Aufgaben zum Lernen
Aufgaben zur Leistungsbeurteilung

H. Buck, 2010

Stand: 1. 10. 2010

Inhaltsübersicht

Teil 1: Überblick

1. Verortung des Moduls

a) Derzeitiger Informationsstand der Kolleginnen und Kollegen vor Ort
Der Bildungsplan BW liegt vor, die ZPG-Fortbildungen zur Sekundarstufe 1 zum „Kompetenzorientierten Unterricht“ sind erfolgt, der „Abituraufgabensatz 2013“ wurde in den Arbeitskreisen vorgestellt und das Landesinstitut hat zwei Umsetzungsbeispiele für „Kerncurricula zur Kursstufe“ veröffentlicht.

b) Fortbildung für den Kursstufenunterricht
Unter Berücksichtigung dieser Informationen sind in der Kursstufe inhaltliche, didaktische und methodische Fragestellungen zu beleuchten (vgl. Programm der Fortbildung).
Das vorliegende Modul konzentriert sich auf das Thema **Aufgaben** im Kursstufenunterricht. Aufgaben steuern sowohl den Verlauf des Unterrichts als auch die Prüfungs- und Diagnosesituationen.
Dabei ist zu bedenken, dass verschiedene Einführungs-, Übungs- und Testsituationen verschiedene Aufgabentypen erfordern. Hierbei unterscheide ich noch einmal zwischen Aufgaben zur Sicherung von **Grundwissen** und Aufgaben zur **Entwicklung und Überprüfung mathematischer Kompetenzen**. Vielfältiges Aufgabenmaterial zur Sicherung von Grundwissen steht im Rahmen dieser Fortbildung im Beitrag „WADI“ zur Verfügung.
Im Zentrum des vorliegenden Beitrags stehen Aufgaben zur Entwicklung bzw. Überprüfung mathematischer Kompetenzen in Übungs- und Testsituationen, also Aufgaben, die **Verständnis entwickeln bzw. einfordern.** Es handelt sich dabei bewusst um eher **kleine Aufgabenstellungen**, die man immer wieder in den laufenden Unterricht einbauen kann. Das vorliegende Modul soll dazu beitragen, vorhandenes Aufgabenmaterial (z. B. in Schulbüchern) kritisch zu sichten und zu bewerten. Eine umsichtige Unterrichtsgestaltung erfordert u.a. die sorgfältige Auswahl und Mischung von Aufgaben sowohl zur Sicherung von Grundwissen als auch zu Förderung und Entwicklung von mathematischem Verständnis.

2.Verständnis entwickeln bzw. überprüfen mithilfe von Aufgaben

Mathematisches Verständnis und mathematische Fähigkeiten zeigen sich erst im handelnden Umgang mit vorhandenem Wissen (vgl. dazu auch Prof. Klieme). Schülerinnen und Schüler müssen also durch entsprechende Aufgabenstellungen zum mathematischen Handeln angeregt bzw. aufgefordert werden.
Ein hilfreicher Ausgangspunkt zur Konstruktion solcher Aufgaben als auch zur Beurteilung bereits vorhandener Aufgaben (z. B in gängigen Schulbüchern) können dabei **Schülertätigkeiten** sein, wie “Begriffe erläutern”, ”Situationen und Vorgehensweisen beschreiben”, …die man explizit benennt und einfordert bzw. vorhandene Aufgaben dahingehend untersucht..
In diesem Beitrag wird exemplarisch aufgezeigt, welche Schülertätigkeiten sich aus der Beschreibung der überfachlichen Kompetenzbereiche des Bildungsplan BW ableiten lassen (siehe „Leitgedanken zum Kompetenzerwerb“, Bildungsplan Gymnasium, Baden Württemberg).
Bei dieser Art der Konstruktion bzw. Durchsicht von Aufgaben bemerkt man sehr schnell, dass man zur Bearbeitung verschiedene Tätigkeiten sinnvoll kombinieren muss und daher meist mehrere Kompetenzen erforderlich sind.

3. Konstruktion bzw. Beurteilung von Aufgaben mithilfe von Schülertätigkeiten
In der Fachliteratur findet man eine Vielfalt von Klassifikationen von Aufgaben, wie z. B. Aufgaben zum „Entdecken";„Erkunden", „Erfinden", „Modellieren", „Sammeln", „Sichern", „Systematisieren", „Üben", „Wiederholen", „Reflektierenden Üben", „Operativen Üben", „Intelligenten Üben", „Vernetzen", usw.
In diesem Beitrag wird versucht, direkt in Anlehnung an den Bildungsplan Kriterien zur Entwicklung von Aufgaben abzuleiten, die zur Förderung von Mathematikverständnis beitragen sollen.
Dabei stehen die zentralen Kompetenzen des Bildungsplans im Mittelpunkt. Aus ihnen lassen sich entsprechende Schülertätigkeiten ableiten (vgl. Abb.).

Prozessbezogene Kompetenzen	**Schülertätigkeiten**
„Kommunizieren" • Überlegungen darstellen • Mathematikspezifische Beschreibungen verwenden • Auf Einwände dialogisch eingehen, argumentieren...	• **Begriffe erläutern** • **Situationen und Vorgehensweise beschreiben, auch darstellen** • **Begründen**
„Begründen" • Strukturen erkennen, ... • Vermutungen entwickeln, ... • Begründungstypen kennen, ...	• **Systematisieren, Struktur beschreiben, verallgemeinern, spezialisieren** • **Begründen, argumentieren, widerlegen**
„Problemlösen" • Lösungen reflektieren, bewerten • Hilfsmittel nutzen • Probleme beschreiben • Problemlösetechniken, Heurismen kennen, anwenden, ...	• **Lösungen reflektieren/bewerten** • **Hilfsmittel nutzen** • **Heuristisch arbeiten**

Aus den übergeordneten Bereichen „Kommunizieren" „Begründen" und „Problemlösen", werden hier folgende Tätigkeiten ausgewählt (der Katalog lässt sich erweitern):

1. Begriffe erläutern
2. Situationen und Vorgehensweisen beschreiben, auch darstellen
3. Systematisieren, Struktur erkennen, verallgemeinern, spezialisieren
4. Begründen, argumentieren, widerlegen
5. Lösungen reflektieren/bewerten
6. Hilfsmittel nutzen
7. Heuristisch arbeiten

Zu jeder der genannten Schülertätigkeit werden im Teil 2 dieses Beitrags Aufgabenbeispiele angeführt.
Jede Aufgabe wird anschließend unter den folgenden Aspekten beleuchtet:

- Schülertätigkeit – Erwartete Kompetenzen
- Darstellung der Aufgabe – Erwartete Darstellung der Lösung
- Eignung für den Unterricht – Eignung für die Klausur

Bemerkung: Die prozessbezogenen Kompetenz „Lernen“ wird hier nicht explizit berücksichtigt, da er sich auf die Unterrichtsgestaltung bezieht.

4. Aufgaben zum Lernen – Aufgaben für die Klausur

Grundsätzlich kann jede Klausuraufgabe auch im Unterricht eingesetzt werden. Dies gilt aber nicht unbedingt umgekehrt.

Eine Aufgabe für den Unterricht kann z. B. in verschiedener Hinsicht offen formuliert sein. Manche Freiräume, die diese offenen Aufgaben zur Bearbeitung erfordern, wie z. B. offene Bearbeitungszeit, bewusst reduzierte Vorgaben oder Bearbeitung außerhalb des Klassenzimmers kann man in den üblichen Klausursituationen nicht umsetzen.

An Aufgaben zur Leistungsmessung werden besondere Anforderungen gestellt. Im Teil 3 dieses Beitrags werden Fragen formuliert, die zur Konstruktion von Klausuraufgaben hilfreich sein können.

5. Anbindung an den Aufgabensatz zum Abitur 2013

Zum Abschluss wird eine Verbindung zum Musteraufgabensatz Abitur 2013 Mathematik BW hergestellt. Dabei wird aufgezeigt, in welchen Aufgabenteilen des Mustersatzes Schülertätigkeiten eingefordert werden, die Mathematikverständnis im oben beschriebenen Sinne einfordern.

Teil 2: Ausgewählte Beispiele

1. Begriffe erläutern

1.1 Zusammenstellung wesentlicher Begriffe der Kursstufe

a) Analysis

Differenzenquotient, Änderungsrate, Gesamtänderung einer Größe, rekonstruierter Bestand, 1. Ableitung, 2. Ableitung, höhere Ableitungen, Ableitungsfunktion, Integral, Stammfunktion, Integralfunktion, Mittelwert, Rauminhalt, Amplitude, Periode, Grenzwert, Monotonie, Verkettung, Krümmungsverhalten, ...

b) Analytische Geometrie

Vektor, Skalarprodukt, Parametergleichung/Normalengleichung der Ebene, Winkel, Linearkombination, ...

c) Stochastik

Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte, stetige Verteilung, Erwartungswert, Ablehnungsbereich, Annahmebereich, normalverteilte Zufallsvariable, Fehler 1. Art, ...

1.2 Formulierung von Aufgaben

Wenn man das Begriffsverständnis überprüfen will, muss man zu **Tätigkeiten** auffordern, aus denen man entnehmen kann, ob der Begriff verstanden ist. Dies kann meist in Worten oder mithilfe von Skizzen geschehen. Die Kompetenz ist also an der Tätigkeit beobachtbar.

1.3 Mögliche Aufgabenstellungen

- Darstellungswechsel:
  Deuten Sie den Begriff geometrisch.
  Beschreiben Sie den Begriff in eigenen Worten.
  Erläutern Sie den Begriff unter Verwendung von Skizzen.
- Fehlvorstellungen:
  Vorgabe verschiedener Darstellungen: Welche Darstellung beschreibt den Begriff, welche nicht?
  Verbessern/ergänzen Sie so, dass der Begriff richtig beschrieben wird.
  Geben Sie jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel an.
- Deutung im Anwendungsbezug:
  Nennen Sie ein Anwendungsbeispiel im Zusammenhang mit … .
  Umkehrung: Deuten Sie das „Anwendungsbeispiel“ als … .

1.4 Beispiele

„Geschwindigkeit"
Die Abbildung zeigt die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs zum Zeitpunkt t.

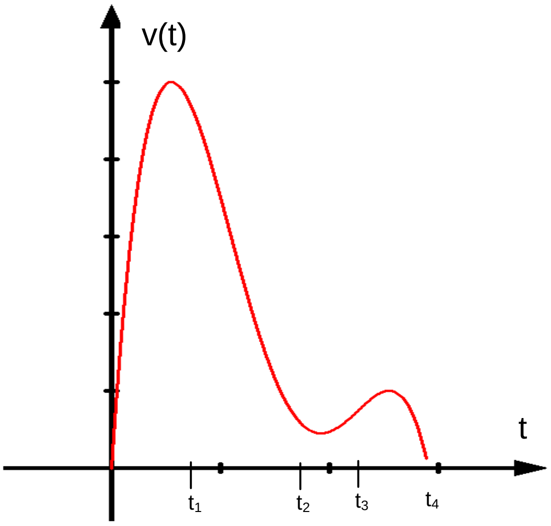
Welche Bedeutung hat

a) $\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(t_2+h)-v(t_2)}{h}$

c) $v'(t_3)$

d) $\int\limits_{t_3}^{t_4} v(t)dt$?



Analyse
Begriffe wie mittlere und momentane Änderungsrate bzw. die Bedeutung des Integrals sollen in einem Sachzusammenhang erläutert werden.
Die Aufgabe ist sowohl formal als auch bildlich vorgegeben. Eine verbale Antwort ist möglich. Sie kann mit entsprechenden Eintragungen in der Skizze ergänzt werden.
Man zeigt mit der Antwort, ob die genannten Begriffe verstanden sind. Die Beschreibung erfordert aber auch noch weitere Fähigkeiten, nämlich das Fassen des Sachverhalts in Worten und das Verständnis, wie formale Ausdrücke und die bildliche Darstellung zusammenpassen. Man muss also auch in der Lage sein, die Darstellungsform zu wechseln. Die Aufgabe fordert also mehr Kompetenzen ein, als man ursprünglich intendiert hat.
Da in der Aufgabe nicht gesagt ist, ob man die Bedeutung verbal und/oder bildlich darstellen soll, muss für die Klausur überlegt werden, ob beide Darstellungen verwendet werden sollen. Dies muss dann aber auch aus der Aufgabenstellung klar ersichtlich sein.
Eine mögliche Ergänzung der Aufgabenformulierung für die Klausur: „Erläutern Sie in Worten und mithilfe geeigneter Skizzen."

„Skalarprodukt"
Welcher der Terme beschreibt einen Vektor, welcher eine Zahl und welcher Term ist nicht definiert? Erläutern Sie.

a) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})$ b) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})$ c) $(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{c}+\vec{d})$ d) $(\vec{a}\cdot((\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{d})$

Analyse
Man soll zeigen, ob verstanden ist, dass das Skalarprodukt eine reelle Zahl ist. Dazu greift die Aufgabe typische Schülerfehler auf.
Die Aufgabe ist formal vorgegeben. Man kann in Worten oder formal antworten.
Man zeigt mit der Antwort, ob die Bedeutung des Skalarprodukts verstanden wurde.
Dazu muss man den Sachverhalt entweder verbal erläutern oder formal klären.
Die Aufgabe kann in dieser Formulierung auch in einer Klausur verwendet werden.

2. Situationen und Vorgehensweisen beschreiben / darstellen

2.1 Formulierung von Aufgaben

Das Beschreiben /Darstellen von Situationen/Vorgehensweisen kann auf verschiedenen Niveaus eingefordert werden. Entweder legt man Situationen / Verfahren bereits ausgeführt vor und fordert zur Beschreibung auf (vgl. dazu auch „Lösungen reflektieren“) oder das Verfahren muss zuerst entwickelt und dann beschrieben werden.
In beiden Fällen sind vielfältige Varianten möglich. Man kann exemplarisch an Beispielen arbeiten oder allgemein. Dabei kann sowohl die Aufgabenstellung als auch die eingeforderte Beschreibung verbal, bildlich oder formal erfolgen.
Die Überlegungen werden schriftlich dargestellt, dazu werden mathematikspezifische Beschreibungen verwendet.

2.2 Mögliche Aufgabenstellungen

- Darstellungswechsel:
  Formale Aussage über die Funktion: Welche Bedeutung hat die Aussage für den Graphen?
  Formal vorliegender Sachverhalt: Beschreiben Sie an einem selbstgewählten Beispiel/mithilfe einer Skizze.
  Graphische Darstellung eines Sachverhalts: Beschreiben Sie in Worten/ beschreiben Sie einen möglichen Rechenweg ohne Durchführung.
- Anwendungsbezug:
  Erläutern Sie die Eigenschaften in einem Sachzusammenhang / Anwendungsbezug.
  Geben Sie ein mögliches Anwendungsbeispiel an.
- Ortslinien / Ortskurven
  Eigenschaft /Situation ist vorgegeben: Wo liegen alle Punkte mit… ?

2.3 Beispiele

„Kehrwert“
Skizzieren Sie den Graphen von f mit $f(x) = (x-2)^2$.
Welche Zusammenhänge zum Graphen von g mit $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ lassen sich daraus erschließen? Beschreiben Sie in Worten und mithilfe einer Skizze.

„Gerade-Dreiecke“
Die Gerade g im Raum geht durch die Punkte P und Q.
Beschreiben Sie: Wo liegen alle Punkte, die mit P und Q ein gleichschenkliges Dreieck bilden?

Vergleich der beiden Beispiele
In beiden Fällen wird man vermutlich zunächst mithilfe einer Skizze bzw. mit Zahlenbeispielen die Sachlage erfassen und veranschaulichen. Im weiteren Verlauf muss man die charakteristischen Beschreibungen /Eigenschaften benennen und auf die gegebene Situation anwenden.
Die Aufgaben sind formal vorgegeben. Eine Antwort wird in verbaler Form eingefordert und muss / kann durch eine entsprechende Skizze ergänzt werden.
Beide Aufgaben können sowohl im Unterricht als auch in der Klausur verwendet werden.

3. Systematisieren

3.1 Formulierung von Aufgaben

Parameter in Funktionstermen, bei Koordinaten, Vektoren oder bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Anlass zum Systematisieren sein.
Die Durchführung von Fallunterscheidungen oder das Betrachten von Sonderfällen in allen drei Bereichen Analysis/Geometrie/Stochastik legen Aufgaben zum Systematisieren nahe.
Dabei fallen verschiedene Denk- und Arbeitsweisen auf:
→ Vom Allgemeinen zum Sonderfall/Spezialfall
→ Vom Allgemeinen zur Fallunterscheidung
→ Vom Beispiel zum Allgemeinen
Auch hier sind wieder verschiedene Darstellungsformen sowohl der Aufgabenstellung als auch der Darstellung der Lösung möglich.

Das Systematisieren, Erkennen von Strukturen, Verallgemeinern oder Spezialisieren steht im engen Zusammenhang mit dem heuristischem Arbeiten und Begründen. Es erfordert logisches Denkvermögen und ein Repertoire an Problemlösetechniken und –strategien.

3.2 Mögliche Aufgabenstellungen

- Vorgabe von vielfältigen Beispielen
  Welche gemeinsame Eigenschaften sind zu erkennen? Formulieren Sie in Worten / formal. Lassen sich die Beobachtungen verallgemeinern?
- Allgemeine formale Vorgabe:
  Untersuchen Sie verschiedene Sonderfälle (besondere Zahlen, besondere Lagen, besondere Figuren, besondere Wahrscheinlichkeiten, …).
  Führen Sie geeignete Fallunterscheidungen durch.

3.3 Beispiel

„Winkel zwischen Vektoren“

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie für verschiedene Werte von t den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}_t$.

Analyse
Man wird vermutlich die Winkel für verschiedene konkrete Werte von t berechnen. Umgekehrt könnte man überlegen, ob besondere Winkelweiten wie z. B. 0°, 90°, 180° möglich sind. Systematisches Einsetzen von verschiedenen t-Werten kann Vermutungen zu allgemeinen Aussagen nahelegen. Die allgemeine Berechnung und die sachadäquate Interpretation führen zur geometrischen Deutung.
Die Aufgabe erfordert also vor dem Systematisieren weitere Schülertätigkeiten, wie Spezialisieren bzw. Verallgemeinern und die damit verbundene Kompetenzen.
Die Aufgabe ist formal vorgegeben. Man wird die Lösung auch formal darstellen. Man zeigt mit der Antwort, ob man in der Lage ist, die Struktur zu erkennen.
Eine mögliche Ergänzung der Aufgabenformulierung für die Klausur:
„Berechnen Sie die Winkel für verschiedene Werte von t.
Überprüfen Sie, ob die Vektoren orthogonal sein können.“

4. Begründen, argumentieren, widerlegen

4.1 Formulierung von Aufgaben

Geeignete Aufgaben findet man, wenn man z. B. Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen beschreiben und rechnerisch nachweisen lässt für spezielle Funktionen oder ganze Funktionsklassen. Dies lässt sich in die Geometrie übertragen, wenn z. B. Geradenscharen oder Ebenenscharen vorliegen.
Es gibt mehrere wichtige Vorstufen des Beweisens, die man gut in den laufenden Unterricht integrieren kann. Dies sind zum einen vorgegebene Aussagen, die an Beispielen verifiziert oder bewiesen werden sollen oder Aussagen, die man durch Gegenbeispiele widerlegen kann. Zum anderen sind es Aufgaben, in denen vorgegebene Lösungswege reflektiert und begründet werden sollen (vgl. 5.).
Erst wenn die genannten Aufgabentypen häufig gelöst werden, kann man zum abstrakten Beweisen von mathematischen Sätzen übergehen. Daher wird in diesem Beitrag nur auf solche Aufgabenstellungen eingegangen.

Das Begründen-Beweisen steht im engen Zusammenhang mit dem heuristischem Arbeiten und dem Problemlösen.
Es erfordert anspruchsvolles logisches Denk- und Abstraktionsvermögen und ein Repertoire an Beweistechniken und –strategien.

4.2 Mögliche Aufgabenstellungen

- Behauptung in Worten oder graphisch vorgegeben**:** Formulieren Sie diese Behauptung algebraisch (als Term, als Gleichung, ...) und beweisen Sie diese anschließend**.**
- Für welche xxx gilt xxx? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Eigenschaft vorgegeben: Was lässt sich daraus schließen?
- Die Aussage ist falsch: Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel.
- Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie durch ein Gegenbeispiel oder belegen Sie anhand eines geeigneten Beispiels.
- Behauptung formal vorgeben: Zeigen Sie, dass …

4.3 Beispiel

„Falsche Aussage“
Folgende Aussage ist falsch: „Wenn $f'(x_0) < 0$, dann liegt der Punkt $P(x_0| f(x_0))$ des Graphen von f unterhalb der x-Achse.“
Begründen Sie mithilfe geeigneter Gegenbeispiele.

Analyse
Man muss den formalen Sachverhalt erfassen. Da es offen ist, wie die Lösung dargestellt werden soll, gibt es für die endgültige Begründung verschiedene Möglichkeiten. Entweder verfügt man über ein Repertoire an Graphen und deren Funktionsterme und widerlegt mithilfe geeigneter Terme. Oder man ist in der Lage, die Darstellungsform zu wechseln, geht von der formalen Beschreibung zur Grafik über und widerlegt mithilfe geeigneter Skizzen und zugehörigen Erläuterungen.
Die Aufgabe kann in dieser Form auch in der Klausur verwendet werden. Wenn man konkrete Funktionsterme als Lösung haben will, muss man die Formulierung abändern, z. B.: „Begründen Sie mithilfe geeigneter Gegenbeispiele. Geben Sie auch die zugehörigen Funktionsterme an.“

5. Lösungen reflektieren/bewerten

5.1 Formulierung von Aufgaben

Die Tätigkeit des „Reflektierens und Bewertens von Lösungen" hängt mit der Tätigkeit des „Begründens/Beweisens" zusammen. Sie ist als eine Vorstufe zum Beweisen zu sehen. Hierbei kann auf verschiedenen Niveaus eingestiegen werden. In der einfachen Variante wird eine vollständige Lösung vorgelegt. Man kann zum Strukturieren/Gliederen, zum Beschreiben in Worten, zur Darstellung der wesentlichen Lösungsschritte, zur bildlichen Veranschaulichung auffordern. In einer abgeänderten Variante wird eine angefangene Lösung vorgelegt, die fertiggestellt werden soll. Sind verschiedene Lösungswege zu einer Problemstellung aufgezeigt, so können die zentralen Ideen herausgearbeitet, verglichen und bewertet werden.

5.2 Mögliche Aufgabenstellungen

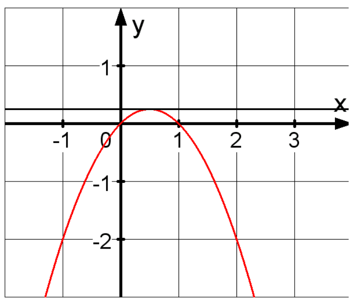
- Lösung liegt vor: Beschreiben Sie die Bedeutung der markierten Lösungsschritte (*) und das Ergebnis in Worten.
- Lösung liegt vor: Beschreiben Sie die zentrale Lösungsidee.
- Lösung liegt vor: Begründen Sie die markierten Schritte.
- Lösung liegt vor: Strukturieren Sie die Lösung.
- Allgemeine Lösung liegt vor: Welche Bedeutung hat das Ergebnis für die Sonderfälle … ?
- Verschiedene Lösungswege liegen vor: Vergleichen Sie die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten. Beschreiben Sie die jeweilige Lösungsidee in Worten. Bewerten Sie das jeweilige Vorgehen (z.B. im Hinblick auf Allgemeingültigkeit, Genauigkeit, Eleganz, Anschaulichkeit, …).
- Lösungsansatz liegt vor: Beschreiben Sie die fehlenden Schritte.
- Berechnung ist durchgeführt: Interpretieren Sie das Ergebnis (bildlich, verbal).

5.3 Beispiel

„e-Funktion –y-Achse"

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = te^x - t^2$, $x \in \mathrm{IR}, t \neq 0$.

Bestimmen Sie diejenigen Punkte der y-Achse, durch die kein Graph der Funktionenschar geht.



Lösung:

$f_t(0) = t - t^2$

Ergebnis: P(0|y) mit $y > \frac{1}{4}$.

Beschreiben Sie die Lösungsidee und das Ergebnis in Worten.

Analyse

Die Aufgabe ist sowohl formal als auch bildlich vorgegeben. Man soll die Lösungsidee in eigene Worte fassen und dabei die mathematische Fachsprache verwenden. Damit zeigt man, ob er die Lösungsidee verstanden hat. Die Beschreibung erfordert aber auch noch weitere Fähigkeiten, nämlich das Fassen des Sachverhalts in Worten und das Verständnis, wie formale Ausdrücke und die bildliche Darstellung zusammenpassen. Man muss also auch in der Lage sein, die Darstellungsform zu wechseln und im Kontext zu argumentieren.

Die Aufgabe kann sowohl im Unterricht als auch in der Klausur verwendet werden.

6. Hilfsmittel nutzen

Es geht im Wesentlichen um den sinnvollen Einsatz des GTR und die Nutzung von Formeln aus der Formelsammlung. In diesem Beitrag wird nur auf den 2. Aspekt eingegangen.

6.1 Formulierung von Aufgaben

Auf die bekannten Aufgaben zur systematischen Betrachtung von Graphen von Funktionenscharen zum Auffinden von gemeinsamen Eigenschaften derer Graphen wird hier nicht gesondert eingegangen (vgl. andere Veröffentlichungen, z. B. aus dem Landesinstitut). In diesem Zusammenhang ist auch an Aufgaben zu denken, die graphische GTR-Lösungen zur weiteren Interpretationen nutzen.
Im Zentrum dieses Beitrags stehen Aufgaben, bei denen Zusammenhänge, die in einer Formelsammlung dargestellt sind, zur Weiterarbeit verwendet werden sollen. Häufig muss zunächst gesichert werden, ob die Formel angewendet werden darf (Voraussetzung zur Nutzung verstehen). Anschließend soll sie sachgerecht eingesetzt werden.

6.2 Mögliche Aufgabenstellungen

In einer Formelsammlung findet man folgende Information:

- Welche Funktionen erfüllen die Voraussetzung … ?
- Deuten Sie die Sonderfälle …
- Berechnen Sie mithilfe der Formel …

6.3 Beispiel

Logarithmische Integration:

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}: \quad \int_a^b f(x)\,dx = [\ln(|g(x)|)]_a^b$$

„Logarithmische Integration“[1]
In einer Formelsammlung findet man folgende Information:

a) Gegeben sind die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{2x}{x^2+x},\ f_2(x) = \frac{e^x-4}{e^x-4x},\ f_3(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x}.$$

Welche Funktionen erfüllen die Voraussetzung $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$?

b) Geben Sie für die Funktion f mit $f(x) = \frac{4x^3}{x^4+1}$ die Funktion g an.

Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Mit der oben genannten Formel kann man auch $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx$ berechnen.

Beschreiben Sie, wie man dazu vorgehen muss.

Analyse
Die Aufgabe erfordert Textverständnis. Der Zusammenhang zwischen den Funktionen f und g muss hergestellt werden. Um die Formel anwenden zu können, muss ein vorgelegter Funktionsterm entsprechend analysiert werden. In Teil c) kann gezeigt werden, ob es gelingt, die Formel auf einen abgeänderten Funktionstyp zu erweitern.

[1] Quelle: Formelsammlung Mathematik, Gymnasium, Klett, Seite 74

7. Heuristisch arbeiten

Begriffsklärung

Kann man bei einer Fragestellung / in einer mathematischen Situation kein bekanntes, geübtes Lösungsverfahren anwenden, so spricht man vom mathematischen Problemlösen.

Dabei kann man unterscheiden:

- **Problemlösetechniken** (= „Werkzeugcharakter“), wie
  - Informationen aus Darstellungen (Text, Bild, Diagramm, Tabelle, ...) entnehmen,
  - Hilfsmittel, Informationsquellen (Formelsammlung, Taschenrechner, Computerprogramme, Internet, ...) nutzen,
  - verschiedene Darstellungsformen (verbale Beschreibung, Skizze, Tabelle, Term, Gleichung, ...) einsetzen und zwischen ihnen wechseln, aus ihnen Informationen entnehmen;
  - Hilfslinien einzeichnen, Variablen einführen;
  - Koordinatisieren
  - Zahlenbeispiele betrachten
- **Problemlösestrategien** (= „Planen des Vorgehens“), wie
  - systematisches Probieren
  - Mittel – Ziel – Analyse,
  - verschiedene Beispiele einer Problemstellung untersuchen,
  - Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten,
  - Analogien bilden, Rückführung auf Bekanntes;
  - Spezialfälle untersuchen und verallgemeinern;
  - Ausschlussverfahren einsetzen
- **Prüf- und Kontrollverfahren**, wie
  - Plausibilitätsüberlegungen,
  - Überschlagsrechnung,
  - Überprüfen auf mehrere Lösungen,
  - Vergleich verschiedener Lösungswege,
  - Lösungen an Beispielen überprüfen
  - Messen, Modell anfertigen, Spezialfälle überprüfen
  - Einordnen in bisheriges Wissen
  - In Teilprobleme zerlegen.

Ergänzungen

Problemlösen hängt eng mit Modellieren zusammen, wenn ein Modellierungsprozess nicht mithilfe eines Standardverfahrens gelingt.
Die prozessbezogenen Kompetenzen Kommunizieren und Argumentieren sind unverzichtbarer Bestandteil beim Lösen von Problemen.
Problemlösen ist eine mathematische Kompetenz, die bei allen inhaltsbezogenen Leitideen zum Tragen kommt.

Ziel des vorliegenden Beitrags

Problemlösen ist ein sehr weites Feld, das viel Arbeitszeit in Anspruch nehmen kann. Um Frustration beim Schüler während der Bearbeitung von Problemlöseaufgaben zu minimieren, ist es von großer Bedeutung, heuristisches Arbeiten, Bereitstellen und Thematisieren von Problemlösetechniken und –strategien immer wieder zum Unterrichtsgegenstand zu machen. Der Beitrag will dazu ermutigen, immer wieder Aufgaben in Übungsstunden einzusetzen, die dazu anregen, eine Fragestellung vielseitig zu beleuchten, mit „Bleistift und Schmierpapier“ zu arbeiten, Sonderfälle zu betrachten, Zahlenbeispiele durchzuführen, Schätzungen anzustellen, Koordinaten einzuführen, … um auf Lösungsideen zu kommen. Das heuristische Arbeiten wird in den Aufgaben angeleitet. Verzichtet man auf solche Hinweise, dann wird dieselbe Aufgabe zur Problemlöseaufgabe. dies ist nicht die Zielrichtung dieses Beitrags.

7.1 Formulierung von Aufgaben

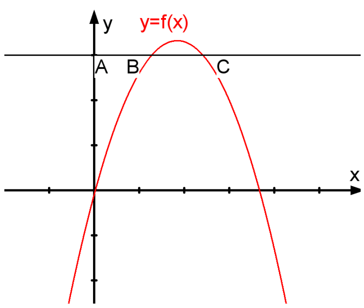
Die Formulierung der Aufgaben liegen meist in zwei Formulierungsvarianten vor. Zunächst ist die Fragestellung offen gehalten. In alternativen Formulierungen werden gewisse heuristische Techniken vorgeschlagen, die der Schüler im Laufe der Zeit selbstständig auswählen sollte.

7.2 Mögliche Aufgabenstellungen, die zu heuristischen Tätigkeiten auffordern

- Verschaffen Sie sich mithilfe des GTR einen Überblick über den Verlauf der Graphen. Wählen Sie dazu verschiedene Werte für den Parameter.
- Führen Sie die Rechnung zunächst mithilfe eines konkreten Funktionsterms durch.
- Führen Sie geeignete Koordinaten für die Punkte A, B und C ein.
- Führen Sie ein Koordinatensystem ein.
- Stellen Sie die Situation zunächst zeichnerisch mithilfe von Vektoren dar.
- Geben Sie Koordinaten von Punkten an. Betrachten Sie dabei auch Sonderfälle. Fertigen Sie eine Skizze an
- Nehmen Sie Stellung zu besonderen Werten von …
- Arbeiten Sie zunächst mit Zahlenbeispielen, verallgemeinern Sie anschließend.

7.3 Beispiel

„Mittelpunkt einer Strecke“
Gegeben ist die Funktion f und ihr Graph.
Eine Parallele zur x-Achse schneidet die y-Achse im Punkt A und den Graphen von f in den Punkten B und C, so dass B der Mittelpunkt der Strecke AC ist. Beschreiben Sie, wie man die Gleichung der Parallelen rechnerisch ermitteln kann.
Führen Sie dazu zunächst geeignete Koordinaten für die Punkte A, B und C ein.
(Vorschlag für eine alternative Anleitung:
Führen Sie die Rechnung zunächst mithilfe eines konkreten Funktionsterms durch, z. B. $f(x) = -x^2 + 4x$.)



Analyse
Die Aufgabe ist bildlich und verbal gegeben. Die Lösung soll in Worten formuliert werden. Ohne Anleitung erfordert sie ein hohes Maß an heuristischen Techniken bzw. Strategien. Aber auch mit Anleitung muss man das Vorgehen planen, geeignete Variable einführen, …
Für den Einsatz als Klausuraufgabe ist es sicher ratsam, einen Hinweis zu erteilen.

Teil 3:Vergleich von Aufgaben für den Unterricht – Aufgaben für die Klausur

1. Formulierung von Klausuraufgaben

Grundsätzlich kann jede Klausuraufgabe auch im Unterricht eingesetzt werden. Dies gilt aber nicht unbedingt umgekehrt.
Eine Aufgabe für den Unterricht kann in verschiedener Hinsicht offen formuliert sein. Sie kann ergebnisoffen sein, die Bearbeitungszeit oder die Bearbeitungsweise kann freigestellt sein, sie muss nicht vorstrukturiert sein, die Problemstellung kann weit formuliert sein, usw. Eine Aufgabe für den Unterricht kann zum Bauen von Modellen, zum Experimentieren, zur Datenerhebung im Umfeld oder im Internet, zum Darstellen von Szenen usw. anleiten. Sie sollte den methodisch-didaktische Kriterien für guten Unterricht genügen (vgl. Prof. Klieme, H. Mayer). Manche Freiräume, die diese Aufgaben erfordern, wie z. B. offene Bearbeitungszeit, bewusst reduzierte Vorgaben oder Bearbeitung außerhalb des Klassenzimmers kann man in den üblichen Klausursituationen nicht umsetzen.
An Aufgaben zur Leistungsmessung werden besondere Anforderungen gestellt. Folgende Fragen können hilfreich sein:

- Werden die wesentlichen **Inhalte und Kompetenzen** abgefragt (keine „Ecken auskehren“)?
- Ist der **Aufgabentext** verständlich und altersangemessen formuliert?
- Ist dem Schüler klar die **Bearbeitungsform** klar? Was muss/kann er wie bearbeiten? Sind ev. verschiedene äußere Formen zulässig(bildlich, verbal, formal)?
- Kann im Laufe der Klausur oder auch innerhalb einer Aufgabe auf verschiedenen **Niveaus** gearbeitet werden?

  Des weiteren ist zu prüfen:
- Wurden zu überprüfende Inhalte und Kompetenzen rechtzeitig **vor der Klausur** (schriftlich) festgelegt?
- Ist der **Umfang/Zeitrahmen** angemessen?
- ...

2. Aufgabenstellungen im Vergleich

Skalarprodukt – Offene Formulierung

> Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Es ist $|\vec{a}| = 3$ und $|\vec{b}| = 2$.
>
> In welchem Bereich liegen die Werte des Skalarprodukts $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

Analyse
Die **Bearbeitungsform** ist nicht festgelegt. Es sind verschiedene äußere Formen zulässig(bildlich, verbal, formal). Die Bearbeitung kann auf verschiedenen Niveaus erfolgen. Denkbar wäre, zunächst in der Ebene zu arbeiten. Dies kann bildlich; rechnerisch mit Zahlenbeispielen oder allgemein erfolgen. Es ist ebenso denkbar, dass zunächst, ausgehend von verschiedenen Winkeln, Sonderfälle betrachtet werden. Die Bearbeitung im Raum kann anschließend erfolgen.
Zur Bearbeitung sind verschiedene Kompetenzen erforderlich. Der Schüler muss den Begriff des Skalarprodukts verstehen, er muss im hohen Maße Problemlösestrategien einsetzen, Strukturen erkennen und im Kontext argumentieren.

Skalarprodukt – Geschlossene Formulierung

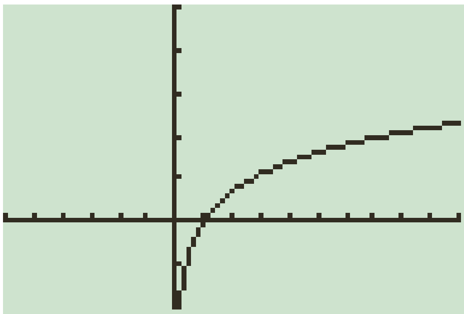
> Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Ebene.
>
> Es ist $|\vec{a}| = 3$ und $|\vec{b}| = 2$.
>
> a) In welchem Bereich liegen die Werte des Skalarprodukts $\vec{a} \cdot \vec{b}$?
> b) Nehmen Sie Stellung zu besonderen Werten des Skalarprodukts und die zugehörigen Lagen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
> c) Erörtern Sie die Fragestellungen aus a) und b), wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum liegen.

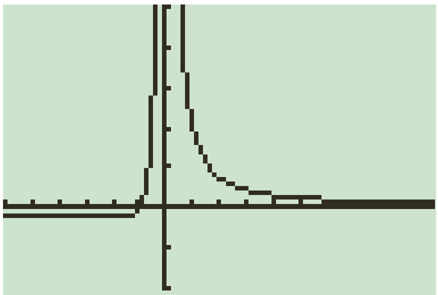
Analyse
Teil a): Das Bearbeitungsniveau und die Bearbeitungsform sind nun festgelegt. Zunächst soll in der Ebene formal gearbeitet werden.
Teil b): Das Bearbeitungsniveau ist festgelegt. Es sollen Sonderfälle betrachtet werden.

Verkettung – Offene Formulierung

Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g:

$y = g(x),\ x \in \mathbb{R}^+$ $\qquad$ $y = f(x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.





Mithilfe der beiden Funktionen lässt sich eine neue Funktion h definieren durch

$$h(x) = g(f(x)).$$

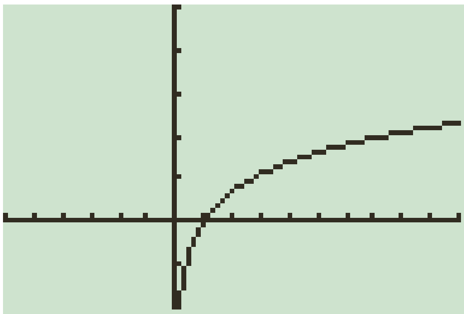
Welche Aussagen über den Verlauf des Graphen von h kann man machen?
Suchen Sie möglichst viele Eigenschaften von h. Beschreiben und begründen Sie.

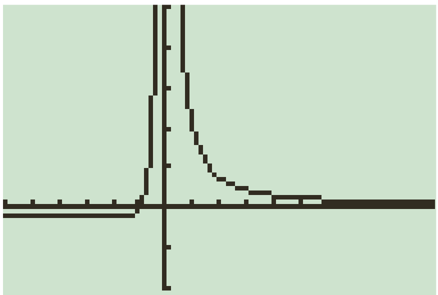
Die offene Aufgabe erfordert verstärkte Schüleraktivitäten im Bereich des heuristischen Arbeitens. Denkbar wären Aktivitäten wie Tabelle erstellen, Besonderheiten aufsuchen, zielgerichtetes Suchen nach Eigenschaften, Vergleich mit Bekanntem, Visualisieren, Experimentieren.
Zur Bearbeitung sind verschiedene Kompetenzen erforderlich, wie den Vorgang des Verkettens verstehen, Sachverhalte beschreiben, Darstellungsform wechseln, Begründen und Problemlösestrategien einsetzen.

Verkettung – Geschlossene Formulierung

Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g:

$y = g(x),\ x \in IR^+$ $\qquad$ $y = f(x),\ x \in IR \setminus \{0\}$.





Der Graph von g
geht durch M(1 | 0),
x = 0 ist Asymptote.

Der Graph von f
geht durch N(-1 | 0),
x = 0 und y = 0 sind Asymptoten.

Mithilfe der beiden Funktionen lässt sich eine neue Funktion h definieren durch

$$h(x) = g(f(x)).$$

a) Bestimmen Sie anhand der gegebenen Graphen die maximale Definitionsmenge von h.

b) Welche Aussagen über den Verlauf des Graphen von h kann man machen, wenn man die Asymptoten vom Graphen von f berücksichtigt? Beschreiben Sie in Worten.
Finden Sie eine weitere Eigenschafte von h.
Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von h.

Teil a), b): Das Bearbeitungsniveau und die Bearbeitungsform sind nun festgelegt. Zunächst soll die Definitionsmenge bestimmt und Aussagen über Asymptoten gemacht werden. Erst im Anschluss daran wird die Aufgabe geöffnet.
Teil c): Die Bearbeitungsform ist festgelegt.

Teil 4: Anbindung an den Musteraufgabensatz zum Abitur 2013

Der Pflichtteil besteht aus Aufgaben, deren Anforderungen inhaltsbezogen sind und Aufgaben, die übergeordnete Kompetenzen einfordern (vgl. Abbildung). Genannt werden Begriffsverständnis, Beschreiben, Begründen, Lösung reflektieren.
Die Aufgaben im Wahlteil enthalten Aufgabenteile zum Argumentieren, Begründen, Arbeiten mit unbekannter Formel und zum Problemlösen.

Aufgabenstellung
Formal

Aufgabe 9

Mit $V = \pi\int_2^3 (2x-4)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Rotationskörpers berechnet.
Skizzieren Sie den Sachverhalt.
Um welchen Körper handelt es sich?

Darstellung der Lösung
Bildlich, verbal

Schülertätigkeiten	**Kompetenzen**
•Begriff erläutern •Situation/Verfahren beschreiben/darstellen	•Begriff verstehen •Darstellungsform wechseln •Grundwissen nutzen

Aufgabe 9.4

Bei einem Fest möchte ein Besucher an einem Glücksrac
spielen. Bevor er spielt, stellt er folgende Rechnung auf:

Aufgabenstellung
Verbal, formal

$$x_1\, P(X= x_1) + x_2\, P(X= x_2) + x_3\, P(X= x_3)$$
$$= 1€\cdot\frac{1}{3} - 3€\cdot\frac{1}{2} + 4€\cdot\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}€.$$

a) Welche Informationen erhält er durch diese Rechnur

b) Wie könnte das verwendete Glücksrad aussehen
die Gewinnregel lauten? Beschreiben Sie möglichst
genau.

Darstellung der Lösung
Verbal, bildlich,

Schülertätigkeiten	**Kompetenzen**
•Begriffe erläutern •Situation/Verfahren beschreiben/darstellen	•Begriffe verstehen •Term situationsadäquat interpretieren •Modellieren

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich für die jahrelange, spannende und begeisterte Zusammenarbeit mit meinen Kollegen

Prof. Dieter Koller, Karlsruhe
Prof. Rolf Reimer, Karlsruhe,
StD Michael Fleig, Karlsruhe,
StD Wolfgang Staib, Rottweil,
Prof. Bernd Hatz, Eßlingen,
Prof. Rolf Dürr, Tübingen

bedanken, denen ich eine Menge von Anregungen zu verdanken habe, die u.a. auch in diesen Beitrag mit eingeflossen sind!