

## Arbeitsblatt 14: Die Ableitung eines Produktes von Funktionen

**Ziel:** Es soll eine Regel für die Ableitung eines Produktes  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  gefunden werden, falls die Ableitungen von  $g$  und  $h$  bekannt sind.

**Aufgabe 1** Bei einer Summe  $f = g + h$  von Funktionen gilt:  $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ . Eine entsprechende einfache Ableitungsregel für ein Produkt  $f = g \cdot h$  gilt nicht, das heißt im Allgemeinen gilt:  $f'(x) \neq g'(x) \cdot h'(x)$ . Zum Nachweis dieses „Nichtgeltens“ dieser Regel genügt ein Gegenbeispiel:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5.$$

- a) Berechnen Sie die richtige Ableitung von  $f(x) = x^5$ . Ergebnis:  $f'(x) = \dots\dots\dots$   
 b) Berechnen Sie die Ableitungen von  $g$  und  $h$  getrennt und multiplizieren Sie sie anschließend. Ergebnis:  $g'(x) = \dots\dots$ ;  $h'(x) = \dots\dots$ ; also  $g'(x) \cdot h'(x) = \dots\dots$

**Aufgabe 2** Es soll eine Regel zur Ableitung eines Produktes  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  gefunden werden. Dabei wird untersucht, ob sich  $f'$  als Kombination von  $g'$ ,  $h'$ ,  $g$  oder  $h$  schreiben lässt. Füllen Sie die Tabelle aus. (In der rechten Spalte darf man ein wenig knobeln.)

g	h	f = g·h	Richtige Abl. f'		g'	h'	Ist f' eine Kombination von g, h, g', h' ?
x	3x	3x <sup>2</sup>	<u>6x</u>		1	3	<u>6x</u> = 6g(x) oder 2h(x) oder g(x)h'(x)+h(x)g'(x) oder 1/2 g'h'(g+h) oder hh'-3gg'
x	x <sup>2</sup>	x <sup>3</sup>	<u>3x<sup>2</sup></u>		1	2x	<u>3x<sup>2</sup></u> =
x <sup>2</sup>	x <sup>3</sup>	x <sup>5</sup>					
x <sup>2</sup>	x <sup>5</sup>	x <sup>7</sup>					

Vermutung: Die Ableitung von  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  ist  $f'(x) = \dots\dots\dots$

**Aufgabe 3** Herleitung und Nachweis der Vermutung aus Aufgabe 2.

Kurzform eines Beweises zur Ableitung eines Produktes ( $g \cdot h$ ) von Funktionen:

Binomische Formel:  $(g + h)^2 = g^2 + 2g \cdot h + h^2$

Beide Seiten ableiten:

(1)  $2(g+h) \cdot (g+h)' = 2g \cdot g' + 2(g \cdot h)' + 2h \cdot h'$

(2)  $(g + h) \cdot (g' + h') = g \cdot g' + (g \cdot h)' + h \cdot h'$

(3)  $g \cdot g' + g \cdot h' + h \cdot g' + h \cdot h' = g \cdot g' + (g \cdot h)' + h \cdot h'$

(4)  $g \cdot h' + h \cdot g' = (g \cdot h)'$

Erläutern Sie

- warum in Zeile (1) auf der linken Seite der Term  $(g+h)'$  und auf der rechten Seite die Terme  $g'$  und  $h'$  stehen.
- warum in Zeile (1) nur die mit Pfeilen gekennzeichneten Funktionen abgeleitet werden, aber das Produkt  $(g \cdot h)$  nur mit dem Ableitungszeichen versehen wird.
- welche Umformung von Zeile 1 nach Zeile 2 durchgeführt wurde.
- nach welcher Rechenregel von Zeile (2) nach Zeile (3) die linke Seite umgeformt wurde.
- das Ergebnis in Zeile (4) in Worten.