Aufgabe: ***Summe von Nachbarzahlen***

Jette behauptet:
„Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets durch drei teilbar.“

Hat Jette recht? Begründe deine Antwort.

Zusatz:

Ist die Summe von vier aufeinander folgenden Zahlen durch vier teilbar, die Summe von fünf aufeinander folgenden Zahlen durch fünf usw. teilbar…

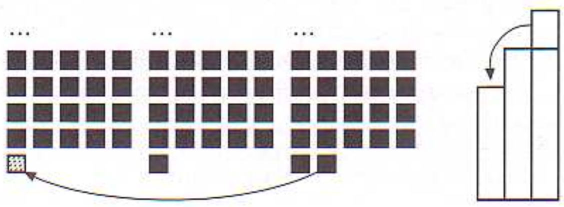
Lösung zur Aufgabe ***Summe von Nachbarzahlen***

Mögliche Argumentationen:

1. ***Paradigmatischer Ansatz:*** *Man nimmt drei aufeinanderfolgende Zahlen, z. B. 3, 4, 5.*
   $(4-1)+4+(4+1) = 4+4+4 = 3 \cdot 4;$
   das ist durch 3 teilbar.
   Das gilt offenbar immer.

   Hierbei wird mit einem konkreten Beispiel operiert, wobei insbesondere durch die Klammern und den Pfeil das Erfassen einer grundlegenden allgemeinen Struktur verdeutlicht wird. Daran kann man erkennen, dass dies bei allen weiteren Beispielen ebenso gilt.
2. ***Algebraischer Ansatz:*** *Wenn n die erste dieser drei Zahlen ist, dann gilt:*
   $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3 \cdot (n+1);$
   das ist durch 3 teilbar.

   Diese Variante ist wegen der Verwendung von Variablen abstrakter. Noch geschickter wäre es, analog zum ersten Ansatz die *mittlere* Zahl mit *n* zu bezeichnen.
3. ***Zeichnerischer Ansatz:*** *Die drei Zahlen können z. B. durch Punktmuster oder Treppenstufen dargestellt werden:*



Durch Verschieben eines Punkts entstehen drei gleichmächtige Mengen bzw. durch den Stufenausgleich entsteht eine Anordnung mit drei gleich hohen Säulen, also ist die Zahl durch 3 teilbar.

Hier wird also anstelle von Zahlen und Variablen nun mit geometrischen Objekten gearbeitet.

4. *Inhaltlicher Ansatz:* *Eine der drei Zahlen muss durch 3 teilbar sein (3er-Reihe), eine lässt bei der Division durch 3 den Rest 1 und eine den Rest 2. Deshalb würde bei der Division der Summe „der Rest 1 + 2 = 3 bleiben", also ist die Summe durch 3 teilbar.*

Bei diesem Ansatz werden mathematische Überlegungen unter Rückgriff auf bereits erworbene Kenntnisse angestellt. Variablen werden dabei nur implizit benötigt.

5. *Iterativer Ansatz:* *$1 + 2 + 3 = 6$; und 6 ist durch 3 teilbar. $2 + 3 + 4 = 9 = 6 + 3$ und deshalb ebenfalls durch 3 teilbar usw. Die Summe wächst jeweils um 3 und bleibt deshalb durch 3 teilbar.*

Im Kern handelt es sich hier um eine Vorform der vollständigen Induktion, die bereits in der Mittelstufe von Schülern erbracht werden kann.

Diese Argumentationen **widerlegen** ebenso z.B. die Behauptung, dass die Summe von vier aufeinander folgenden Zahlen durch vier teilbar ist und **belegen** entsprechend, dass die Summe von fünf aufeinander folgenden Zahlen durch fünf teilbar ist...

Analyse zur Aufgabe *Summe von Nachbarzahlen*	
Bildungsstandards	konkrete Aufgabe
mathematische Sachverhalte mithilfe von Sprache, Bildern und Symbolen beschreiben und veranschaulichen; in mathematischen Kontexten argumentieren und systematisch begründen	Der Grad der mathematischen Argumentation hängt nicht notwendig vom Grad ihrer Formalisierung ab, wie die verschiedenen Lösungsansätze zeigen. Begründungen können auf verschiedenen Ebenen erfolgen. Leitidee: Zahl
Variationsmöglichkeiten: 1.) Wie bereits in der Aufgabe formuliert eine Weiterführung auf die Frage hin, wann die Summe von n aufeinander folgenden Zahlen durch n teilbar ist. 2.) Ist die Summe der Quadratzahlen von drei aufeinander folgenden Zahlen durch 3 teilbar? (allerdings erst ab Klasse 7 rechnerisch begründbar)	
Einsatz von Hilfsmitteln: ---	
Methodik: es bieten sich neben der Einzel- auch Partner- und Gruppenarbeit an. Als Hausaufgabe ist eine einfache Variation / Weiterführung geeignet, wie etwa die Zusatzfrage.	
Fächerübergreifender Unterricht: ---	
Kommentar: Die Begründungen können auf unterschiedlichen Ebenen und Darstellungen stattfinden. Welche Ebene bzw. Darstellung bei einer konkreten Aufgabe wie dieser gewählt wurde, hängt vom Vorwissen der Schüler ab, von der Unterrichtstradition oder individuellen Präferenz des Schülers... Sie sind aber, sofern es die Aufgabenstellung nicht näher spezifiziert, alle als gleichberechtigt zu behandeln!	
Anforderungsbereich: Anforderungsbereich II . Zusatzfrage: Anforderungsbereich II - III.	
Quelle: Blum, Drüke-Noe, Hartung, Köller (Hrsg.): „Bildungsstandards Mathematik: konkret", Cornelsen Scritpor	