgefüge einen Sinn und Bedeutung zumessen. Sonst können wir unseren Schülern nicht vermitteln, was uns an dieser Wissenschaft begeistert.

B. Struktierung im Hinblick auf die überfachlichen Kompetenzbereiche „Problemlösen“ und „Begründen“

Etwas zum Sinn und zur Bedeutung der Geometrie als Wissenschaft.

Das ursprüngliche Ziel der Geometrie (grch: geo-Erde; metrein-messen) ist die mathematische Beschreibung des Anschauungsraumes oder auch nur der Anschauungsebene. Solche, rein auf das Praktische ausgerichtete Tätigkeiten gab es schon in vorgriechischer Zeit. Das Vorgehen würde man aus heutiger Zeit als empirisch bezeichnen; die Richtigkeit der Aussagen wurde einfach am Ergebnis durch Nachmessen bestätigt.

Zwischen 600 v.Ch. und 300 v.Ch. entwickelt sich im griechischen Einflussbereich eine ganz neue Auffassung von Mathematik. In dem Buch „**Elemente**“ von **Euklid** (325 – 270 v.Ch.) ist diese neue Art von Mathematik zum ersten Mal niedergelegt. Dieses Werk blieb bis heute das Vorbild für das Abfassen von mathematischen Abhandlungen.

Was ist das Neue ? Die Richtigkeit von Aussagen über den Anschauungsraum sollte nicht mehr aufgrund empirischer Bestätigung erkannt werden, sondern aufgrund von lückenlosen logischen Begründungen, die auf fest umschriebene Grundsätze (Axiome und Postulate) zurückgehen. Das wissenschaftsgeschichtlich Neue, das uns hier gegenüber tritt, ist also ein deduktiver Aufbau. Die Eigenschaften der mathematischen Objekte sollten von vornherein klar festgelegt (definiert) werden, sodass die weitere Untersuchung rein logischer Natur sein konnte. An die Stelle der Empirie (der Erfahrung) sollte das Denken (die Vernunft) treten. Zum Beispiel sollte der Satz des Thales nicht deshalb wahr sein, weil in allen in der Praxis ausgemessenen Halbkreisen im Rahmen der Messgenauigkeit rechte Winkel auftreten, sondern weil sich dieser Sachverhalt lückenlos auf schon als wahr erwiesene Sachverhalte zurückführen lässt.

Im 19.Jahrhundert kamen neuartige Fragestellungen auf, die ihren Ausgang im sogenannten **Parallelenaxiom** hatten. Das Parallelenaxiom macht im Gegensatz zu anderen Axiomen keine Aussage über einen von der Anschauung überblickbaren kleinen Bereich, sondern über den gesamten „unendlichen“ Verlauf von zwei Geraden. Diese Situation ist anschaulich längst nicht evident und führte zu einem gewissen Unbehagen darüber, ob dieses Axiom die Anschauungswelt richtig beschreibt. Seit dem Altertum hat man versucht, das Parallelenaxiom zu beweisen. Der Euklid-Kommentator *Proklus* (410 – 485) zeigte z.B. dass das Parallelenaxiom gleichwertig zum Winkelsummensatz für Dreiecke ist. Am Ende der ganzen Bemühungen stand dann die Einsicht, dass man eine Geometrie auch ohne dieses Parallelenaxiom aufbauen konnte. *Gauß* kam um 1816 zu der Erkenntnis, dass das Parallelenaxiom unabhängig von den anderen Axiomen bei Euklid ist, also aus diesen anderen Axiomen nicht beweisbar ist. Später kamen *Lobatschewskij* und *Bolyai* zu denselben Ergebnissen.

Diese Erkenntnisse führten am Ende des 19.Jahrhunderts zu einem qualitativen Sprung, verursacht auch durch die Entwicklung in der Physik. Denn wenn der Begriff „Gerade“ sinnlich-anschaulich fundiert ist, bezieht sich die Geometrie auf den Anschauungsraum, also den uns umgebenden physikalischen Raum. Dort kann man „Gerade“ z.B. über Lichtstrahlen definieren, etwa so: Eine Gerade ist, was nicht von einem Lichtstrahl abweicht. Die Axiome einer solchen Geometrie sind dann empirisch-physikalische Aussagen d.h. aus der Erfahrung gewonnene Aussagen. Wie jede physikalische Aussage gelten sie nur vorbehaltlich einer späteren Revision. Und seit Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie 1915 ist ja auch der Glaube an die „geradlinige“ Ausbreitung des Lichtes erschüttert (Licht wird von Masse abgelenkt; der physikalische Lichtstrahl entspricht also nicht unserem Idealbild von Geradlinigkeit).

Im Ergebnis löste sich die Geometrie von der Anschauung und wurde zu einer Strukturwissenschaft. Es sollte nicht mehr ihre Aufgabe sein, das Wesen der behandelten Dinge zu ergründen oder ihre faktische Richtigkeit zu bestätigen. *Pasch* (Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882) war der erste, der dies versuchte: "Es muss in der Tat, wenn anders die Geometrie wirklich deduktiv sein soll, der Prozess des Folgerns überall unabhängig sein vom Sinn der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren .... ". Man soll also mit den Objekten Punkt, Gerade usw. keinen anschaulichen Sinn mehr verbinden, sondern sie lediglich als logische Bausteine eines Systems betrachten. Die Objekte werden lediglich implizit durch die über sie formulierten Axiome charakterisiert. Bei ***Hilbert*** (1862 – 1943) gibt es keine Definitionen mehr darüber, <u>was</u> ein Punkt oder eine Gerade ist. Mathematische Objekte werden schon dann als existent betrachtet, wenn sie in einem System widerspruchsfrei zusammengebaut sind. Hilbert hat 1899 in *Grundlagen der Geometrie* sozusagen die Nabelschnur zwischen Anschauung und Geometrie durchschnitten. Er soll seinen Standpunkt pointiert so geäußert haben: "Man muss jederzeit an Stelle von Punkt, Gerade, Ebene auch Tisch, Bank, Bierseidel sagen können". Natürlich soll die Geometrie letztendlich auch zur Beschreibung der Realität geeignet sein, weshalb es vernünftig ist, sich durch die Wahl entsprechender Axiome an diese anzupassen. Die Mathematik kann aber letztendlich nicht entscheiden, ob diese Axiome tatsächlich die physikalische Wirklichkeit beschreiben.

Was leistet ein Beweis in der Geometrie ? Was ist Wahrheit in der Geometrie ?

Stellen wir uns vor, ein Mathematiker vermutet aufgrund anschaulicher Untersuchungen, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt. Jetzt will er diese Vermutung beweisen.

Beweisen heißt: Den zu beweisenden Satz ausnahmslos nach logischen Regeln auf schon bewiesene Sätze oder Axiome zurückzuführen. Ein Beweis besteht somit in dem Aufzeigen von logischen Abhängigkeiten. Er weist <u>nicht</u> die faktische Richtigkeit eines Sachverhaltes in der Anschauungswelt nach. Die Geometrie ist jetzt sozusagen zweigeteilt, in eine empirische und in eine axiomatische Geometrie.

Beispiel: Satz: Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°.

Diesen Satz kann man mit vielen Axiomensystemen beweisen (dem Euklid´schen, dem Hilbert´schen, jedem schulischen Begründungssystem). Zum Beweis dieses Satzes benötigt man neben anderen Axiomen das Parallelenaxiom. Ohne dieses Axiom kann man den Satz nicht beweisen. Mit dem Beweis der Winkelsumme im Dreieck hat man also bewiesen: **Wenn** das Parallelenaxiom (und einige andere Axiome wahr sind), **dann** ist auch der Satz von der Winkelsumme im Dreieck wahr. Man hat nicht bewiesen, dass in jedem Dreieck des Anschauungsraumes die Winkelsumme 180° beträgt.
Man kann jetzt fragen: Ist das Parallelenaxiom im Anschauungsraum wahr ?

Antwort: Das weiß man nicht.

Begründung: Wir können zwar bestätigen, dass das Parallelenaxiom im uns zugänglichen Anschauungsraum im Rahmen der Messgenauigkeit gültig ist. Wir können uns aber auch vorstellen, dass es nicht gültig ist, weil es Modelle (Modell bedeutet hier: Veranschaulichung) gibt, in denen es nicht wahr ist.

Da man also nicht weiß, ob das Parallelenaxiom zu einer richtigen Beschreibung des Anschauungsraumes gehört, weiß man auch nicht, ob der Satz von der Winkelsumme im Dreieck die richtige Beschreibung für den Anschauungsraum ist (wahr im Anschauungsraum ist).

Allerdings könnte man sagen: Wenn sich durch genaue Messungen herausstellen sollte, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht 180° beträgt, dann kann auch das Parallelenaxiom im Anschauungsraum nicht wahr sein. *Gauß* hat solche Messungen durchgeführt und hat im Rahmen der Messgenauigkeit 180° erhalten.

Die Konsequenz dieser Erkenntnis über die Wahrheit von mathematischen Sätzen hat **Einstein** pointiert erfasst: "Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit".

Begründungssysteme für die Schule

Bei Euklid „Die Elemente“ und Hilbert „Grundlagen der Geometrie“ ist das Beweisen, allgemein der deduktive Aufbau, das Hauptanliegen. Diese Bücher wurden geschrieben, um das Wissen logisch zu ordnen und nicht, um den Anschauungsraum zu erkunden. In der Schule ist die Situation gerade umgekehrt: Die Schüler sollen den Anschauungsraum zunächst erkunden und diesen nach und nach mit geometrischen Fachbegriffen beschreiben und diese dann deduktiv ordnen.

Bei der Frage nach einer Begründungsbasis für die Schulgeometrie spielt *Felix Klein* (1849 – 1925) eine große Rolle. (Ich spreche von Begründungsbasis und nicht von Axiomensystem, weil das letztere in der modernen Mathematik widerspruchsfrei, unabhängig und vollständig sein sollte und wir solche Fragen in der Schule in keiner Weise prüfen). Nach Klein „krankt der geometrische Unterricht heute geradezu an der Last der Überlieferung“. Es habe sich irrtümlich die Ansicht gebildet, Euklids Elemente seien ein geeignetes Schulbuch, wo sie doch aus Universitätsvorlesungen hervorgegangen waren. Klein forderte für den Unterricht u.a. die Berücksichtigung des Leitprinzips, zuerst an die lebhafte konkrete Anschauung anzuknüpfen und dann erst allmählich logische Elemente in den Vordergrund zu bringen.

In der heutigen Situation des Mathematikunterrichts kann man die gegenteilige Gefahr sehen: Dass es bei der bloßen Betrachtung der Phänomene des Anschauungsraums bleibt, ohne diese logisch zu strukturieren.

Die propädeutische Geometrie in der Schule

Klassen 5 und 6

In diesen Klassen wird nicht bewiesen.

Die Ziele sind: Kennenlernen des Anschauungsraums und mathematischer Objekten und Begriffe wie Punkt, Gerade, parallel, orthogonal, Abstand, Rechteck, Quadrat, Quader, Winkel, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, usw. .

Die Mittel dazu sind: Zeichnen, falten, bauen, probieren, wenig Theorie. Keine Beweise, nur einsichtig machen ! Keine Verwendung der Begriffe „Definition“ und „Satz“.

Im Verlauf der Klassen 5 bis 7 durchlaufen die Schüler eine geistige Entwicklung, die es ihnen nach und nach und auch nur stellenweise ermöglicht, die deduktive Struktur von geometrischen Sätzen zu verstehen. In Kl. 5 dominiert noch die prälogische Phase. Begriffe und Figuren werden ganzheitlich und subjektiv aufgefasst (ein rotes Quadrat unterscheidet sich von einem grünen Quadrat, ein Stern ist stachelig), ästhetische Gesichtspunkte spielen eine Rolle. Diese Sicht der Schüler sollten wir nicht als hinderlich ansehen, sondern das Interesse zum intensiven Erkunden der geometrischen Phänomene nutzen.

Vor der 7.Klasse kann ein Schüler i.a. nicht zwischen Satz und Kehrsatz unterscheiden. Ebenso kann ein Schüler vor dieser Zeit den Sinn einer Definition nicht begreifen. Es braucht noch viel Zeit (und manchmal wird es gar nicht erreicht), bis ein Schüler den Inhalt eines Begriffes auf die Definition reduziert. Man sollte also den deduktiven Aufbau nur lokal und den Fähigkeiten der Schüler angepasst anstreben.

Beispiel: Es soll der Satz bewiesen werden: In einem Parallelogramm sind Gegenseiten gleich lang.

Solange ein Schüler unter „Parallelogramm“ die Totalität der Figur versteht, kann er gar nicht verstehen, was ein Beweis überhaupt soll. Er kann nicht einmal den Sinn des Satzes verstehen, da ein Parallelogramm für ihn die Summe der Eigenschaften „parallele Gegenseiten, gleich lange Gegenseiten, gleichweite Gegenwinkel, ... „ bedeutet.

Voraussetzung für das Verständnis des Satzes und des Beweises ist die Fähigkeit des Schülers, an dieser Stelle unter dem Begriff Parallelogramm nur die definierende Eigenschaft „parallele Gegenseiten“ zu verstehen.

In der heutigen Schulpraxis sind für den Aufbau einer Begründungsbasis die **Geradenspiegelung** und die **Punktspiegelung** wesentlich; oder alternativ die analogen **Symmetriebegriffe**. Der Lehrplan 2004 hebt stärker auf den Symmetriebegriff ab. Die Drehung und die Parallelverschiebung sind im Bildungsplan 2004 nicht mehr verbindlich.

Der Vorteil der Abbildungen liegt in der Nähe zum „Tun“ und zum experimentieren (z.B. führt der Versuch, eine Spielkarte herzustellen, zur Konstruktionsvorschrift für die Punktspiegelung).

Am Ende der Klasse 6 kann der Schüler Geradenspiegelungen und Punktspiegelungen ausführen bzw. die entsprechenden Symmetrien erkennen. Die Eigenschaften dieser Abbildungen werden aus der Anschauung gewonnen:

- Strecke und Bildstrecke sind gleich lang
- Winkel und Bildwinkel sind gleich weit
- Figur und Bildfigur sind deckungsgleich
- Aus parallele Geraden entstehen parallele Bildgeraden
- Gerade und Bildgerade sind parallel.

Abbildungen mit diesen Eigenschaften werden unter dem Namen **Kongruenzabbildungen** zusammengefasst.

Begründungsbasis (I)
Die anschauliche Verwendung von Kongruenzabbildungen und ihrer Eigenschaften bilden die erste Begründungsbasis der Schulgeometrie am Anfang der Klasse 7.
Wenn Winkel achsen- oder punktsymmetrisch liegen, dann sind sie gleich weit.
Wenn Strecken achsen- oder punktsymmetrisch liegen, dann sind sie gleich lang.
Dazu kommt:
Der Vollwinkel beträgt 360°
Wenn zwei Winkel Nebenwinkel sind, beträgt ihre Summe 180°.

Mit der Begründungsbasis (I) kann man Ende von Klasse 6 und im Laufe der Klassen 7/8 die folgenden Sätze (II) einsichtig (kein formaler Beweis) machen. Diese Sätze werden (II) werden von den Schülern auf Grund ihrer manuellen Erfahrungen mit den Phänomenen und den Symmetrie bzw. Abbildungseigenschaften unmittelbar akzeptiert.

Das Satzsystem (II) bildet für die Klasse 7 im Wesentlichen die Begründungsbasis.

Satzsystem (II)

Scheitelwinkelsatz
Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, dann sind sie gleich weit.

Nebenwinkelsatz
Wenn zwei Winkel Nebenwinkel sind, dann haben sie zusammen die Winkelweite 180°.

Stufenwinkelsatz
a) Wenn g und h parallel sind, dann sind Stufenwinkel an g und h gleich groß.
b) Wenn Stufenwinkel an g und h gleich groß sind, dann sind g und h parallel.

Wechselwinkelsatz
a) Wenn g und h parallel sind, dann sind Wechselwinkel an g und h gleich groß.
b) Wenn Wechselwinkel an g und h gleich groß sind, dann sind g und h parallel.

Satz von der Mittelsenkrechten
a) Wenn ein Punkt Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke PP´ liegt, dann sind die Abstände PQ und P´Q gleich.
b) Wenn ein Punkt Q von P und von P´ denselben Abstand hat, dann liegt Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke PP´.

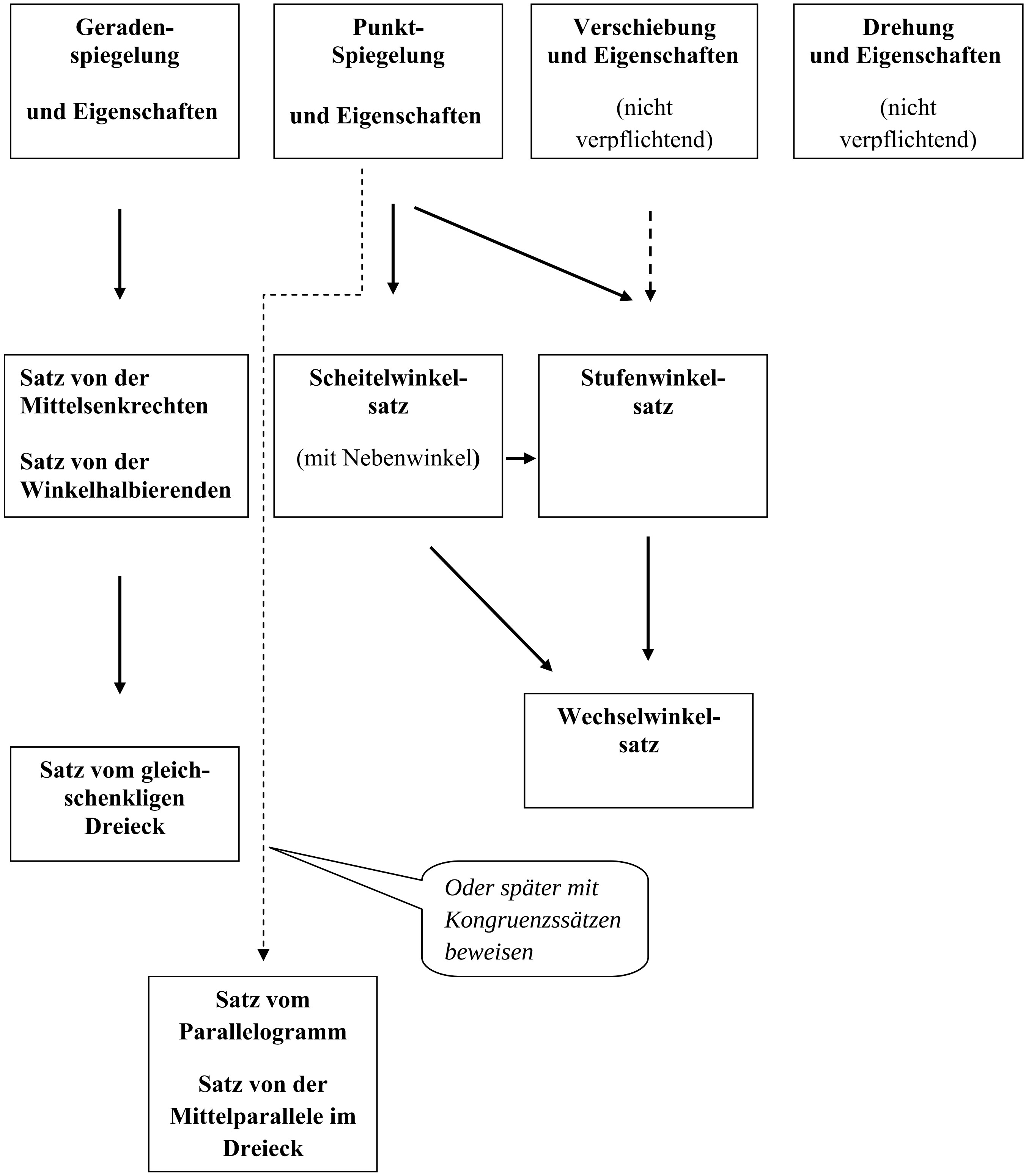
Satz von der Winkelhalbierenden
a) Wenn ein Punkt Q auf der Winkelhalbierenden f zweier Geraden g, h liegt, dann sind die Abstände von g zu Q und von h zu Q gleich.
b) Wenn ein Punkt Q von zwei Geraden g und h denselben Abstand hat, dann liegt Q auf der Winkelhalbierenden von g und h.

Satz vom gleichschenkligen Dreieck
a) Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleichlang sind, dann sind die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich groß.
b) Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, dann sind die beiden gegenüberliegenden Seiten gleich lang

Satz vom Parallelogramm
(kann auch später mit Kongruenzsätzen bewiesen werden)
a) Wenn in einem Viereck Gegenseiten parallel sind, dann sind sie gleich lang.
b) Wenn in einem Viereck Gegenseiten gleich lang sind, dann sind sie parallel.

Satz von der Mittelparallelen im Dreieck
(kann auch später mit Kongruenzsätzen bewiesen werden)
Wenn man die Mitten zweier Dreiecksseiten verbindet, dann ist diese Strecke halb so lang wie die dritte Seite und parallel zu dieser.

Logische Struktur beim Schließen von (I) auf (II) ohne formalen Beweis



Mit dieser Begründungsbasis werden in Klasse 7/8 die **ersten formalen Beweise** geführt. Bewiesen werden

1) Der Satz von der Winkelsumme im Dreieck

2) Der Satz von der Winkelsumme im Viereck (evtl. im Vieleck)

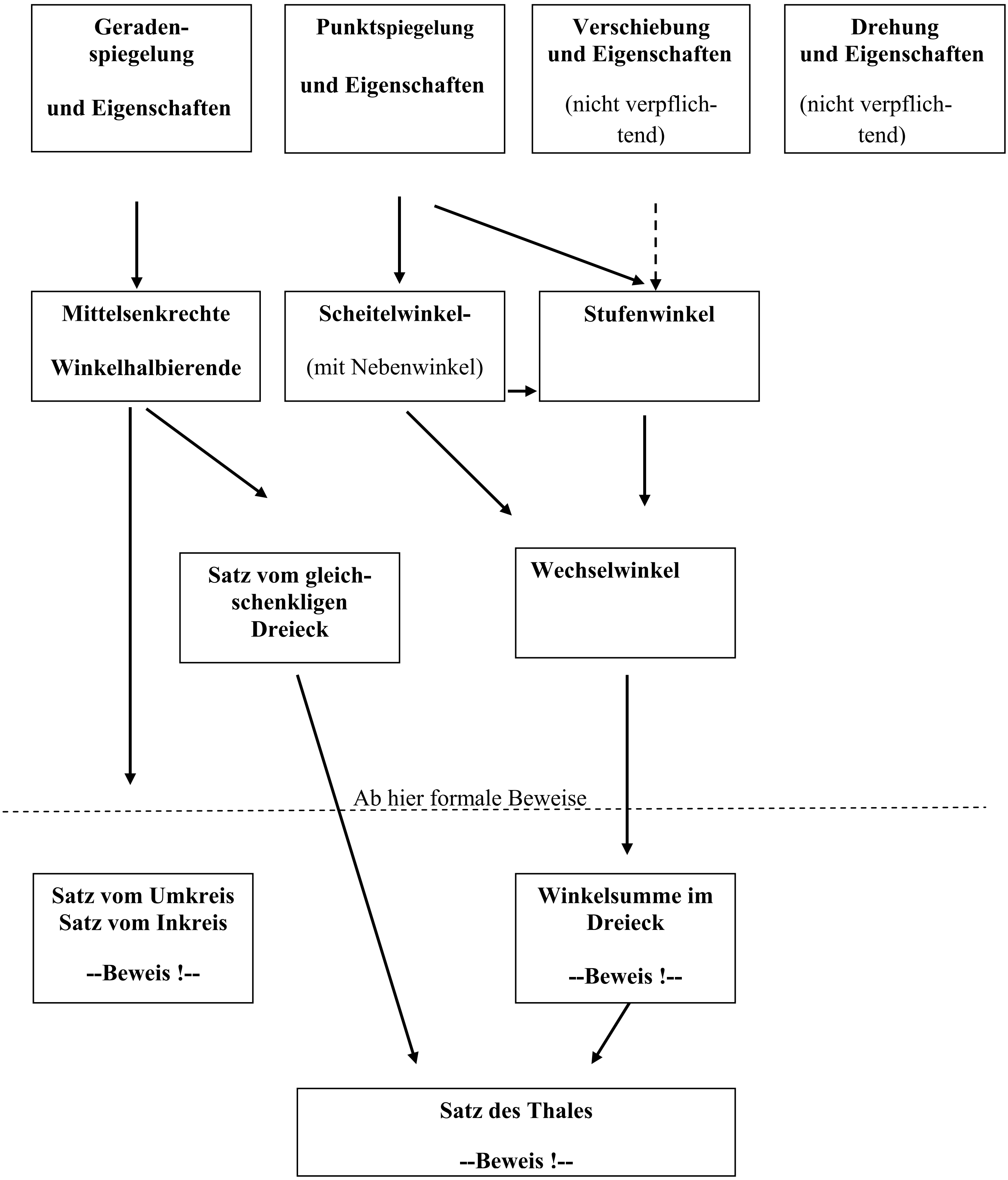
3) Der Satz des Thales.

4) Der Satz vom Umkreis

5) Der Satz vom Inkreis

Und weitere „kleine" Sätze.

Die logische Struktur der Beweise dieser Sätze



Welche Rolle spielen die Kongruenzsätze für Dreiecke im Rahmen der Begründungssysteme ?

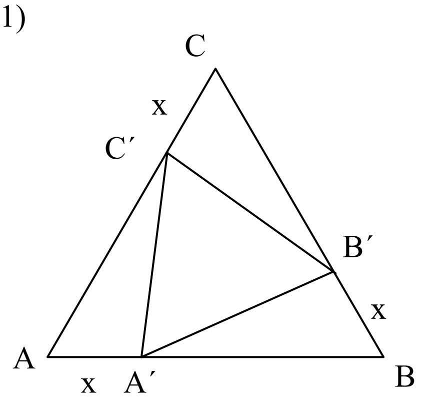
Warum wird überhaupt die Kongruenz von Figuren eingeführt?

Dazu ein wenig Theorie: Alle Begriffe und Sätze der Schulgeometrie bis Ende Kl. 7 wurden mit Hilfe der Abbildungen bzw. der Symmetrie entwickelt. Auch der weitere Aufbau der Kongruenzgeometrie könnte zunächst auf der Basis der Abbildungen und der daraus abgeleiteten Sätze geleistet werden. Dieses Vorgehen wäre aber ungeschickt, da es viele Beweissituationen gibt, bei denen das Beweisen mit Abbildungen oder der Begründungsbasis (II) sehr umständlich, hingegen das Beweisen mit Kongruenzsätzen relativ einfach ist.

Grob gesagt sind die Kongruenzsätze besonders nützlich, wenn wie im Beispiel von Seite 4 die Strecken und Winkel „weit voneinander entfernt" sind.

Beispiele, bei denen das Beweismittel KGS ins Auge springt (Nr. 1 und 2).

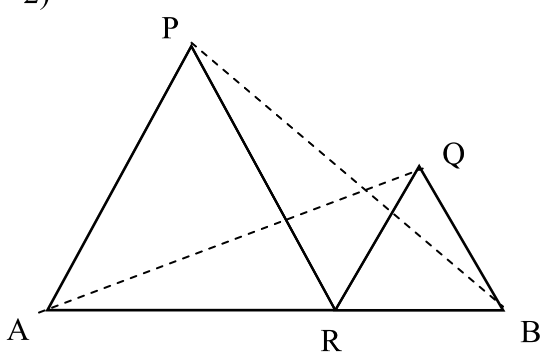
1)



Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Von den Ecken wird jeweils die gleiche Strecke x entgegen dem Uhrzeigersinn abgetragen.
Zeige: Das Dreieck A´B´C` ist ebenfalls gleichseitig.

Beweisidee: Die Dreiecke AA´C´, BB´A´ und CC´B` sind nach dem Kongruenzsatz sws kongruent.

2)



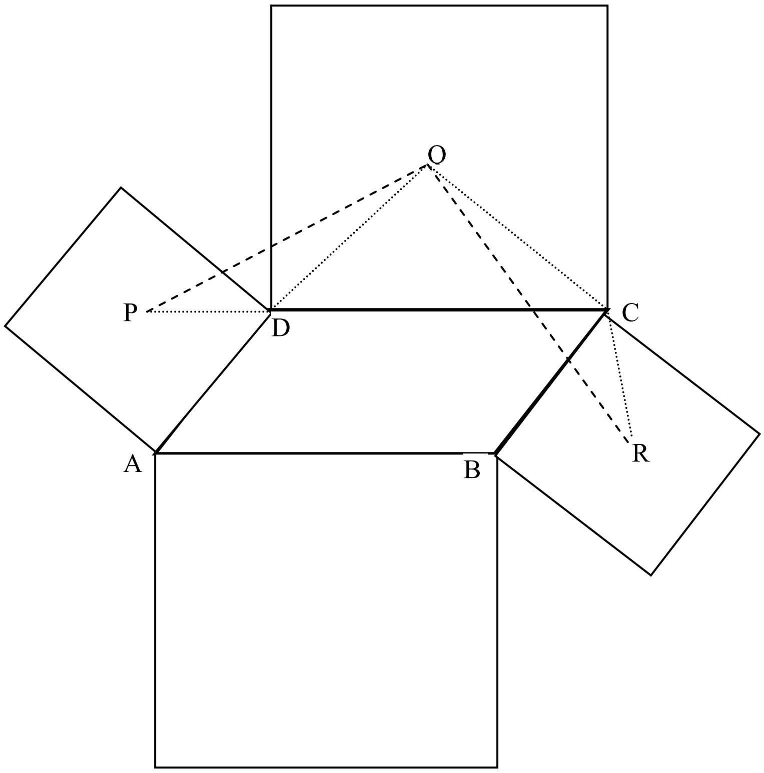
Es sind zwei gleichseitige Dreiecke wie in der Figur gegeben.
Zeige: $\overline{AQ} = \overline{BP}$.

Beweisidee (1): Die Dreiecke ARQ und PRB sind nach dem KGS sws kongruent.

Beweisidee (2): Die Drehung um R mit Drehwinkel 60° bildet B genau auf Q und P genau auf A ab.

3) Satz von Napoleon: Errichtet man über jeder Seite eines Parallelogramms ein Quadrat, so bilden auch die Quadratmitten ein Quadrat.

Hier springen die KGS nicht ins Auge, weil schlichtweg keine Dreiecke da sind. Hier hilft das strukturierte Fragen (siehe S.23): Welche Möglichkeiten haben wir überhaupt, z.B. PQ = QR nach zu weisen ? Vielleicht mit dem Satz von der Mittelsenkrechten ? (Kann man irgendwo eine Mittelsenkrechte einzeichnen ?) Oder dem Satz vom gleichschenkligen Dreieck ? (Kann man irgendwo ein gleichschenkliges Dreieck einzeichnen ?) Oder den Kongruenzsätzen ? (Kann man irgendwo Dreiecke einzeichnen, die vermutlich kongruent sind ?)
Beweisidee: Die Dreiecke PDE und RCQ sind nach sws kongruent.



Die Kongruenzsätze sind mit der Begründungsbasis (I) beweisbar. Die Beweisbedürftigkeit ist allerdings schwer zu motivieren, weshalb in der Schule die Kongruenzsätze besser unmittelbar als aus der Anschauung gewonnene „Axiome" zur bisherigen Begründungsbasis dazu genommen werden. Wichtig ist m.E. jedenfalls, die KGS auch tatsächlich als Beweismittel einzusetzen

Zusammenfasssung: Das Beweisen wird wesentlich erleichtert, wenn man als Hilfsmittel die Kongruenzsätze für Dreiecke zur Verfügung hat. Übrigens sind in den Elementen von Euklid die Kongruenzsätze das zentrale Beweismittel.

Am Ende der Klasse 8 stehen somit als Beweismittel zur Verfügung:

- Die Begründungsbasis (I), die allerdings immer mehr in den Hintergrund rückt.

- Die Zusammenhänge (II) und die daraus bewiesenen Sätze.

- Die Kongruenzsätze für Dreiecke (III).

Kongruenzsätze für Dreiecke (III)

(sss) Wenn in zwei Dreiecken entsprechende Seiten gleich lang sind, dann stimmen sie in allen entsprechenden Stücken überein.

(sws) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, dann stimmen sie in allen entsprechenden Stücken überein.

(wsw und sww) Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, dann stimmen sie in allen entsprechenden Stücken überein.

(Ssw) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen, dann stimmen sie in allen entsprechenden Stücken überein.

Überblick über die Beweismittel der Geometrie

In Klasse 5/6 wird nicht bewiesen.

Der Schüler lernt folgende Begriffe kennen: Punkt, Gerade, Strecke, Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Dreieck, Würfel, Quader, Pyramide, ….. .

Durch die Eigenschaften der **Achsensymmetrie** und der **Punktsymmetrie** wird es den Schülern erleichtert, in der Klasse 7/8 die Richtigkeit der folgenden Begründungsbasis einzusehen:

Klasse 7/8

Eine erste Begründungsbasis, anschaulich aus Symmetriebetrachtungen gewonnen

Scheitelwinkelsatz (mit Nebenwinkel)	**Stufenwinkelsatz**	**Wechselwinkelsatz**	**Satz vom gleich-schenkligen Dreieck**
Satz von der Mittelsenkrechten	**Satz von der Winkelhalbierenden**		

Dazu mit Beweisen:

Winkelsumme im Dreieck	**Satz des Thales**

Ein zusätzliches Beweisprinzip: **Kongruenzsätze für Dreiecke**

Klasse 9/10

Kongruenzgeometrie plus Eigenschaften der zentrischen Streckung

Daraus gewonnen:

Strahlensätze	**Ähnlichkeit von Dreiecken**

Der Zusammenhang von deduktiver Kompetenz und Problemlösekompetenz

Im Bildungsplan 2004 sind die vier überfachlichen Kompetenzbereiche Begründen, Probleme lösen, Lernen und Kommunizieren genannt. Ich kennzeichne diese Begriffe so:

Begründen; gekennzeichnet durch das deduktiv geprägte **Denken**

Probleme lösen; gekennzeichnet durch das zielgerichtete **Anwenden** von Sätzen

Lernen; gekennzeichnet durch das **Lernen** von **Verfahren**

Kommunizieren; in Wort und Schrift der Sache und den Schülern angemessen; weniger belehrend, sondern diskursiv; auch die Strukturierung (der rote Faden) wird thematisiert.

Beim Themengebiet Geometrie steht der Kompetenzbereich „**Begründen** (deduktiv **denken**)" im Vordergrund. Damit eng verbunden und letztlich nicht zu trennen ist der Kompetenzbereich „**Probleme lösen** (Sätze **anwenden**)". Wenn nämlich die Aussage eines Satzes verstanden ist, weiß man auch wie man mit dem Satz arbeitet. Er kann dann beim strukturierten Problemlösen zielgerichtet verwendet werden.

An den Satz vom Stufenwinkel muss gedacht werden, wenn man Parallelität oder gleiche Winkelweiten nachweisen will.

An den Satz vom Gleichschenkligen Dreieck muss gedacht werden, wenn man die Gleichheit von Streckenlängen oder Winkelweiten nachweisen will.

An den Satz des Thales muss gedacht werden, wenn ein Zusammenhang zwischen Winkelweite und Streckenlänge nachgewiesen werden soll.

Beispiel:
Wenn man in einer Situation nachweisen soll, dass zwei Winkel gleich weit sind, kann man

a) nach zwei gleich langen Strecken suchen und den Satz vom gleichschenkligen Dreieck anwenden, oder
b) nach zwei Parallelen suchen und den Stufenwinkelsatz anwenden, oder
c) nach zwei sich schneidenden Geraden suchen und den Scheitelwinkelsatz anwenden, oder
d) nach einer Spiegelgeraden suchen, die einen Winkel auf den anderen Winkel abbildet.

Dieses Beispiel zeigt exemplarisch, welches Denken mit den Kompetenzen „Begründen“ und „Problemlösen“ verbunden ist.

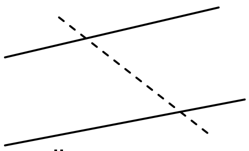
Ein langfristiges Ziel des Geometrieunterrichts wäre demnach die Entwicklung von Beweis - und Problemlösestrategien, wie sie in den folgenden Übersichten zusammengestellt sind.
Die Übersichten zeigen ein Endprodukt, wie es Stück für Stück über die Jahre erstellt und ergänzt werden kann.

Das bedeutet: Das Begründen und das Problemlösen wird zum Unterrichtsthema. Wenn der Beweis fertig ist (das Problem gelöst ist), denkt man noch einmal über die Sache nach. Z.B. Warum hat gerade der oder jener Satz zum Erfolg geführt; wie ist man auf die Idee gekommen, gerade diesen Satz zu verwenden; hätte es auch mit einem anderen Satz funktioniert;
Hier kann man m.E. die These des Einführungsvortrags gut bestätigt finden: Die Inhalte (geometrische Sachverhalte) sind ein Mittel zur Entwicklung der Begründungs- und Problemlösekompetenz.

(M.E. genügt es nicht, Schüler beim Beweisen und Problemlösen mit allgemeinen Ratschlägen der Art zu versorgen: „Hatten wir schon einen ähnlichen Fall ?“; „Kannst du das Problem (den Beweis) bei einem Spezialfall lösen ?“. Dieses Gedanken zu thematisieren ist wichtig, sie sind aber i.A. zu allgemein, um Erfolg zu haben. Dazu braucht es inhaltlich gebundene Strategien, wie sie in den folgenden Übersichten dargestellt sind.)

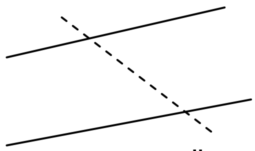
Für die Umsetzung im Unterricht ist es empfehlenswert, die zur Verfügung stehenden Beweismittel plakativ (z.B. Plakate an den Wänden) zur Verfügung zu haben. Wenn dann z.B. Parallelität nachgewiesen werden muss, kann man die Plakate gezielt auf ihre Aussagen durchgehen.

S.v.**Wechselwinkel 1**



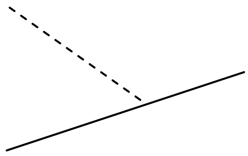
$g \parallel h \rightarrow \alpha = \beta$

S.v.**Wechselwinkel 2**



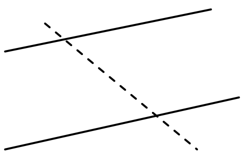
$\alpha = \beta \rightarrow g \parallel h$

S.v. **Nebenwinkel**



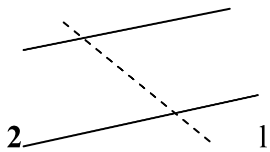
$\alpha + \beta = 180°$

S.v.**Stufenwinkel 1**



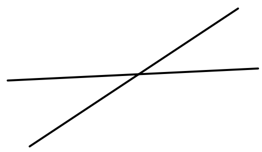
$g \parallel h \rightarrow \alpha = \beta$

S.v.**Stufenwinkel**



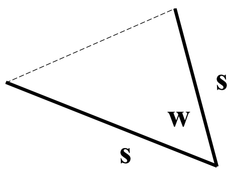
$\alpha = \beta \rightarrow g \parallel h$

S.v.**Scheitelwinkel**



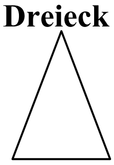
$\alpha = \beta$

Kongruenzsatz sws



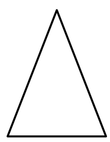
$\rightarrow$ **Kongruent**

S.v.**Gleichschenkligen Dreieck 1**



$a = b \rightarrow \alpha = \beta$

S.v.**Gleichschenkligen Dreieck 2**



$\alpha = \beta \rightarrow a = b$

Usw.

Überblick: Hilfsmittel und Strategien beim geometrischen Beweisen und Problemlösen

Wie schließt man auf gleiche Streckenlängen ?	**Wie schließt man auf gleiche Winkelweiten ?**
$\boxed{a \;=\; b}$	$\boxed{\alpha \;=\; \beta}$
- Satz vom gleichschenkligen Dreieck - Satz von der Mittelsenkrechten - Satz vom Parallelogramm - Kongruenzsätze - Satz des Pythagoras	- Satz vom gleichschenkligen Dreieck - Stufenwinkelsatz - Wechselwinkelsatz - Satz vom Parallelogramm - Kongruenzsätze

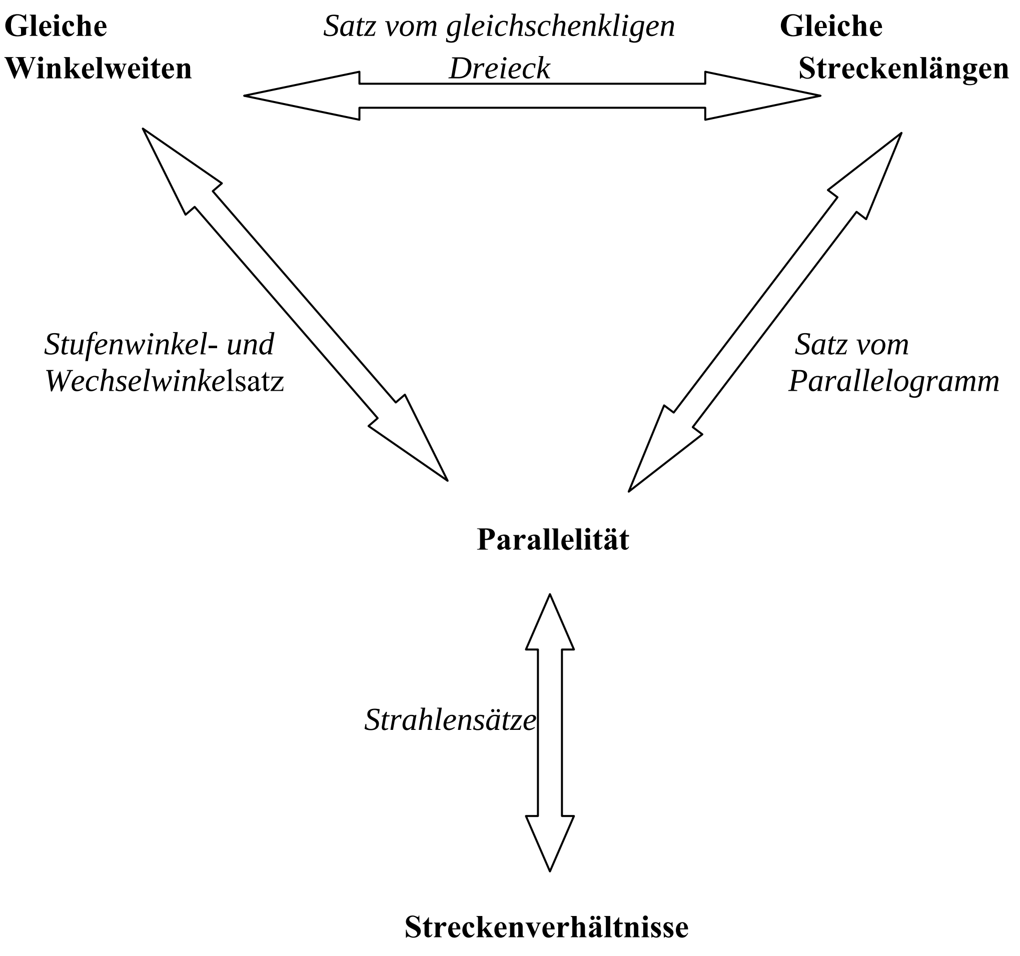
Wie schließt man auf gleiche Parallelität ?	**Wie schließt man auf gleiche Streckenverhältnisse ?**
$\boxed{a \parallel b}$	$\boxed{a : b \;=\; x : y}$
- Stufenwinkelsatz - Wechselwinkelsatz - Satz vom Parallelogramm - Strahlensatz (Umkehrung) - Satz von der zentrischen Streckung - Ähnlichkeitssätze für Dreiecke	- Strahlensätze - Satz von der zentrischen Streckung - Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Überblick: Der Zusammenhang zu den grundlegenden geometrischen Aussagen über

- **Gleiche Streckenlängen**
- **Gleiche Winkelweiten**
- **Parallelität**
- **Gleiche Streckenverhältnisse**

Viele Aussagen der Geometrie lassen sich auf diese „Grundaussagen“ zurückführen.

Welche Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen diesen Aussagen her ?

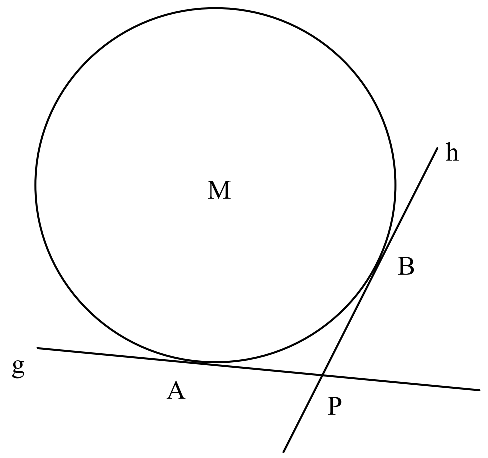


Dies setzt sich in der analytischen Geometrie fort. Auch dort lässt sich das Beweisen nach den oben genannten Aussagen strukturieren und mit Verfahren nachweisen:

- Zeige Parallelität. Verfahren: Zeige, dass zwei Vektoren Vielfache voneinander sind.
- Zeige gleiche Streckenlängen. Verfahren: Zeige, dass zwei Vektoren gleich lang sind (bzw. identisch, falls sie parallel sind)
- Zeige ein Teilverhältnis. Verfahren: Streckenzug.

Dazu kommt: Zeige Orthogonalität. Verfahren: Zeige, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren Null ist.

Beispiel zum Einsatz der Strategien
Zeige: AP = BP.

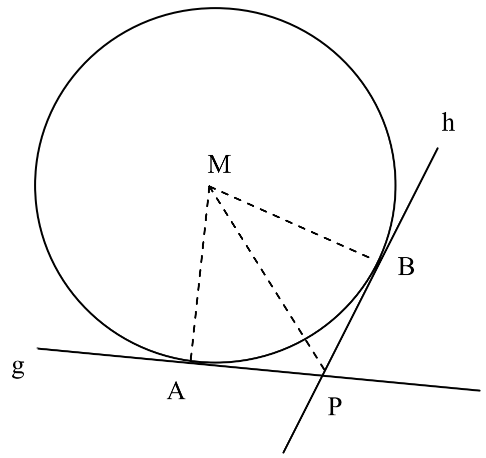


Strategische Überlegungen eines Schülers:
Welches Beweismittel kommt überhaupt in Frage ?
Wie setze ich dieses Beweismittel ein ?

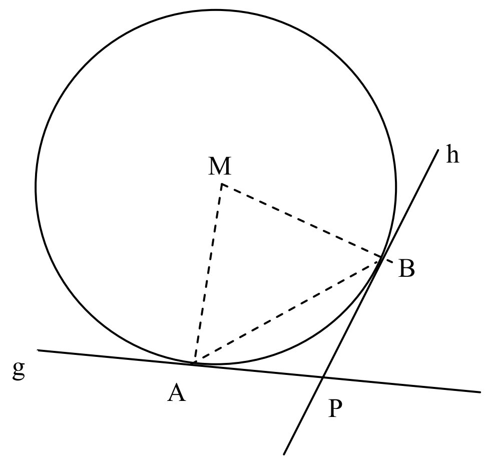
1) Ich versuche <u>kongruente Dreiecke</u> zu finden, die jeweils eine der Seiten AP und BP enthalten.
Dazu muss ich Dreiecke einzeichnen.
Vermutung: Die Dreiecke APM und PBM sind kongruent.
Beweis: Ich verwende den KGS sws.

	Dreieck APM	Dreieck PBM
Seite s_1	AM = Radius = BM	
Winkel w	Rechter Winkel bei A bzw. B	
Seite s_2	PM =	PM

Da die Dreiecke kongruent sind, stimmen Sie in allen entsprechenden Stücken überein, insbesondere in der dritten Seite
Also AP = BP.



2) Ich versuche ein <u>gleichschenkliges Dreieck</u> zu finden, das die Schenkel AP und BP hat.
Vermutung: Das Dreieck APB gleichschenklig.
Beweis: Ich muss zeigen, dass die Basiswinkel bei A und B gleich weit sind.
Das geht so: AM = BM, also sind die Basiswinkel des Dreiecks ABM gleich weit, z.B. α (S.v.gleichsch.D. 1).
Dann sind die Basiswinkel des Dreiecks APB beide $90° - \alpha$, also gleich. Deshalb muss AP = BP sein (S.v.gleichsch.D. 2).



Wenn die Schüler in die Lage versetzt werden, solche Beweise mit den vorgeschlagenen Hilfen selbst zu „erfinden“, werden sie oft auf verschiedene Lösungswege kommen. In diesem Fall von „methodenoffener“ Aufgabe sollte man die Unterrichtsmethode so wählen, dass verschiedene Wege auch gewinnbringend diskutiert werden können.

C. Umsetzungsbeispiele zum Beweisen und Problemlösen in der Geometrie.

Zunächst grundsätzliche Gedanken zum Beweisen an der Schule.

1. Man soll und kann an der Schule nicht alles beweisen. Vor allem ist es nicht durchführbar, ein vollständiges deduktives System aufzubauen. D.h. bewiesen werden nur begrenzte Zusammenhänge (Fachbegriff: **Lokales Ordnen**).

2. Der Inhalt dessen, was man beweisen will, sollte immer schon vor dem Beweis einsichtig sein. Der Schüler sollte also schon vorher mit der Sache Erfahrungen gesammelt haben, eine Vermutung aussprechen können und innerlich die Richtigkeit der zu beweisenden Sache bejahen können.

3. Es muss eine Liste von Grundannahmen und Sätzen geben, die als Beweismittel verwendet werden. Eine solche Begründungsbasis ist nicht fest gegeben, sondern hängt vom Strand der Klasse ab. Es ist wichtig, dass diese Beweismittel im Klassenzimmer präsent sind. Das bedeutet: Die Beweismittel (die Problemlösemittel) werden zum Unterrichtsthema und „veröffentlicht“, z.B. auf Plakaten.

4. Der Schüler sollte eine Anleitung erhalten, <u>wie</u> man mit diesen Grundsätzen beweist bzw. Probleme löst. Beweisideen sollten also nicht vom Himmel fallen, sondern sich aus Beweisstrategien ergeben.

5.. Man sollte nicht beweisen, wenn für die Schüler überhaupt keine Beweisbedürftigkeit besteht. Die Beweisbedürftigkeit ist manchmal einfach zu motivieren, z.B. beim Satz des Thales, bei dem man zwar den 90°-Winkel nachmessen kann, aber doch gern wissen möchte, warum das immer so sein muss. Die Beweisbedürftigkeit kann manchmal schwer zu motivieren sein; z.B. wenn Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt im Dreieck bewiesen wurden, sagen die Schüler in einer Art Gewohnheitseffekt: Natürlich schneiden sich die Seitenhalbierenden auch in einem Punkt, was sonst ? Hier muss man zusätzlich motivieren, z.B. so: Man kann S auch bestimmen, wenn man nur <u>eine</u> Seitenhalbierende zeichnet.

6. Die verwendeten Hilfsmittel müssen einfacher als das zu Beweisende sein. Z.B. ist es in dieser Hinsicht fragwürdig, den Scheitelwinkelsatzes mithilfe einer Punktspiegelung zu beweisen.

7. Vermeiden sollte man sogenannte „Mausefallenbeweise“, bei denen sich der Lernende nur logisch in die Enge getrieben sieht und das Resultat anerkennen muss, ohne inhaltlich überzeugt worden zu sein. Zu dieser Kategorie gehören oft Widerspruchsbeweise.

A Erste Schritte im deduktiven Denken in Klasse 5/6

In diesen Klassenstufen gibt es keine Sätze mit Beweisen, also auch kaum eine damit zusammenhängende logische Schulung. Es gibt aber Definitionen, obwohl man sie noch nicht mit diesem mathematischen Fachbegriff benennen wird. In diesem Zusammenhang kann eine erste logische Strukturierung vorgenommen werden, die den Begriffsumfang von mathematischen Gegenständen thematisieren (Propädeutik von Definitionen).

Beispiel: Rechteck – Quadrat

Die naive, nicht strukturierte Schülervorstellung erkennt die Figuren am „Bild“, hat aber den logischen Zusammenhang der Begriffe „Quadrat“ und „Rechteck“ kognitiv nicht verarbeitet. In Klasse 5/6 sind die Formulierungen vom Entwicklungsstand der Schüler geprägt:
Wenn in einem Viereck alle vier Winkel rechte Winkel sind, dann heißt das Viereck Rechteck. Wenn zusätzlich alle vier Seiten gleich lang sind, dann ist es ein besonderes Rechteck. Man nennt es Quadrat (es ist aber immer noch ein Rechteck).

Entsprechendes gilt für die Begriffspaare Parallelogramm - Rechteck und Quader - Prisma

1. Ein Beispiel zum „Lokalen Ordnen“: Mittelsenkrechte.

In Schulbüchern findet man zur Mittelsenkrechten Formulierungen wie:

> Die Mittelsenkrechte einer Strecke AB ist die Menge aller Punkte,
> die von A und B den gleichen Abstand haben.

oder

> Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Ortslinie aller Punkte, die von den Endpunkten der Strecke den gleichen Abstand haben.

Solche Formulierungen sind logisch nicht klar strukturiert. Sie sind mehr oder weniger eine Situationsbeschreibung, die dem Entwicklungsstand der Schüler gerecht zu werden versucht. Die Schüler sehen zunächst noch die gesamte Figur als Einheit an, d.h. der gleiche Abstand von A und B zu P ist untrennbar mit der Lage von P auf der Mittelsenkrechten verbunden. Beide Situationen („$\overline{AP} = \overline{BP}$“ und „P liegt auf der Mittelsenkrechten“) treten für den Schüler sozusagen gleichzeitig auf, ein kausaler Zusammenhang ist seinem Denken zunächst noch fremd.

Könnte man an dieser Stelle auch beginnen, den Sachverhalt deduktiv zu ordnen und das übergeordnete Lernziel „mathematisch begründen und argumentieren“ verfolgen ?

Dazu muss zunächst geklärt werden, wie ein deduktiv korrekter Aufbau ohne Rücksicht auf die Schule aussehen würde. Danach kann diskutiert werden, ob und wie dies in der Schule machbar ist.

Eine deduktiv korrekte Einführung des Begriffs „Mittelsenkrechte“, die nur Kenntnisse aus Klasse 5/6 (Symmetrie und Abbildungen) verwendet, könnte so aussehen:

Definition: Zu einer Strecke AB heißt eine Gerade m **Mittelsenkrechte**, wenn sie durch die Mitte von AB verläuft und zu AB orthogonal ist.

Satz 1: Wenn ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten m von A und B liegt, dann hat P von A und von B den gleichen Abstand.

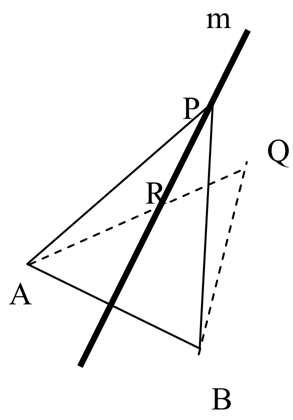
Beweis: m ist die Symmetrieachse von AB. P liegt nach Voraussetzung auf m. Deshalb wird die Strecke AP auf die Strecke BP gespiegelt. Also sind diese Strecken gleich lang.

Hier wird als Vorwissen bzw. Beweismittel benutzt:
a) Die Mittelsenkrechte einer Strecke AB ist Symmetrieachse von AB.
b) Symmetrisch liegende Punkte (hier A und B) werden aufeinander gespiegelt; ein Punkt auf der Symmetrieachse (hier P) wird auf sich gespiegelt.
c)Liegen zwei Strecken (hier AP und BP) achsensymmetrisch zueinander, dann sind sie gleich lang.

Satz 2: Wenn ein Punkt P von zwei Punkten A und B den gleichen Abstand hat, dann liegt P auf der Mittelsenkrechten m von AB.

Beweis: Mit Kontradiktion. Man zeigt:
Liegt ein Punkt Q nicht auf m, dann ist $\overline{AQ} \neq \overline{BQ}$.
Nachweis: O.B.d.A. liege B wie in der Figur Rechts von m. R sei der Schnittpunkt von AQ mit m.

Es ist $\overline{QR} + \overline{RB} > \overline{QB}$ (Dreiecksungleichung)
und $\overline{RA} = \overline{RB}$.
Also $\overline{QR} + \overline{RA} > \overline{BQ}$;
$\overline{AQ} > \overline{BQ}$.



Didaktische Bewertung:

-Satz 1 und Satz 2 sind Satz und Kehrsätze. Beide Richtungen werden in der Schulgeometrie gebraucht.

Was kann in der Schule geleistet werden ?

a) Die Formulierung der Aussagen in „Wenn . . . , dann . . . „ - Form.

b) Die Formulierung beider Richtungen und eine Begründung von Satz 1 mittels Eigenschaften der Geradenspiegelung bzw. der Achsensymmetrie.
Die **getrennte Formulierung von Satz und Kehrsatz** ist m.E. ein bedeutender kognitiver Anspruch und sollte in geeigneter Weise eingeübt werden. (Siehe der folgende Satz 2)

Nicht (oder kaum) leisten kann man in der Schule in Klasse 7 einen formal auf die Kontradiktion abhebende Begründung von Satz 2, dazu hin noch mit dem subtilen Argument der Dreiecksungleichung.

Die Verwendung der Mittelsenkrechten beim Thema Umkreis zeigt, wie man dieses logische Vorwissen verwenden und vertiefen kann:

2. Die Beweise zum Umkreis und Umkreismittelpunkt U.

Die Tatsachen zum Umkreis umfassen zwei verschiedene Aspekte, einmal den Sachverhalt zum folgenden Satz 1 und zum zweiten den Sachverhalt zum Satz 2.

Satz 1: Wenn U der Schnittpunkt von <u>zwei</u> Mittelsenkrechten (der Seiten) in einem Dreieck ABC ist, dann hat U zu jeder Ecke des Dreiecks den gleichen Abstand.

Beweis:
U sei z.B. der Schnittpunkt von m_c und m_a.
Da U auf m_c liegt, ist AU = BU. *(a)*
Da U auf m_a liegt, ist BU = CU. *(a)*
Aus AU = BU und BU = CU folgt: AU = BU = CU.

Benützte Sätze: Satz von der Mittelsenkrechten

(a) Liegt ein Punkt Q auf der Mittelsenkrechten von PP´, dann sind die Abstände PQ und P´Q gleich.

Aus Satz 1 folgt: Zu jedem Dreieck gibt es einen Kreis, der durch alle drei Ecken des Dreiecks geht. Sein Mittelpunkt ist U und sein Radius ist AU (= BU = CU).

Satz 2: In jedem Dreieck ABC schneiden sich alle drei Mittelsenkrechten (der Seiten) in einem gemeinsamen Punkt.

Beweis:
U sei z.B. der Schnittpunkt von m_c und m_a.
Da U auf m_c liegt, ist AU = BU. *(a)*
Da U auf m_a liegt, ist BU = CU. (a)
Aus AU = BU und BU = CU folgt: AU = CU.

Aus AU = CU folgt: U liegt auf m_b. ***(b)!***

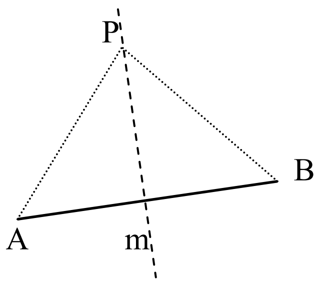
Benützte Sätze: Satz von der Mittelsenkrechten
a) Liegt ein Punkt Q auf der Mittelsenkrechten von PP´, dann sind die Abstände PQ und P´Q gleich *<u>und</u>*
b) Hat ein Punkt Q von P und von P´ denselben Abstand, dann liegt Q auf der Mittelsenkrechten von PP´.

Didaktische Bewertung: Diese Beweise können gelingen, wenn u.a. für folgendes gesorgt ist:
- die Schüler sind schon überzeugt (praktische Übungen), dass es einen Punkt U mit demselben Abstand von den Ecken gibt.
- Die Klasse wird auf einen Blickwechsel eingestimmt: Es geht jetzt um eine Herleitung aus bekannten Sachverhalten.
- Die Beweismittel sind der Klasse plakativ offen gelegt (z.B. zwei Plakate an der Wand mit treffender Kurzdarstellung der Sätze zur Mittelsenkrechten). Z.B. so:

Wir müssen nachweisen, dass die Strecken AU, BU und CU gleich lang sind. Die Plakate zeigen die Sätze (die Begründungen), die wir in der Geometrie bisher benützen können. Welche Sätze könnten zur Lösung des Problems beitragen ?

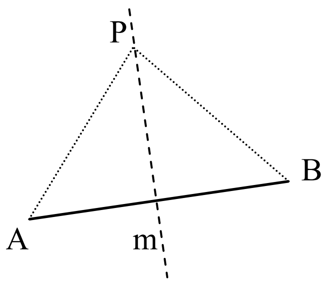
Neben den Plakaten von S.20 müssen vorhanden sein:

S.v.d. **Mittelsenkrechten 1**



AP = BP → P auf m

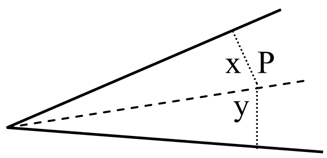
S.v.d. **Mittelsenkrechten 2**



P auf m → AP = BP

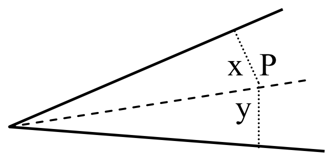
Evtl. auch:

S.v.d. **Winkelhalbierenden 1**



P auf WH → x = y

S.v.d. **Winkelhalbierenden 2**



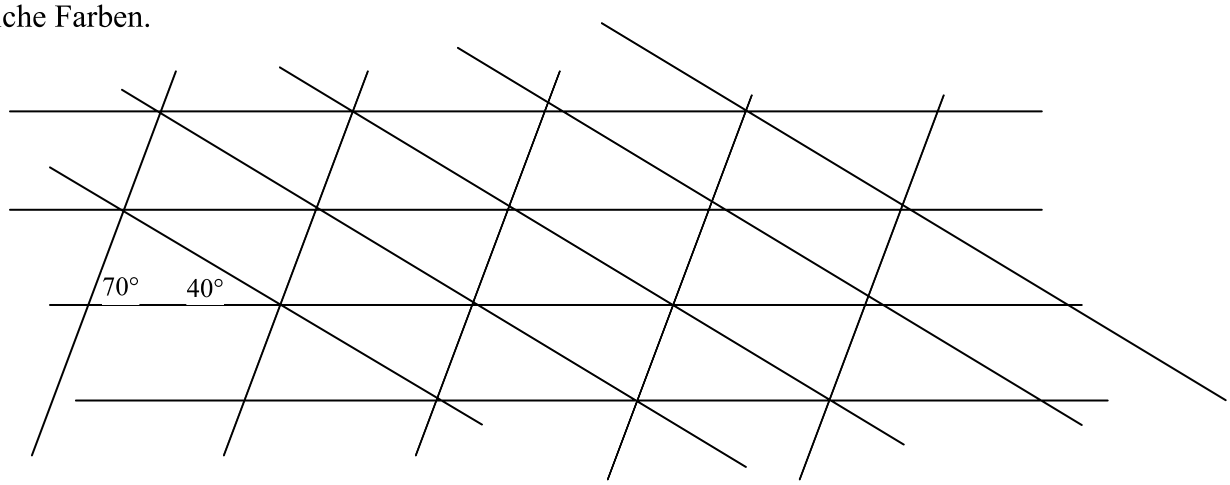
x = y → P auf WH

3. Beispiele zur Winkelsumme und Schülerbeteiligung beim Beweisen

Bei Beweisen im Unterricht gibt es die spezifische Schwierigkeit der zu starken Lehrerzentrierung. Hier Vorschläge, wie Beweisidee und Beweis z.T. schülerzentriert erarbeitet werden können.

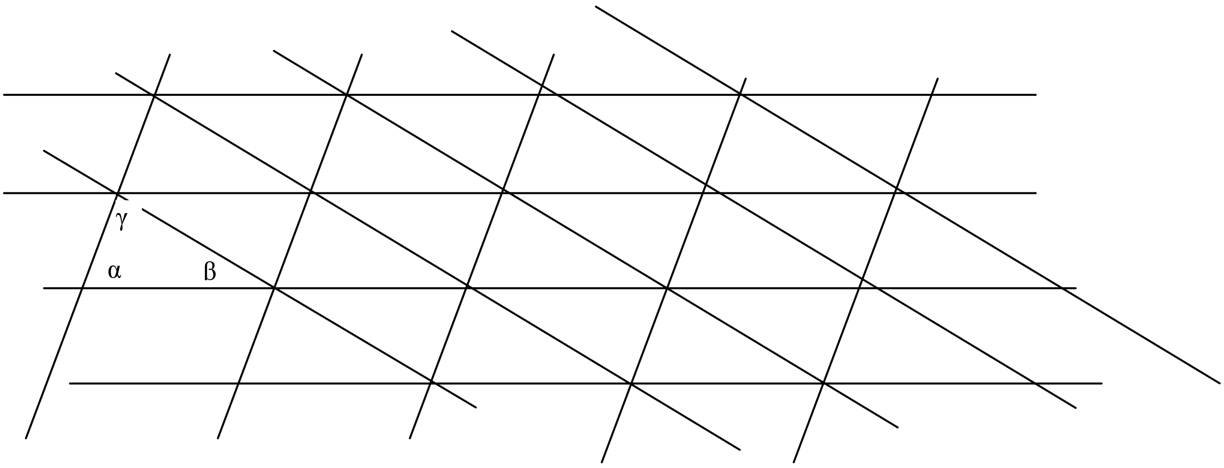
<u>Arbeitsblatt zur „Winkelsumme im Dreieck“</u>

1. Die Geraden in der Figur sind jeweils parallel. Berechne möglichst viele in der Figur vorkommende Winkelweiten und trage sie ein. Verwende für gleichgroße Winkel jeweils gleiche Farben.



2. Wähle in der Figur ein Dreieck aus und addiere die drei Innenwinkel dieses Dreiecks. Ergebnis ?

3. Schreibe möglichst viele in der Figur vorkommende Winkel ausschließlich mithilfe der Buchstaben α, β und γ. Wie kann man nachweisen, dass $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist ?

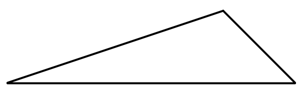


Den nun folgenden Schritt, in dem es um die Beweisnotwendigkeit geht, muss der Lehrer einfordern (kognitive Aktivierung), die Schüler würden von selbst diesen Schritt nicht machen können. Außerdem muss der Lehrer aufzeigen, wie man auf eine Beweisidee kommen kann und was mit einem Beweis letztlich gezeigt wird.

(Mit einer solchen Vorgehensweise kann Vorurteilen über die Mathematik begegnen, wie z.B.
- Beim Beweisen und Problemlösen braucht man die richtige Idee; leider haben die nicht alle.
- Beweise kann ein normaler Mensch nicht kapieren.)

Wenn wir zeigen wollen, dass in ***jedem*** *vorgegebenen Dreieck die Winkelsumme 180° beträgt, dann müssen wir von einem beliebigen Dreieck ausgehen, nicht von einer Parallelenfigur.*

Hier habt ihr ein Dreieck:



Wie beweist man die Behauptung für dieses Dreieck?

Es ist nach der Bearbeitung des Arbeitsblattes nahezu unausweichlich, dass die Schüler auf die Idee mit der Parallelen bzw. Parallelenschar kommen. Der L. kann außerdem sagen (und stellt diese Sätze plakativ vor):

Wir wollen eine Aussage über Winkel aus schon bekannten Sätzen herleiten. Die einzigen uns bekannten Sätze, die auf Winkelweiten schließen, sind

- der Satz vom Nebenwinkel (er schließt auf 180° !)

- der Satz vom Stufenwinkel

- der Satz vom Wechselwinkel (beide benötigen eine Parallele !)

- der Satz vom Scheitelwinkel

(Konsequent gedacht, lautet nun das Ergebnis der Stunde nicht „Die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck ist 180°“, sondern etwas in dieser Art:

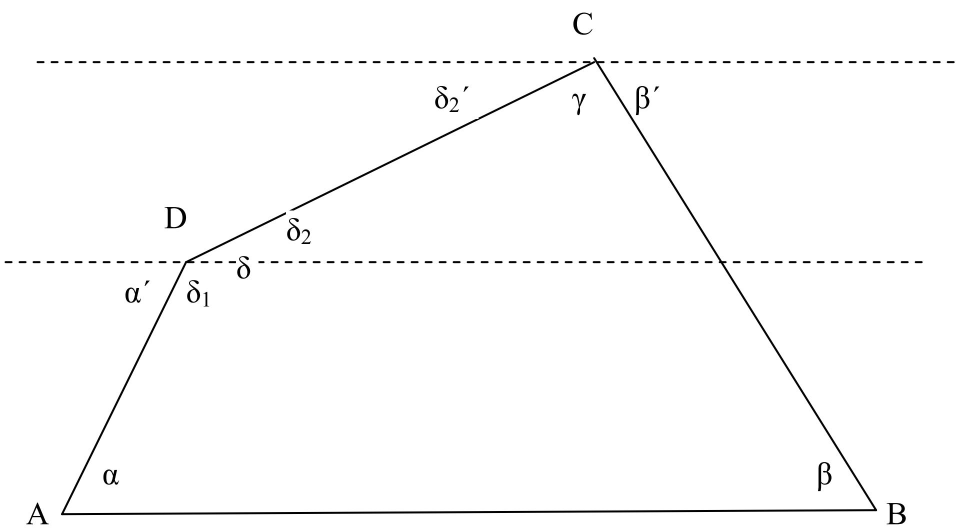
„Aus den Sätzen vom Stufen-Wechsel-Scheitel-Neben-Winkel kann man herleiten, dass die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck 180° betragen muss“.)

4. Exkurs zur Winkelsumme im Viereck

Wenn man schon einmal bei der Winkelsumme ist, wird traditionell anschließend die Winkelsumme im Viereck bewiesen. Als Beweismethode wird die Aufteilung in zwei Dreiecke verswendet. Dieses Vorgehen ist m.E. an dieser Stelle problematisch: Der Beweis der Winkelsumme im Dreieck ist oft der erste richtige Beweis im Leben eines Schülers in dem Sinne, dass das Vorgehen lückenlos mit früheren Sätzen begründet wird. Insbesondere hat er den Erfolg gesehen, den ein strategischer Blick bzw. eine Analyse der früheren Sätze hinsichtlich der Beweisidee „zeichne eine Hilfsparallele“ hat.

Und jetzt kommt der zweite Beweis im Leben eines Schülers mit einer ganz neuen Beweisidee ! Wobei es doch auch mit Parallelen geht:

Beweis der Winkelsumme im Viereck mit der Parallelenmethode



δ wird in δ_1 und δ_2 aufgeteilt;

$\delta_2 = \delta_2'$ und $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ (Wechselwinkel an Parallelen)

Ecke C: $\delta_2 + \gamma + \beta = 180°$

Ecke D: $\alpha + \delta_1 = 180°$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Diese Methode kann theoretisch auch bei Fünfecken, Sechsecken usw. angewendet werden. Was aber nicht gelingt, ist ein allgemeiner Beweis für die Winkelsumme im n-Eck. Dieser mit müsste mit vollständiger Induktion geführt werden, wobei im Induktionsschritt ein Dreieck dazu genommen wird. Erst hier, wenn man einen Satz über die Winkelsumme im n-Eck beweisen will, ist also die Zerlegung in Dreiecke notwendig.

Im Sinne einer Kompetenzentwicklung ist also nicht das primäre Ziel, Inhalte zu erschließen (im Sinne von: Wichtig ist, dass die Schüler die Winkelsumme im Viereck kennen), sondern die deduktiven Fähigkeiten des Schülers weiter zu entwickeln. Natürlich ist auch die Zerlegung in Dreiecke ein wichtiges Beweis – und Problemlöseprinzip und man sollte es auch bringen. Nur nicht gleich bei der Winkelsumme im Viereck.

5. Ein Blick über den Tellerrand: „Akademische Anforderungen“ im holländischen Abitur

Die folgende Aufgabe zusammen mit den Informationen über das niederländische Abitur ist entnommen aus:
Offene und realitätsbezogene Aufgaben für den Mathematikunterricht, Anregungen aus der niederländischen Wiskunde, Hrsg. KuMi NRW; Klett-Verlag 2007

In der niederländischen Oberstufe gibt es die „Wiskunde A“ und die akademischere „Wiskunde B“. Seit 1999 ist in Wiskunde B die Euklidische Geometrie wieder im Lehrplan der Oberstufe und Thema im Abitur. Es sollen dadurch logisches Denken, korrektes Begründen und zielgerichtetes Problemlösen gefördert werden. Dabei werden als Beweismittel im Abitur lediglich die Grundlagen der Kongruenzgeometrie vorausgesetzt, wie sie bei uns bis zur achten Klasse gelehrt wird. Der Anspruch der Aufgaben liegt nicht in Bereich des *Wissens* oder von *Verfahren*, sondern im Auffinden eines mehrschrittigen Beweisweges und in der korrekten Begründung und Darstellung der einzelnen Beweisschritte. (Man sieht: Relativ wenig Inhalt bei relativ viel Begründungs-Kompetenz und hohen kognitiven Anforderungen.) Entsprechend muss die Korrektur und die Bewertung der Aufgaben widerspiegeln, in wie weit die Begründungs-Kompetenz entwickelt ist.

Aufgabe: Auf einer Geraden (Examen 2002)

In Abbildung 1 sind zwei sich berührende Kreise c_1 und c_2 eingezeichnet mit den Mittelpunkten M_1 und M_2. Der Berührpunkt der beiden Kreise ist S. Die Gerade l berührt den Kreis c_1 in P und den Kreis c_2 in Q. Die gemeinsame Tangente an c_1 und c_2 schneidet die Gerade l im Punkt T.

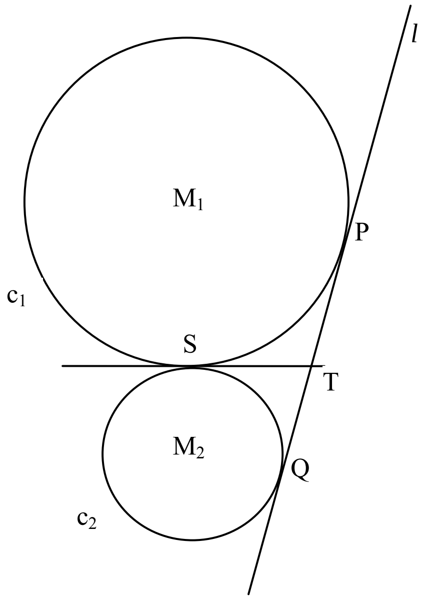


Abbildung 1

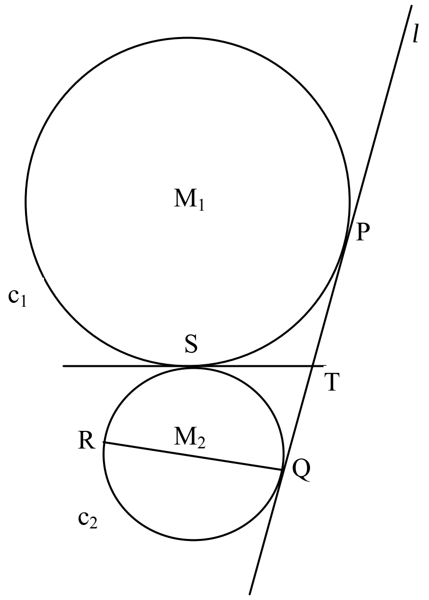


Abbildung 2

Frage 1 (5 Punkte)
Beweise, dass die Punkte P, Q und S auf einem Kreis liegen.
(Bem. von mir: Soll wohl „Beweise, dass die Punkte P,Q und S auf einem Kreis um T liegen." heißen.)

Außerdem ist der Durchmesser QR durch c_2 gegeben. Siehe hierzu die Abbildung 2.

Frage 2 (6 Punkte)
Beweise, dass die Punkte P, S und R auf einer Geraden liegen.

Lösung zur Aufgabe: Auf einer Geraden

Frage 1 (max. 5 Punkte)		**Punkte**
	• $\angle PST = \angle SPT$ (Winkel zwischen Sehne und Tangente)	**2**
	• Daher ist $\overline{PT} = \overline{ST}$ (gleichschenkliges Dreieck)	**1**
	• Analog gilt $\overline{ST} = \overline{QT}$	**1**
	• Daher liegen P, Q und S auf einem Kreis mit Mittelpunkt T	**1**
alternativ:		
	• $\angle M_1PT = \angle TSM_1 = 90°$; $\overline{M_1P} = \overline{M_1S}$; $\overline{M_1T} = \overline{M_1T}$	**1**
	• Daher ist das Dreieck M_1PT kongruent mit Dreieck M_1ST (Kongruenzsatz SSW_g)	**1**
	• Daher ist $\overline{PT} = \overline{ST}$	**1**
	• Analog gilt $\overline{ST} = \overline{QT}$	**1**

	● Also liegen P,Q und S auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt T.	**1**

(Bem. von mir: Es gibt noch einen weiteren Lösungsweg, der den Kehrsatz des S.v.Thales benützt.)

Frage 2 (max. 6 Punkte)		**Punkte**
	● $\angle PSQ = 90°$ (Satz von Thales)	**2**
	● $\angle QSR = 90°$ (Satz von Thales)	**2**
	● $\angle PSQ + \angle QSR = 180°$	**1**
	● Daher liegen P, S und R auf einer Geraden.	**1**
alternativ:		
	● M_1S und M_2S stehen beide senkrecht auf der gemeinsamen Tangente in S, daher liegt S auf $\overline{M_1M_2}$	**1**
	● M_1P und RQ stehen senkrecht zu l, daher ist $M_1P \parallel RQ$	**1**
	● $\angle PM_1M_2 = \angle RM_2M_1$ (Wechselwinkel)	**1**
	● $\angle PSM_1 = 0{,}5 \cdot (180° - \angle RM_2M_1)$ und $\angle RSM_2 = 0{,}5 \cdot (180° - \angle RM_2M_1)$	**1**
	● Daher ist $\angle PSM_1 = \angle RSM_2$	**1**
	● Daher liegen P, S und R auf einer Geraden, denn P und R liegen nicht auf derselben Seite von M_1M_2.	**1**

Ein Beweis als Klassenarbeitsaufgabe ?

Wenn man Begründungskompetenz in einer Klassenarbeit prüfen möchte, ist m.E. sehr zu beachten: In Prüfungssituationen hat man selten Lichtblitze und Ideen, weshalb man solche auch nicht einfordern darf. Das ist auch gar nicht notwendig. Denn wir wollen ja keine „Lichtblitzkompetenz“ prüfen, sondern „Begründungskompetenz“. Der Schüler sollte also in der Lage sein, mit durchschnittlicher Kenntnis der Beweismittel die Beweisidee zu finden.

Bewerten kann man dann folgendes (wie in der Abitur-Aufgabe versucht):

- Ist das Beweismittel grundsätzlich richtig gewählt und verwendet ?

- Sind für jeden Schritt stichhaltige Beweismittel angegeben ?

- Ist die Abfolge der Beweisschritte stringent ?

D. Ein Entwurf für einen „Logik-Lehrplan“

In den „Standards“ findet man bei den „Stufenspezifischen Hinweisen“ und den „Leitideen“ zu diesem Thema nichts, wohl aber bei den „Leitgedanken zum Kompetenzerwerb“. Dort steht unter „Begründen“:

♦ elementare Regeln und Gesetze der Logik kennen und anwenden

♦ Begründungstypen und Beweismethoden der Mathematik kennen, gezielt auswählen und anwenden

♦ in mathematischen Kontexten Vermutungen entwickeln, formulieren und untersuchen

♦ gleichartige Strukturen erkennen, verallgemeinern und spezialisieren

Zur unterrichtlichen Umsetzung müssen diese Leitgedanken konkretisiert werden. Hier der Versuch, ein Fundament zur deduktiven Mathematik zu formulieren, wie es im Unterricht beachtet werden sollte.

Ein „Logik-Lehrplan“ für die Schule

1 Mathematische Formulierung von Sätzen

a) Der Sch. weiß, dass ein mathematischer Satz die Form „Wenn [A] , dann [B]“ hat.

D.h. ein mathematischer Satz hat eine Voraussetzung und eine Behauptung; beim Beweis und bei der Anwendung des Satzes muss man sich über die Richtung im Klaren sein.

b) Der Sch. kann umgangssprachlich formulierte Sätze in die „Wenn [A] , dann [B]“ - Form übersetzen.
Beispiele: Formuliere in „Wenn . . . , dann . . . „ –Form

(i) „Der Winkel im Halbkreis ist ein Rechter“
(ii) „Die Mittelsenkrechte ist die Ortslinie aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten den gleichen Abstand haben“.
(Die Formulierungen a) und b) verschleiern die Aussage des Satzes; besonders bei b) ist m.E. nicht klar, welche Richtung gemeint ist; oder sind beide Richtungen gemeint ?)

c) Der Schüler kann zwischen „Für alle .. „ und „Es gibt . . „ Aussagen unterscheiden.
Beispiel: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil $f(-a) = f(a)$ gilt. Hier fehlt der Ausdruck „für alle Zahlen a aus R“.

d) Der Sch. versteht den logischen Gehalt eines Satzes.

Beispiel 1: Der Satz „Wenn [A], dann [B]“ sei wahr.

Welche der Aussagen folgen aus diesem Satz.?
a) B ist wahr.
b) Es kommt nicht vor, dass A wahr ist und B nicht wahr ist.
c) Entweder sind A und B beide wahr oder keine von Beiden.
d) Es kommt nicht vor, dass B wahr und A nicht wahr ist.

Beispiel 2: Der Satz „Wenn ein Viereck achsensymmetrisch ist, dann sind zwei Innenwinkel gleich weit“ ist wahr. Was folgt aus diesem Satz ?

a) Bei jedem achsensymmetrischen Viereck gibt es zwei gleich weite Winkel.
b) Es muss achsensymmetrische Vierecke geben, bei denen alle Winkel gleich weit sind.
c) Wenn bei einem Viereck zwei Winkel gleich weit sind, dann ist es achsensymmetrisch.
d) Es gibt kein achsensymmetrisches Viereck, das nicht zwei gleichweite Winkel hat.

2 Umkehrung von Sätzen

a) Der Sch. kann zu einem mathematischen Satz die Umkehrung bilden.

b) Der Sch. weiß, dass man von der Wahrheit eines Satzes nicht auf die Wahrheit oder Falschheit der Umkehrung schließen kann.

Das ist ein großer intellektueller Schritt: Von der „ganzheitlichen“ Sicht einer Situation zur „kausalen Sicht“ zur kommen; nicht zu sagen: „Gleichschenkliges Dreieck und gleiche Basiswinkel gehören zusammen“, sondern: „Wenn in einem Dreieck zwei gleichlange Seiten auftauchen, dann muss es auch zwei gleichgroße Winkel geben“ (und umgekehrt).
Beispiel:
Bilde die Umkehrung und gib an, ob der Satz bzw. seine Umkehrung wahr sind.
„Wenn in einem Viereck drei Innenwinkel gleich weit sind, dann ist es ein Rechteck.“
„Wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) \neq 0$, dann hat f an der Stelle a eine Wendestelle“.

3 Definitionen verstehen

a) Der Sch. soll den Umfang einer Definition bestimmen können.

Beispiel: „Ein Viereck heißt Kreuzviereck, wenn die Geraden durch gegenüberliegende Ecken des Vierecks orthogonal sind“
Zeichne möglichst viele Varianten von Kreuzvierecken.

(Der Begriff „Kreuzviereck“ ist erfunden. Das machen Mathematiker dauernd: Die Gegenstände der Mathematik sind Idealisierungen und der Mathematiker ist in der Wahl seiner Idealisierungen frei.)

b) Der Sch. kann Obergriff und Unterbegriff unterscheiden.

Beispiel : „Ein Viereck heißt Quadrat, wenn alle vier Innenwinkel 90° betragen und alle vier Seiten die gleiche Länge haben“

„Ein Viereck heißt Rechteck, wenn alle vier Innenwinkel 90° betragen“

Oberbegriff: Rechteck; Unterbegriff: Quadrat.

4 Beispiel und Gegenbeispiel

Der Sch. soll wissen, dass die Richtigkeit einer „Es gibt . . .“-Aussage mit der Angabe eines Beispiels bewiesen ist.
Der Sch. soll wissen, dass man die Falschheit eines Satzes mit einem Gegenbeispiel beweisen kann.
Beispiele: Beweise oder widerlege die Aussagen
(i) „ Zwei Vektoren im Raum sind immer linear unabhängig.“
(ii) „Es gibt quadratische Gleichungen, die keine Lösungen haben.“

5 Deduktiver Aufbau

Der Sch. soll einsehen, dass Sätze notwendig aus anderen Sätzen (oder Axiomen) folgen, und dass man mathematisches Wissen in einer deduktiv geordneten Weise strukturieren kann. D.h. er kann in einem begrenzten Umfang deduktive Zusammenhänge nachvollziehen. (Lokales Ordnen)

Die folgenden Lernziele sind deutlich anspruchsvoller. Es ist m.E. zweifelhaft, ob sie sinnvoll in der Unter-und Mittelstufe verfolgt werden können.

(7) Kontraposition

Der Sch. soll wissen, dass man die Wahrheit eines Satzes mit Kontraposition beweisen kann.
$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

(Der Sch. soll nicht die formale Kontraposition kennen, sondern „die Denke dahinter“.)

Beispiel:
Umkehrung des Satzes von Thales: „Wenn [P: Das Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel], dann [Q: Die Ecke C eines Dreiecks liegt auf dem Halbkreis über AB]“.

Zum Beweis der Umkehrung „Wenn P, dann Q“ zeigt man „Wenn nicht Q, dann nicht P“ (mit dem Satz des Thales und weiteren Hilfsmitteln wie der Dreiecksungleichung).

(8) Beweis durch Widerspruch
Der Sch. soll wissen, dass man die Wahrheit eines Satzes mittels Widerspruchsbeweis beweisen kann. $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow \neg P$.
Kommt in der Schule nur an wenigen Stellen vor, z.B. Beweis dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

(9) Wahrheit in der Mathematik
Der Sch. weiß, dass „mathematische Wahrheit" und „naturwissenschaftliche Wahrheit" ganz verschiedene Bedeutungen haben.

Was bedeutet das für die Schule und die mathematische Bildung überhaupt ?

Es ist eine bedeutende Aufgabe des Mathematikunterrichts, den Schülern diese spezifische Art des Denkens zu lehren. Konkret: Den Schülern an geeigneten Stellen zu zeigen, wie sich Aussagen nach klaren logischen Regeln aus Axiomen bzw. früheren Sätzen herleiten lassen. Wenn sich also eine solche Gelegenheit bietet, gehört es zum Kernanliegen des Mathematikunterrichts, sie auch wahr zu nehmen. Eine solche punktuelle logische Vertiefung (Fachdidaktischer Begriff: Lokales Ordnen) ist möglich; nicht möglich und auch nicht Aufgabe der Schule ist das Erstellen einer vollständigen axiomatisch-deduktiv geordneten Theorie.

Dabei ist zu beachten: Die Schulung des deduktiven Denkens ist eine echte Langzeitaufgabe. Vor der Pubertät kann ein Kind so nicht denken. In dieser Zeit so etwas von ihm zu verlangen, wäre unprofessionell. In der Pubertät kann diese Denkart entwickelt werden, aber nur nach und nach. Der Schüler steht etwa in der Klasse 7 am Anfang seiner „deduktiven Ausbildung". Man sollte also mit Augenmaß und wohldosiert vorgehen und insbesondere das deduktive Denken beim Schüler nicht voraussetzen, sondern es zum Thema einzelner Stunden oder Lerneinheiten machen.

E Fachkonferenzen: Vorschläge für Arbeitsaufträge

1 (Material S. 12 – 16)

a) Welche Beweismittel der Elementargeometrie sollen den Schülern in den Klassenstufen 6 (7, 8, 9, 10) jeweils zur Verfügung stehen ?

b) Wie stellt sich der deduktive Zusammenhang dieser Beweismittel dar ?
(Zum Beispiel: Werden z.B. die KGS anschaulich oder mittels Kongruenzabbildungen begründet ?)

2 (Material S. 23-24)

Über welche Strategien für das Beweisen und Problemlösen in der Elementargeometrie sollen die Schüler in den Klassenstufen 6 (7, 8, 9, 10) jeweils verfügen ?

3 (Material S. 27 – 30)

Am Beispiel Mittelsenkrechte / Satz vom Umkreis:
Welches Niveau streben wir bei der Ausprägung der Begründungskompetenz an im Hinblick auf
- die Formulierung der Sätze ?
- die genaue Identifizierung der verwendeten Beweismittel ?
- die schriftliche Dokumentation einer Begründung / eines Beweises ?

4 (Material S. 35 – 36)

Bis zu welchem Niveau streben wir Aufgaben zur Begründungskompetenz und Problemlösekompetenz in Klassenarbeiten an ?
Welche Aspekte sind für die Bewertung relevant ?

5 (Material S. 37 – 40)

Welche Aspekte eines Logik-Lehrplanes wollen wir im Mathematikunterricht fördern und einfordern ? Was erwarten wir jeweils in welcher Klassenstufe ?