Arbeitsblatt 2: **Beweis der Potenzregel**

Ziel: Die Gültigkeit der Potenzregel soll für **jede** Zahl natürliche Hochzahl n ($n \geq 1$) nachgewiesen werden.

Aufgabe 1 Zum Beweis benötigt man die Schreibweise von Binomen wie $(x+h)^2$; $(x+h)^3$; $(x+h)^4$ usw. als Summe. Dies wird in dieser Aufgabe erläutert.

a) Es ist $\mathbf{(a+b)^2} = (a+b) \cdot (a+b)$; ausmultiplizieren ergibt $\mathbf{(a+b)^2} = \mathbf{1} \cdot a^2 + \mathbf{2} \cdot ab + \mathbf{1} \cdot b^2$

Bestätigen Sie durch ausmultiplizieren: $\mathbf{(a+b)^3} = \mathbf{1} \cdot a^3 + \mathbf{3} \cdot a^2 \cdot b^1 + \mathbf{3} \cdot a^1 \cdot b^2 + \mathbf{1} \cdot b^3$

b) In der Tabelle ist das **Pascal´sche Dreieck** dargestellt. Jede Zahl ergibt sich als Summe der zwei schräg darüberstehenden Zahlen. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen in den letzten drei Zeilen.

0										1										
$(a+b)^1$									1		1									
$(a+b)^2$								1		2		1								
$(a+b)^3$							1		3		3		1							
$(a+b)^4$						1		4		6		4		1						
$(a+b)^5$					1										1					
$(a+b)^6$				1												1				
$(a+b)^7$			1														1			

c) Wenn man ein Binom als Summe schreibt, können die Koeffizienten der Summanden am Pascal´schen Dreieck abgelesen werden. Ergänzen Sie die fehlenden Koeffizienten:

$$\mathbf{(x+h)^4} = \_\_\ x^4 + \_\_\ x^3 \cdot h^1 + \_\_\ x^2 \cdot h^2 + \_\_\ x^1 h^3 + \_\_\ h^4$$

d) Beachten Sie dabei die Hochzahlen: Sie fallen bzw. steigen jeweils um 1.

Ergänzen Sie die Hochzahlen: $\mathbf{(x+h)^5} = \mathbf{1} \cdot x^{\cdots} + \mathbf{5} \cdot x^{\cdots} h^{\cdots} + \mathbf{10} \cdot x^{\cdots} h^{\cdots} + \mathbf{10} \cdot x^{\cdots} h^{\cdots} + 5 \cdot x^{\cdots} h^{\cdots} + \mathbf{1} \cdot h^{\cdots}$

e) Schreiben Sie als Summe: $\mathbf{(x+h)^6} =$

f) Es soll $(x+h)^n$ als Summe geschrieben werden. Ergänzen Sie die fehlenden Hochzahlen …. .

Drücken Sie die fehlenden Koeffizienten ___ als Zahl oder als Term mit der Variable n aus. Die restlichen Koeffizienten sind mit z_1, z_2, usw. bezeichnet.

$$\mathbf{(x+h)^n} = \_\_ \cdot x^n + \_\_ \cdot x^{n-1} \cdot h^{\cdots} + z_3 \cdot x^{\cdots} \cdot h^{\cdots} + z_4 \cdot x^{\cdots} \cdot h^{\cdots} + \ldots + z_{n-1} \cdot x^{\cdots} \cdot h^{\cdots} + \_\_ \cdot x^1 \cdot h^{n-1} + \_\_ \cdot h^{\cdots}$$

Aufgabe 2 Man kann den Beweis der Potenzregel nicht für jede Hochzahl n einzeln durchführen, da es unendlich viele natürliche Hochzahlen gibt. Deshalb argumentiert man allgemein mit der Hochzahl n. *Beweis* für den Satz: Ist $f(x) = x^n$, dann ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$)

(1) Differenzenquotient von f(x) an der Stelle x: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

(2) Vereinfachen des Differenzenquotienten: Ergänzen Sie die Hochzahlen …. und die Koeffizienten___ .

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x^n + \_\_ \cdot x^{n-1} \cdot h^1 + z_3 \cdot x^{\cdots} \cdot h^{\cdots} + z_4 \cdot x^{\cdots} \cdot h^{\cdots} + \ldots + n \cdot x^1 \cdot h^{n-1} + h^n) - x^n}{h}$$

$$= \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot h^1 + z_3 \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + z_4 \cdot x^{n-3} \cdot h^3 + \ldots + n \cdot x^1 \cdot h^{n-1} + h^n}{h}$$

Ergänzen Sie die fehlenden Potenzen __ von h.

$$= n \cdot x^{n-1} + z_3 \cdot x^{n-2} \cdot \_\_\_ + z_4 \cdot x^{n-3} \cdot \_\_\_ + \ldots + n \cdot x^1 \cdot \_\_\_ + \_\_\_$$

(3) Für $h \to 0$ strebt der Differenzenquotient gegen den Grenzwert . . . . ; also ist: $f'(x) = \ldots\ldots$

Ende des Beweises