# (I) Wahrscheinlichkeitsrechnung Standards 8

**Umsetzungsbeispiel** nach K. Bracht

## 1. Subjektive Wahrscheinlichkeitsvorstellungen aufgreifen

- Welche Bedeutung bzw. Aussagekraft hat eine Wahrscheinlichkeitsaussage?
- Welche Absicht verfolgt sie?

**Ziel** ist eine erste Präzisierung:

- Wahrscheinlichkeitsaussagen dienen der Prognose.
- Wahrscheinlichkeitsaussagen beantworten die Frage:
  *In welchem Teil aller Fälle rechnen wir „langfristig“ mit dem Eintreten eines bestimmten Ereignisses?*

**Nimm Stellung!**

| |
|---|
| ***Tina sagt:***<br>**„ Die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln beträgt $\frac{1}{6}$.“**<br>• Wie kommt sie darauf und was meint sie damit?<br>• Was ist wahrscheinlicher: Eine gerade Zahl oder eine ungerade? |
| ***Der Arzt sagt:***<br>**„ Die Heilungschancen bei dieser Krankheit sind 99%.“**<br>• Woher will der Arzt das wissen? |
| ***Heiko sagt:***<br>**„ Ich habe 100 mal gewürfelt und<br>es ist kein einziges Mal eine 1 gefallen.“**<br>• Ist das möglich?<br>• Glaubst du das? |
| **• Welchen Sinn hat für dich eine Wahrscheinlichkeitsaussage?**<br>**• Welche Sicherheit gibt sie dir?** |

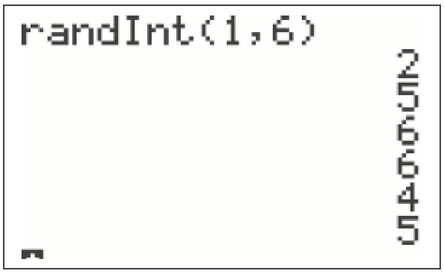
**2. Präzisierung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs: Würfelsimulation**
(Demonstration/ Partnerarbeit)

Dieser Befehl liefert (angeblich) eine Würfelzahl.


randint über MATH PRB

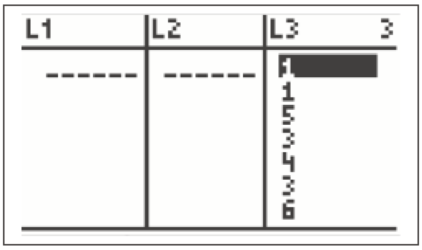
Weitere solche Zahlen erhält man, wenn man anschließend fortlaufend <Enter> drückt.

***Verhält sich der GTR jetzt wie ein richtiger Würfel?***

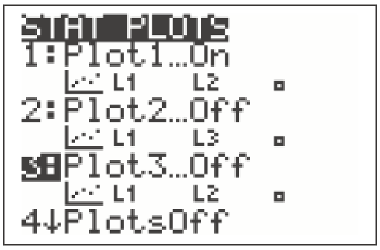


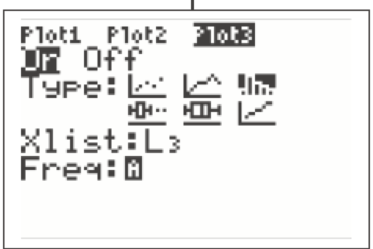

150 nacheinander ausgeloste Zahlen kann man auch in einer Liste sammeln

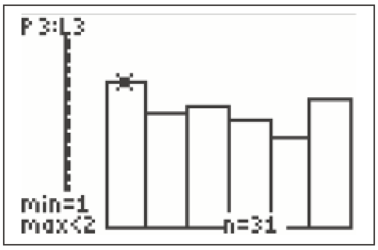

und dort anschauen:




Die Häufigkeiten der Ergebnisse erhält man in einem Häufigkeitsdiagramm




erst STAT PLOT aufrufen u. einstellen

GRAPH

**Ist dieses Ergebnis für einen Würfel typisch?**
**→ Erneut probieren: Was ändert sich?**
**→ Zum Vergleich: Mit einem richtigen Würfel in einer Gruppe würfeln.**
**→ Welche Wahrscheinlichkeit hat eigentlich die 6, welche die 4?**
**→ Was kann man mit dieser Information anfangen?**
**→ Welche Bedeutung hat eine Wahrscheinlichkeitsaussage für uns?**

## 3. Zufallsexperimente durchführen / Wahrscheinlichkeiten schätzen

**<u>Lernfeld</u> – *Spiele mit Zufallsgeräten – Ist Gewinnen nur Glücksache?***

Das Lernfeld beinhaltet **drei Phasen**

**A Die Forschungsphase**
(Nachdenken und Experimentieren zur Chancenermittlung)

**B Das Gewinnspiel (Spielstraße)**
(„Praktischer Ernstfall“: Entscheidungen treffen, spielen, gewinnen)

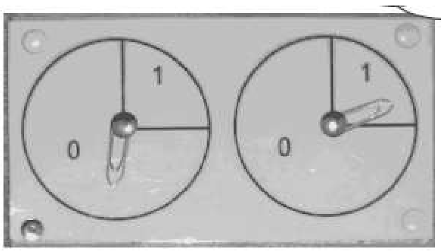
**C Die intensive Nachbesprechung**
(Auswertung der Erfahrungen, begriffliche Präzisierung)

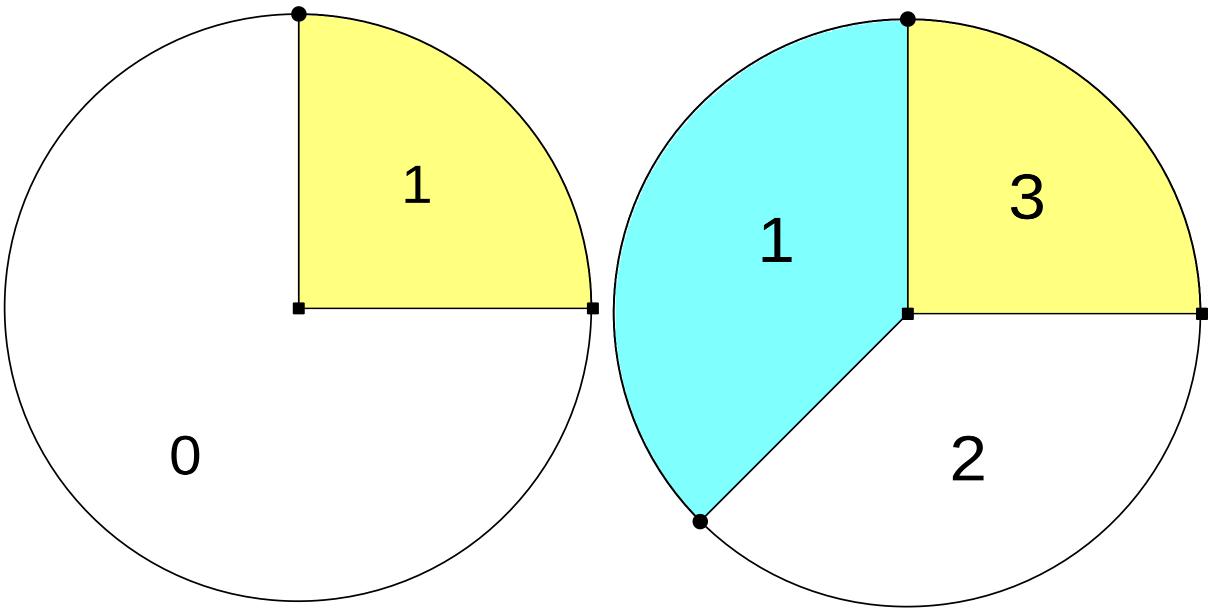
**Material** für jede Gruppe

- 2 Würfel, 2 Münzen, 2 Glücksräder ,ein Lego -Vierer
- Prognoseblatt (für die Erforschung der Zufallsexperimente)
- Spielstraßenprotokoll (für den anschließenden Spielwettbewerb)

Bauanleitung Glücksräder:

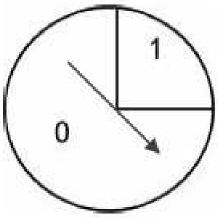
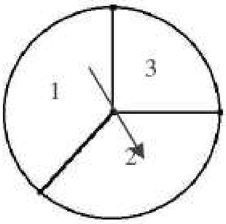
- Reißnagel
- Büroklammer
- Brettchen



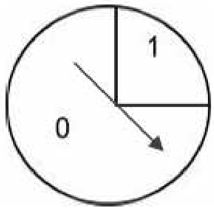
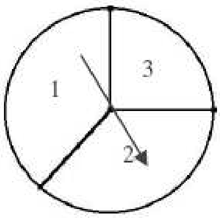
**Phase A - <u>Chancenanalyse</u>** durch Überlegen und Probieren (in Gruppen)

## In welchem Teil aller Fälle rechnet man mit den Ereignissen A, B und C?

<table>
<tr><td>S1</td><td></td><td>Es wird einmal gewürfelt.<br><br>A: Es fällt eine 6<br><br>B: Es fällt die 2 oder die 3<br><br>C Es fällt eine gerade Zahl</td><td><table><tr><td>Ereignis</td><td>Erwarteter Anteil (Bruchzahl)</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>S2</td><td>
</td><td>Der Pfeil dieses Glücksrads wird gedreht.<br><br>A: Der Pfeil steht auf 1<br><br>B: Der Pfeil steht auf 0</td><td><table><tr><td>Ereignis</td><td>Erwarteter Anteil (Bruchzahl)</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>S3</td><td>
</td><td>Der Pfeil wird gedreht.<br><br>A: Der Pfeil steht auf 3<br><br>B: Der Pfeil steht auf 2<br><br>C: Der Pfeil steht auf 1</td><td><table><tr><td>Ereignis</td><td>Erwarteter Anteil (Bruchzahl)</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>S4</td><td></td><td>Zwei Münzen werden geworfen.<br><br>A Es fällt<br>einmal „Kopf“ und einmal „Zahl“<br><br>B Es kommt zweimal „Zahl“<br><br>C: Gleiches Bild bei beiden Münzen</td><td><table><tr><td>Ereignis</td><td>Erwarteter Anteil (Bruchzahl)</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>S5</td><td></td><td>Wir werfen 2 Würfel.<br><br>A: Die Augensumme beträgt 4<br><br>B: Die Augensumme beträgt<br>2 oder 12</td><td><table><tr><td>Ereignis</td><td>Erwarteter Anteil (Bruchzahl)</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>S6</td><td></td><td>Wir „würfeln“ mit dem Lego-Vierer.<br><br>A: Er fällt auf eine quadratische<br>Seite<br><br>B : Er fällt auf eine schmale Seite</td><td><table><tr><td>Ereignis</td><td>Erwarteter Anteil</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

**Phase B** – <u>Entscheidungen</u> treffen und 10 mal spielen (Spielstraßenprotokoll)

Aber Achtung: Die Punkteverteilung ist nicht immer fair! Denke erst mal ganz genau nach!

| | | | |
|---|---|---|---|
| S1 |  | Es wird einmal gewürfelt.<br>A: Es fällt eine 6 [ 3 Gewinnpunkte ]<br>B: Es fällt die 2 oder die 3 [ 2 Gewinnpunkte]<br>C Es fällt eine gerade Zahl [ 1 Gewinnpunkte ] | Gewähltes Ereignis \| Punkte für 10 Versuche |
| S2 |  | Der Pfeil dieses Glücksrads wird gedreht.<br>A: Der Pfeil steht auf 1 [2 Gewinnpunkte ]<br>B: Der Pfeil steht auf 0 [ 1 Gewinnpunkt ] | Gewähltes Ereignis \| Punkte für 10 Versuche |
| S3 |  | Der Pfeil wird gedreht.<br>A: Der Pfeil steht auf 3 [3 Gewinnpunkte ]<br>B: Der Pfeil steht auf 2 [ 2 Gewinnpunkt ]<br>B: Der Pfeil steht auf 1 [ 1 Gewinnpunkt ] | Gewähltes Ereignis \| Punkte für 10 Versuche |
| S4 |  | Zwei Münzen werden geworfen.<br>A Es fällt einmal „Kopf“ und einmal „Zahl“ [ 2 Gewinnpunkt ]<br>B Es kommt zweimal „Zahl“ [ 3 Gewinnpunkte ]<br>C: Beide Münzen fallen „gleich“ [ 2 Gewinnpunkte ] | Gewähltes Ereignis \| Punkte für 10 Versuche |
| S5 |  | Wir werfen 2 Würfel.<br>A: Die Augensumme beträgt 4 [ 2 Gewinnpunkte ]<br>B: Die Augensumme beträgt 2 oder 12 [2 Gewinnpunkte] | Gewähltes Ereignis \| Punkte für 10 Versuche |
| S6 |  | Wir „würfeln“ mit dem Lego-Vierer.<br>A: Er fällt auf eine quadratische Seite [ 2 Gewinnpunkte ]<br>B : Er fällt auf die schmale Seite [ 4 Gewinnpunkte ] | Gewähltes Ereignis \| Punkte für 10 Versuche |

**Phase C** - Nachbesprechung - fachsystematische Absicherung

**Für alle 6 Versuche:**

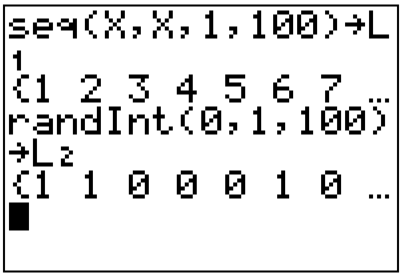
**Zusammenfassen und präzisieren**

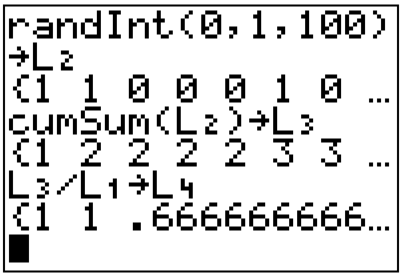
- Ergebnismengen aufschreiben
- Wahrscheinlichkeitstabellen anlegen
- Ereignisse notieren
- die Verfahren der Schüler zur Schätzung der Elementarwahrscheinlichkeiten diskutieren, begründen lassen.
  (Je nach Art des Zufallsexperiments kommen die Schüler auf
  - Laplace - Überlegungen
  - Idee des Ausprobierens - „Von der Erfahrung zur Prognose“ → Gesetz der großen Zahlen )
- Die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse notieren

**Verallgemeinern:**

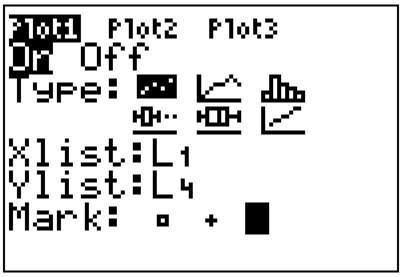
- Laplace - Wahrscheinlichkeiten
- Das Gesetz der großen Zahlen

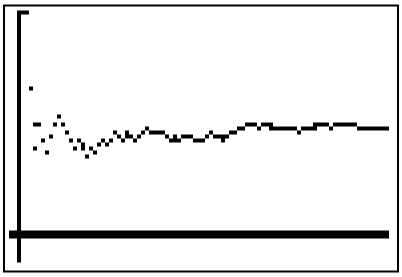
  **Beispiel**: Entwicklung der relativen Häufigkeiten beim 100-fachen Münzwurf




LIST → OPS →seq/cumSum



STAT PLOT → PLOT1

- Beim doppelten Münzwurf / Glücksrad S2 / … die Schätzwerte über beide Methoden vergleichen

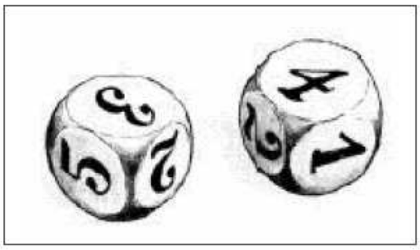
## 4. Üben, Vertiefen, Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Hat man Elementarwahrscheinlichkeiten festgelegt, kann man daraus die Wahrscheinlichkeiten für weitere Ereignisse berechnen.
Regeln dazu (in Klasse 7/8):

- **Summenregel**
- **Komplementärregel**
- **Pfadregeln**
-

### (1) Übungsbeispiel: Fair oder nicht fair?

a) Probiert das folgende Spiel mit 2 Würfeln so lange aus, bis ihr entscheiden könnt, ob es fair ist oder nicht:



- Spieler A gewinnt bei der Augensumme 2, 3, 4, 5, 6
- Spieler B gewinnt bei der Augensumme 7, 8, 9,10,11
- bei Augensumme 12 Unentschieden

Führt dabei eine Strichliste mit „Fünferbündelung“: ~~||||~~

| | Strichliste | Absolute Häufigkeit | Relative Häufigkeit |
|---|---|---|---|
| A gewinnt | | | |
| B gewinnt | | | |
| Unentschieden | | | |

b) Die Gewinnwahrscheinlichkeiten für Spieler A und B kann man auch durch eine Überlegung gut schätzen. Dabei kann diese Tabelle helfen. Aber wie?

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

| Augen-summe | Wahrschein-lichkeit |
|---|---|
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 11 | |
| 12 | |

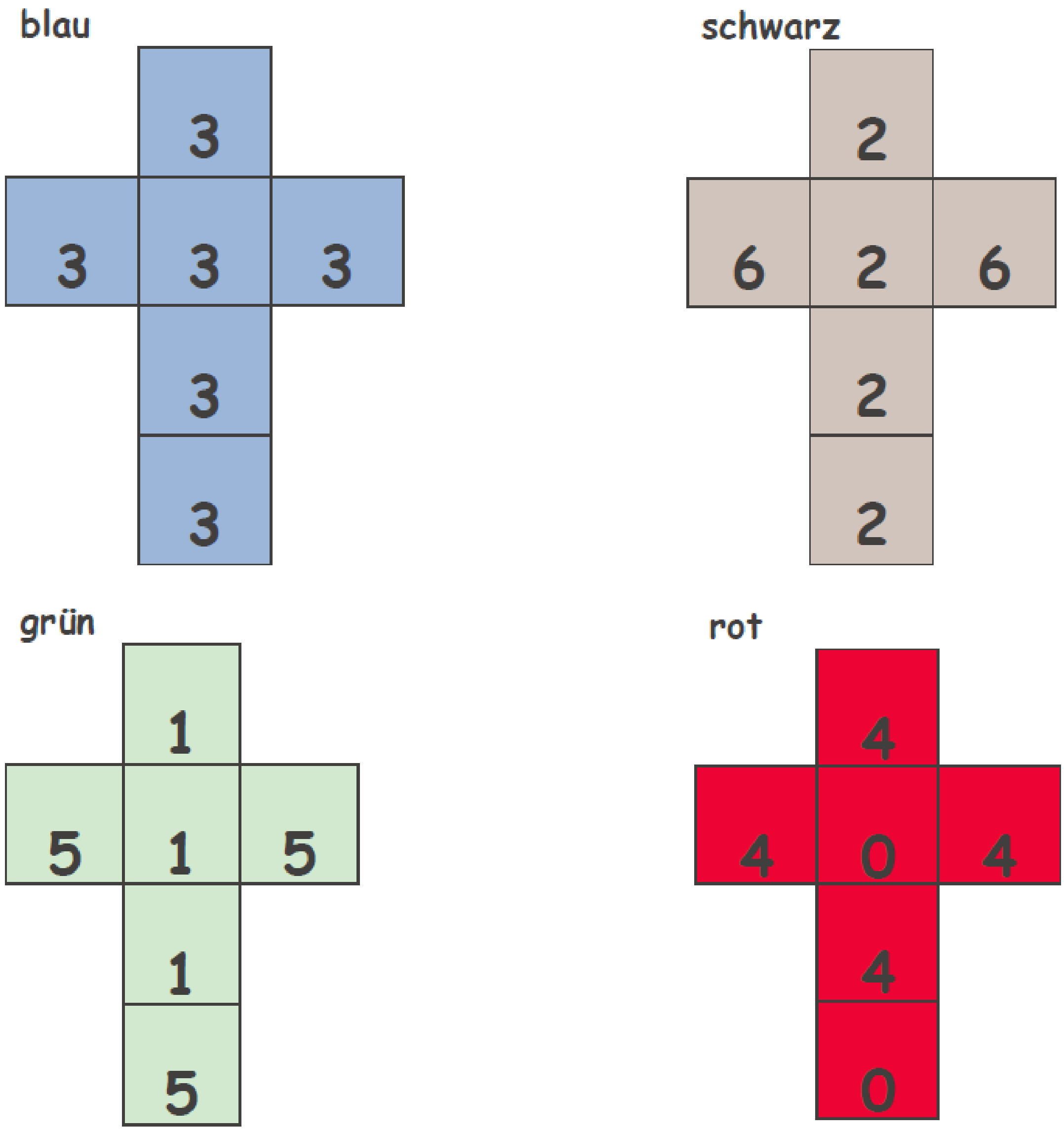
<u>Ergebnis</u>: A gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $\boxed{\text{—}}$ , B mit Wahrscheinlichkeit $\boxed{\text{—}}$

c) Kann man die Augensummen auch fair auf drei Spieler A, B und C verteilen?

| | Gewinnereignis | Wahrscheinlichkeit dafür: |
|---|---|---|
| A gewinnt bei | | |
| B gewinnt bei | | |
| C gewinnt bei | | |

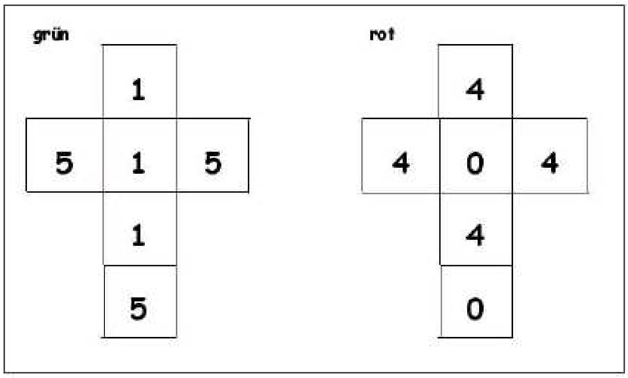
(2) Problemorientierter Einstieg - Pfadregel

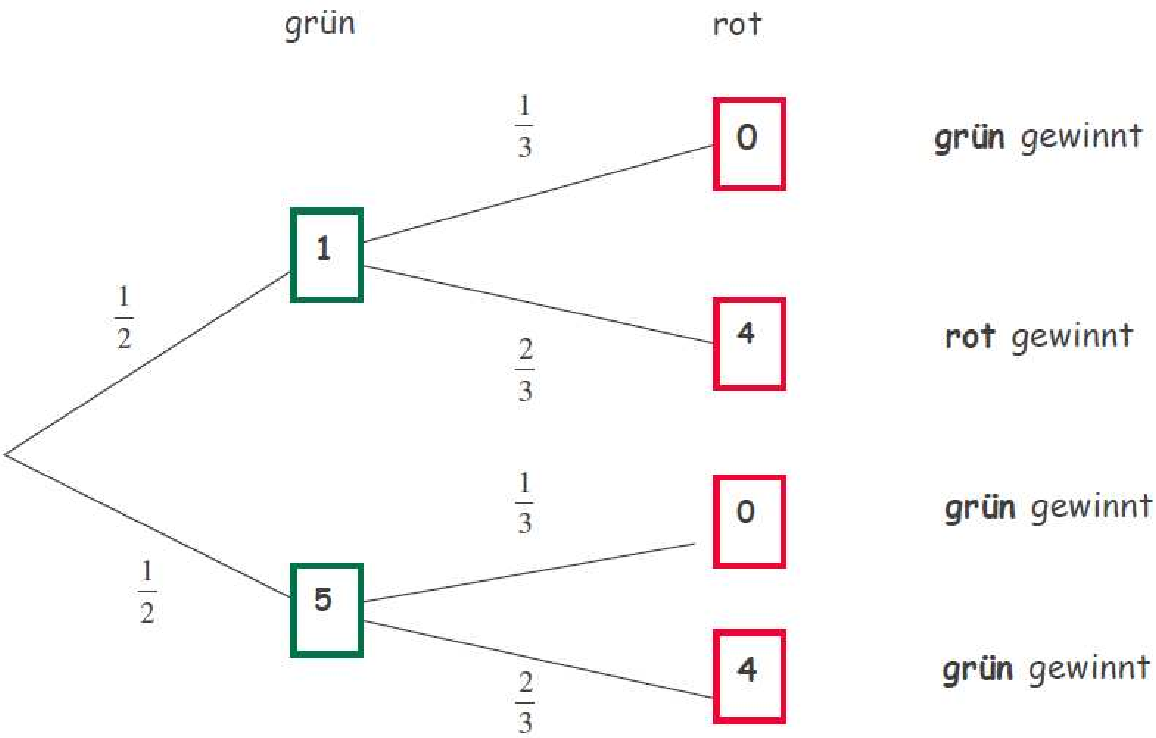
*Auf dem Tisch liegen 4 Würfel mit den abgebildeten Netzen (Efron-Würfel).*
*Schüler spielen gegen den Lehrer, es geht um die größere Augenzahl..*
*Die Schüler wählen ihren Würfel zuerst, dann der Lehrer seinen.*
*Ergebnis:* ***Der Lehrer gewinnt auf <u>lange Sicht</u> immer!*** *Warum?*




Internetspiel: http://www.hfak.de/dozenten/breitenstein/Zufall/efron.html

**Mathematische Darstellung und Herleitung der Pfadregel am Beispiel „grün gegen rot“**




- **Häufigkeitsüberlegung**: Was erwartet man bei 3000, 6000, … Versuchen?
- Daraus Ermittlung der zu erwartenden relativen Häufigkeiten.
- Erkennen der Pfadregeln:

$$P(\text{grün gewinnt}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Ein weiteres sehr schönes Beispiel ist das **Ziegenproblem**. Man findet ein ansprechende Simulation und Analyse hier:
http://users.minet.uni-jena.de/~hrehlich/Ziegenproblem/Ziege.HTM

# (II) Ausgewählte Aufgaben aus 9/10

## 1. Kurze Auffrischung der Grundlagen

Die **Ergebnismenge** eines Zufallsexperiments sei $S = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$.

Eine Teilmenge $A \subset S$ heißt **Ereignis**.

Die **Wahrscheinlichkeit** für $A = \{e_1; ... e_k\}$ ist $P(A) = P(e_1) + ... + P(e_k)$

Für zwei Ereignisse A und B gilt der **Additionssatz**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Zwei Ereignisse A und B sind **unabhängig** g.d. wenn gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Eine **Zufallsvariable** X ist eine Abbildung von S in $\mathbb{R}$. Mit $X = k$ wird das Ereignis bezeichnet, das aus allen Ergebnissen besteht, die auf k abgebildet werden.

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ werden bei einer (diskreten) Verteilung X in einer Tabelle zusammengefasst, die man **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X nennt.

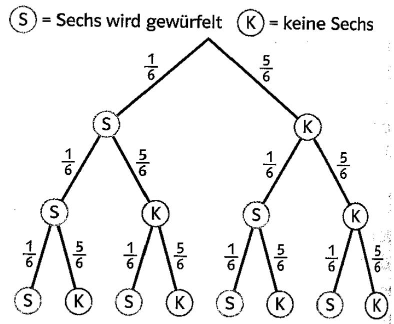
Der **Erwartungswert** einer Zufallsvariablen

$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + .... + x_n \cdot P(X = x_n)$

gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Versuchs für die Zufallsvariable zu erwarten ist.

Ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat, nennt man ein **Bernoulli-Experiment** (Z.B. Werfen einer Münze W –Z oder **Treffer** – **kein Treffer**). Wird ein Bernoulli-Experiment n mal unabhängig wiederholt, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge n.

**Beispiel**:
Dreimal Würfeln. Einsatz 1€.
Gewinn für jede 6 ist 1 €.
X beschreibt Gewinn.




Z.B. $X = 0$ ist das Ereignis $\{KKS; KSK; SKK\}$.

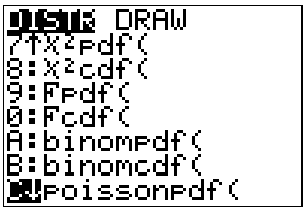
Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| k | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

Erwartungswert:
$E(X) = (-1) \cdot \frac{125}{216} + 0 \cdot \frac{75}{216} + 1 \cdot \frac{15}{216} + 2 \cdot \frac{1}{216} = -0{,}5$

Ist bei einer Bernoullikette p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so ist die **Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer** bei n Wiederholungen des Bernoulli-Experiments: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. (TI 84: **binompdf**( )

Die Zufallsvariable X heißt dann **binomialverteilt** mit den Parametern n und p.




der **Erwartungswert** einer binomialverteilten Zufallsvariablen ist: $E(X) = \mu = n \cdot p$

Durch $k \mapsto P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$ ist die zugehörige **Verteilungsfunktion** (kumulierte Binomialverteilung) gegeben. (TI 84: **binomcdf**( )

## (II) Ausgewählte Aufgaben zu 9/10

**Aufgabe 1**

In einem Gefäß $U_1$ sind 10 blaue Kugeln und in einem weiteren Gefäß $U_2$ sind 20 rote Kugeln. Gerlinde darf zunächst eines der beiden Gefäße wählen und daraus eine Kugel ziehen. Ist die Kugel rot, dann hat sie einen Preis gewonnen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Preis gewinnt?

Gerlinde hat 50 weitere rote Kugeln. Sie darf bestimmen, wie viele davon zusätzlich in $U_1$ gelegt werden. Allerdings werden dann genauso viele blaue Kugeln zusätzlich in $U_2$ gelegt.

b) Gerlinde wählt 5 zusätzliche rote Kugeln. Hat sich dadurch ihre Gewinnwahrscheinlichkeit verbessert?

c) Wie viele zusätzliche rote Kugeln hätte Gerlinde wählen müssen, um ihre Gewinnchancen zu maximieren?

---

a) Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn: $\frac{1}{2}$

b) Wahrscheinlichkeit aus $U_1$ eine rote Kugel zu ziehen: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Wahrscheinlichkeit aus $U_2$ eine rote Kugel zu ziehen: $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{17}{30}$

$\frac{17}{30} > \frac{1}{2}$ , also hat sich die Gewinnwahrscheinlichkeit von Gerlinde verbessert.

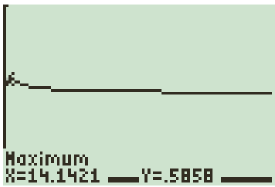
c) Gerlinde legt x $(x \leq 50)$ rote Kugeln in $U_1$ und x blaue Kugeln in $U_2$, damit ist

die Wahrscheinlichkeit aus $U_1$ eine rote Kugel zu ziehen $\frac{x}{10+x}$ ,

die Wahrscheinlichkeit aus $U_2$ eine rote Kugel zu ziehen $\frac{20}{20+x}$.

Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen beträgt damit:

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{10+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{20+x}$$




Das Maximum liegt bei $x \approx 14{,}1421$ , mit
$P(14) \approx 0{,}58578431$ und $P(15) \approx 0{,}57571429$
(GTR).
Gerlinde erreicht mit 14 zusätzlichen Kugeln die beste Gewinnaussicht.
Dem Graph ist zu entnehmen, dass es für $x \leq 50$ keine weiteren Maxima gibt.

---

**Aufgabe 2**

Eine Klasse will für einen guten Zweck beim Schulfest ein Glücksrad betreiben. Dieses besteht aus drei Sektoren mit den folgenden Mittelpunktswinkeln:
rot: 180°, gelb: 90° und blau: 90°.
Bei einem Spiel dreht der Kunde das Glücksrad dreimal und bezahlt dafür einen Euro. Er erhält zwei Euro, wenn er dreimal dieselbe Farbe erreicht, er bekommt seinen Einsatz zurück, wenn genau zweimal dieselbe Farbe angezeigt wird, in allen anderen Fällen wird sein Einsatz einbehalten.

Welchen Gewinn erzielt die Klasse mit diesem Glücksrad pro Spiel durchschnittlich?

Die Klasse will im nächsten Jahr durch eine Veränderung der Sektorengrößen die Wahrscheinlichkeit der Fälle, in denen der Einsatz einbehalten wird, erhöhen. Dabei sollen die Spielregeln erhalten bleiben und der rote Sektor soll weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe.
Für welche Mittelpunktswinkel der drei Sektoren ist die Wahrscheinlichkeit für den Einbehalt des Einsatzes am größten?

---

$P(r)=\frac{1}{2}$ ; $P(g)=P(b)=\frac{1}{4}$

$P(rrr)+P(ggg)+P(bbb)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{5}{32}$

P(„alle verschieden") = $6\cdot P(rgb)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{32}$

Erwartungswert für den Gewinn der Klasse: $E=-1\cdot\frac{5}{32}+1\cdot\frac{6}{32}=\frac{1}{32}$

Pro Spiel werden also durchschnittlich ca. 3 Cent Gewinn erreicht.

Setzt man die Wahrscheinlichkeit für den roten Sektor gleich x, dann ergibt sich:

$P(r)=x$ ; $P(g)=\frac{x}{2}$ ; $P(b)=1-P(r)-P(g)=1-\frac{3}{2}x$

Ereignis A: Einsatz wird einbehalten.

$P(A)=6\cdot x\cdot\frac{1}{2}x\cdot\left(1-\frac{3}{2}x\right)=3x^2-\frac{9}{2}x^3$

Maximale Wahrscheinlichkeit für A ergibt sich für $x=\frac{4}{9}$ (GTR).

Der Mittelpunktswinkel für den roten Sektor muss also $\frac{4}{9}\cdot 360°=160°$ betragen; der gelbe Sektor wird demzufolge 80° und der blaue Sektor 120° erhalten.

---

**Aufgabe 3**

Ein Basketballspieler hat bei Freiwürfen erfahrungsgemäß eine Trefferquote von 80%, d.h. er trifft durchschnittlich bei 80% seiner Würfe.

a) Er wirft 50mal. Die Zufallsvariable X zählt seine Treffer.
Begründen Sie, dass man X durch eine Binomialverteilung modellieren kann.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für $35\le X\le 45$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Spieler bei drei Freiwürfen mindestens zweimal?
Er möchte gern mit 95% Wahrscheinlichkeit bei drei Freiwürfen mindestens zweimal treffen. Auf welchen Wert muss er dann seine Trefferquote verbessern?

---

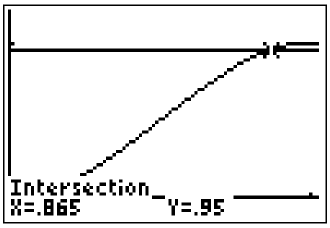
a) Die Zufallsvariable X ist $B_{50;0,8}$ – verteilt, da man davon ausgehen kann, dass alle Würfe voneinander unabhängig sind.

$P(35\le X\le 45)=P(X\le 45)-P(X\le 34)$
$\approx 0{,}951=95{,}1\%$

b) Die Zahl X der Treffer ist jetzt $B_{3;0,8}$ – verteilt.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0{,}104 = 0{,}896 = 89{,}6\%$$

$$[\ = 1 - 0{,}2^3 - 3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8\ ]$$

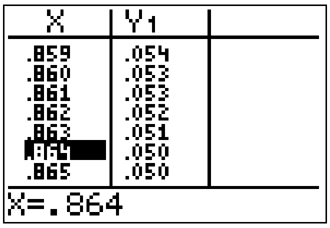



Es sei p die Trefferwahrscheinlichkeit.

$$P(X \geq 2) = 1 - (1-p)^3 - 3 \cdot (1-p)^2 \cdot p \geq 0{,}95$$

GTR liefert: $\underline{p \geq 86{,}5\%}$

(**Oder**: $P(X \leq 1) \leq 0{,}05$ und **Tabelle** von **Y1 = binomcdf(3,X,1)**




---

**Aufgabe 4**
Ein Computerhersteller bezieht von einem Lieferanten Speicherchips.
Erfahrungsgemäß sind 80 % der Chips einwandfrei.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 30 Chips mehr als 20 einwandfrei?
Die Chips werden in Viererpackungen geliefert.
Ab welcher Anzahl Viererpackungen muss mit mehr als 50 % Wahrscheinlichkeit damit gerechnet werden, dass in mindestens einer Packung alle Chips defekt sind?

b) Wie groß dürfte die Defektwahrscheinlichkeit eines Chips höchstens sein, damit unter 10 Chips mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit alle einwandfrei sind?

---

**Lösung**

a) X gebe die Anzahl der der einwandfreien Chips unter 30 Chips an. X ist $B_{30;0,8}$ – verteilt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 30 Chips mehr als 20 einwandfrei sind, ist:

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) \overset{\text{GTR}}{\approx} 1 - 0.061 = 0{,}939 = 93{,}9\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Viererpackung alle Chips defekt sind, beträgt:

$$0{,}2^4 = 0{,}0016.$$

Die Zufallsvariable Y beschreibe die Anzahl der Viererpackungen mit nur defekten Chips unter n Viererpackungen. Y ist $B_{n;0,0016}$ – verteilt.
Zu bestimmen ist n mit

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) > 0{,}5\ ;\ 1 - 0{,}9984^n > 0{,}5\ ;\ n > \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(9984)}\ ;\ n > 432{,}87$$

(Oder **GTR**: **Tabelle** von **Y1=binomcdf(X,0.0016,0)** )

Beträgt die Anzahl der Viererpackungen mindestens 433, so muss mit mehr als 50 % Wahrscheinlichkeit mit mindestens einer Viererpackung gerechnet werden, in der alle Chips defekt sind.

b) Es sei p die Defektwahrscheinlichkeit eines Chips. Die Anzahl Z der der defekten unter 10 Chips ist dann $B_{10;p}$ -verteilt.
Gesucht ist das maximale p mit

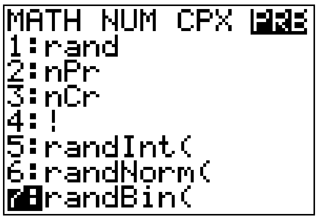
$P(Z=0)=p^0 \cdot (1-p)^{10} \geq 0{,}9$ ; $1-p \geq \sqrt[10]{0{,}9}$ ; $p \leq 1-\sqrt[10]{0{,}9} \approx 0{,}0105$ .

(Oder **GTR**: Tabelle von **Y1=binomcdf(10,X,0)** )

Die maximale Defektwahrscheinlichkeit dürfte höchstens etwa 1 % betragen.

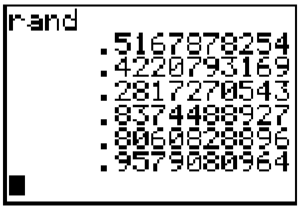
## (III) Anhang – die wichtigsten GTR – Befehle zur Stochastik

Im **MATH** – Menü des GTR:



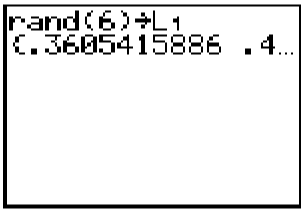

### (1) rand

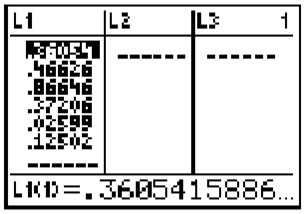
**rand**
und wiederholtes ENTER:
Zufallszahlen zwischen 0 und 1




**rand(6)** STO L1

6 Zufallszahlen zwischen 0 und 1 → L1



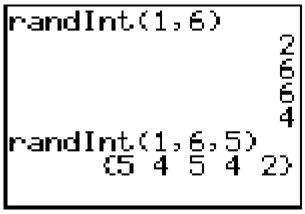

**rand < 1/3**
erzeugt eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 und vergleicht mit 1/3; ist die Zahl kleiner, ist das Ergebnis 1 (Vergleich „wahr“), andernfalls 0 .

**rand (6) < 1/3**
erzeugt 6 Zufallszahlen zwischen 0 und 1 und …..

### (2) randInt

**randInt(1,6)** **:** ganzzahlige Zufallszahlen zwischen 1 und 6

**randInt(1,6,5)** : 5 ganzzahlige Zufallszahlen zw. 1 und 6



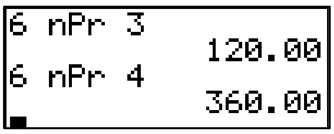

**randInt(1,6)<4**
Zufallszahl zw. 1 und 6 wird mit Ergebnis 1 sonst 0 .

**randInt(1,6,5)<4**
5 Zufallszahlen zw. 1 und 6 , wenn..

### (3) nPr

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

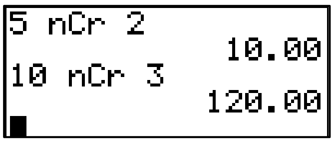
$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$




### (4) nCr

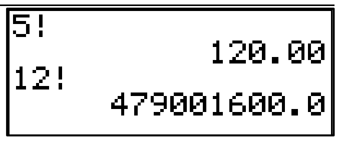
$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

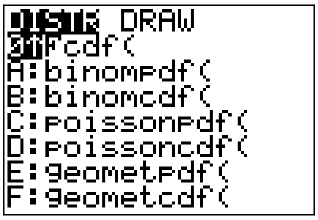



### (5) Fakultät !

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$12! = 12 \cdot 11 \cdot ... 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479001600$$

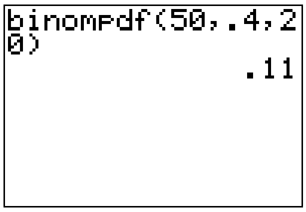


Im **DISTR** – Menü des GTR



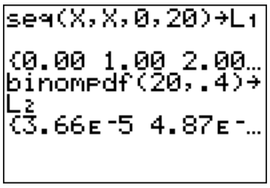

---

**(6) binompdf(**n,p,k)

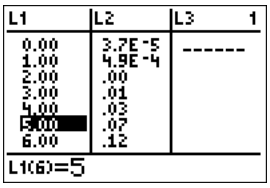



$$P(X=20)=\binom{50}{20}\cdot 0{,}4^{20}\cdot(1-0{,}4)^{30}\approx 0{,}11$$

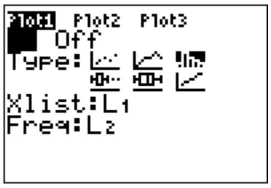
**Säulendiagramm** einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit n = 20 und p = 0,4 :



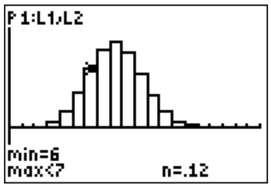

(LIST → POS → seq)




(STAT → EDIT)



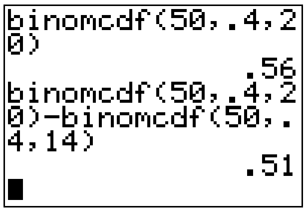

(STATPLOT → 1)




(GRAPH – TRACE)

---

**(7) binomcdf(**n,p,k)




$$P(X\le 20)=\sum_{i=0}^{20}\binom{50}{i}\cdot 0{,}4^{i}\cdot(1-0{,}4)^{50-i}\approx 0{,}56$$

$$P(15\le X\le 20)=P(X\le 20)-P(X\le 14)\approx 0{,}51$$

**Wertetabellen** der Verteilungsfunktion mit den Parametern n, p und k.
Neben der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ bei vorgegebenem n und p können Wertabellen auch benutzt werden, um bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ die folgenden Aufgabentypen zu behandeln:

a) n und p gegeben, k gesucht

b) p und k gegeben, n gesucht

c) n und k gegeben, p gesucht