

Arbeitsblatt 9: Herleitung der Summenregel

Ziel: Es soll eine Regel für die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ gefunden werden, falls die Ableitungen von g und h bekannt sind.

„Grundfunktionen“ der Form $g(x) = x^2$ kann man mit der Potenzregel ableiten. Aus diesen Grundfunktionen kann man neue Funktionen zusammensetzen, zum Beispiel

$$f(x) = x^2 + x^3 \text{ ist die Summe der Funktionen } g(x) = x^2 \text{ und } h(x) = x^3.$$

Allgemein kann man so zu beliebigen Funktionen g und h eine neue Funktion der Form $f(x) = g(x) + h(x)$ bilden.

Aufgabe 1

Gegeben: $g(x) = 0,25x^2$ und $h(x) = 0,5x$
(siehe Figur 1).

a) Der Funktionsterm von $f(x) = g(x) + h(x)$

lautet: $f(x) = \dots\dots\dots$

Zeichnen Sie den Graph von f in Figur 1 ein (evtl. mit Hilfe des GTR).

b) Hier wird untersucht, wie sich das Plus-Zeichen im Funktionsterm $g(x) + h(x)$ auf die Ableitung von f auswirkt.

Dazu werden zwei verschiedene Zugänge verglichen:

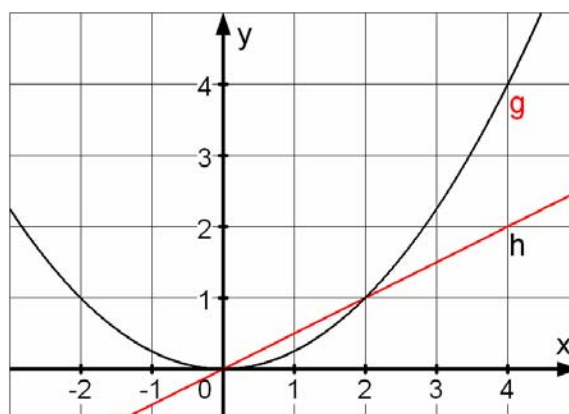
(1) Bestimmen Sie mit der Faktorregel

$$g'(x) = \dots\dots \text{ und } h'(x) = \dots\dots$$

Berechnen Sie die Werte der ersten drei Zeilen in der Tabelle.

(2) Bestimmen Sie die Werte der letzten Tabellenzeile graphisch in Fig 1.

Figur 1



| | | | |
|---------------------------|---|---|---|
| x | 0 | 2 | 4 |
| $g'(x)$ berechnet | | | |
| $h'(x)$ berechnet | | | |
| $g'(x) + h'(x)$ berechnet | | | |
| $f'(x)$ gemessen (GTR) | | | |

Vermutetes Ergebnis: Sind die Ableitungen g' von g und h' von h bekannt, dann ist die Ableitung der Summe $f(x) = g(x) + h(x)$ von g und h : $f'(x) = \dots\dots\dots$

Aufgabe 2 Die Vermutung aus Aufgabe 1 richtig und heißt **Summenregel**.

Ordnen Sie die Kärtchen zu einem Beweis der Summenregel. Beginnen Sie mit *.

Der Differenzenquotient von f wird auf g und h zurückgeführt

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{h(x+h) - h(x)}{h}$$

*Differenzenquotient von f an der Stelle x

$g'(x) + h'(x)$

$$\frac{[g(x+h) - g(x)] + [h(x+h) - h(x)]}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

strebt für $h \rightarrow 0$ gegen

$$\frac{g(x+h) + h(x+h) - g(x) - h(x)}{h}$$

$$\frac{[g(x+h) + h(x+h)] - [g(x) + h(x)]}{h}$$

Aufgabe 3 Leiten Sie mit Hilfe der Faktorregel und der Summenregel ab.

a) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$; $f'(x) = \dots\dots\dots$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0,6x^2 - x$; $f'(x) = \dots\dots\dots$