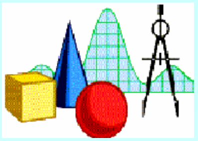
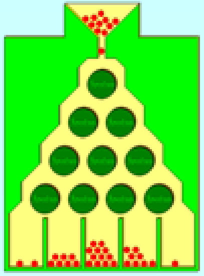
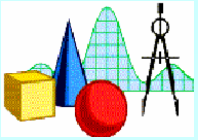


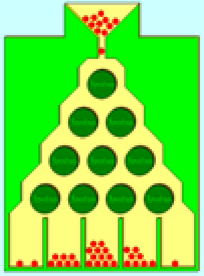
Stochastik in G8



- Stochastik wird ab 2013 abiturrelevant.
- Wichtige Grundlagen dafür werden schon in den Standards 10 gelegt.
- Welche Möglichkeiten bietet der GTR ?
- Was fordern die Standards?



Stochastik in G8



Zusammenstellung der Voraussetzungen:

- **Ereignisse** $A \cup B \quad A \cap B$
- **Additionssatz** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **Gegenereignis** $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- **Unabhängigkeit von Ereignissen** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- **Zufallsvariable, Erwartungswert**

$$X; \quad E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + ... + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Abituraufgaben (aus Klasse 7 bis 9)

Beispiele für Abituraufgaben, die bereits
in Klasse 7 bis 9 gelöst werden können:

(aus den Musteraufgaben für 2013)

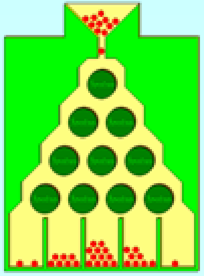
Beispiel 1

Beispiel 2

Beispiel 3

Beispiel 4

FB Binomialverteilung



Bernoulli – Experiment

Bernoullikette, Formel von Bernoulli

Binomialkoeffizienten

Möglichkeit A

Möglichkeit B

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}=B_{n;p}(k)$$

Binomialverteilung,
Erwartungswert

$$\mu=E(X)=n\cdot p$$

Praxis der Binomialverteilung

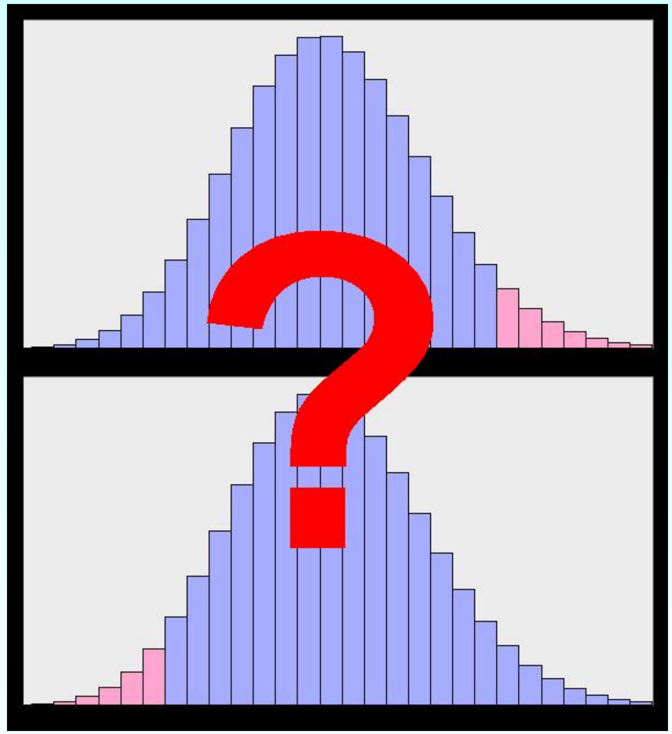
Abituraufgaben (aus Klasse 10)

Beispiele für Abituraufgaben zur Binomialverteilung),
die bereits
in Klasse 10 gelöst werden können:
(aus den Musteraufgaben für 2013)

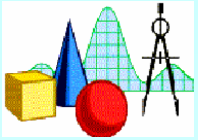
Beispiel 1

Beispiel 2

Testen

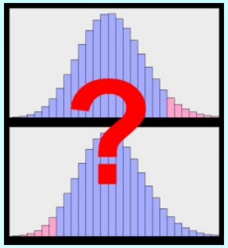


von Hypothesen



Testen von Hypothesen

- Geplanter Verlauf -



- Vorgaben durch den Bildungsplan
- Ein möglicher Einstieg und Grundprinzip des Testens
- Linkseitiger Test: Von der anschaulichen Argumentation zur formalen Argumentation
- Rechtsseitiger Test: Zusammengesetzte Nullhypothese
- Übungen
- Mögliche Fehler beim Testen
- Wahl der Nullhypothese
- Didaktische Anmerkungen.

Vorgaben durch die Bildungsstandards

- Inhalte der schriftlichen Abiturprüfung 2013 -

- Bildungsstandards 12, Leitidee „Daten und Zufall“
  - Kompetenzen: Hypothesen über Vorgänge, die vom Zufall abhängen, quantitativ beurteilen.
  - Inhalte: Ein Testverfahren
- Hinweise zur Umsetzung des Bildungsplans:
  - **Einseitiges Testen unter Verwendung der Binomialverteilung**,
  - **Fehler erster und zweiter Art**

- Inhalte der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik 2013
  - **Testen von Hypothesen (nur einseitig), nicht: Fehler 2. Art.**

Ein möglicher Einstieg

- Das Taxiproblem -

- Die Taxen in Frankfurt sind numeriert: 1; 2; 3; … .
- Nach Auskunft des Taxifahrers gibt es in Frankfurt 3000 Taxen.
- Danach beobachte ich 4 Taxen mit den Nummern 512; 987; 355; 1200.

Das Taxiproblem

Annahme: Der Taxifahrer hat recht.

Die Wahrscheinlichkeit, ein Taxi mit einer Nummer kleiner oder gleich 1200 anzutreffen, beträgt dann $\frac{1200}{3000}$.

Die Wahrscheinlichkeit, 4 solche Taxen anzutreffen, beträgt

$$\left(\frac{1200}{3000}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 2,56\% .$$

Entscheidung: Dieser Zahlenwert ist ein Indiz gegen die Annahme.
Ich lehne die Aussage des Taxifahrers ab.

Aber: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,6 % habe ich zufällig 4 Taxen mit einer Nummer kleiner oder gleich 1200 unter den 3000 erwischt.

Dann hat der Taxifahrer doch recht.

Meine **Irrtumswahrscheinlichkeit** beträgt 2,6 %.

Testen von Hypothesen

- Grundkonstruktion -

6. Die Aussage wird abgelehnt.

7. Irrtumswahrscheinlichkeit: 2,6 %.

1.
Aussage über die Grundgesamtheit:
*Die Anzahl der Taxen beträgt **3000**.*

2.
Stichprobe

3.
Stichprobenergebnis:
*Unter 4 Taxen besitzen alle eine Nummer **kleiner gleich 1200**.*

5.
Erwartet:
*Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt **nur 2,6 %**.*

4. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Das Taxiproblem

Testen von Hypothesen
- Grundkonstruktion -

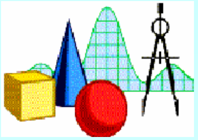
- Grundfrage beim Testen von Hypothesen:

  Ist das Stichprobenergebnis verträglich mit dem zu erwartenden Ergebnis oder weicht es signifikant ab ?

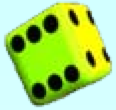
  – Aufgrund des Stichprobenergebnisses kann also eine Aussage über die Grundgesamtheit **als unwahrscheinlich abgelehnt** werden.

  – Es ist aber prinzipiell **nicht möglich:**
  Allein unter Verwendung eines Stichprobenergebnisses eine Aussage über die Grundgesamtheit zu **„beweisen“**,
  hierfür wäre z.B. eine Vollerhebung erforderlich.

  – Anmerkung: Der Begriff „Aussage“ wir hier nicht im Sinne der Logik, sondern als sprachliches Gebilde verwendet.



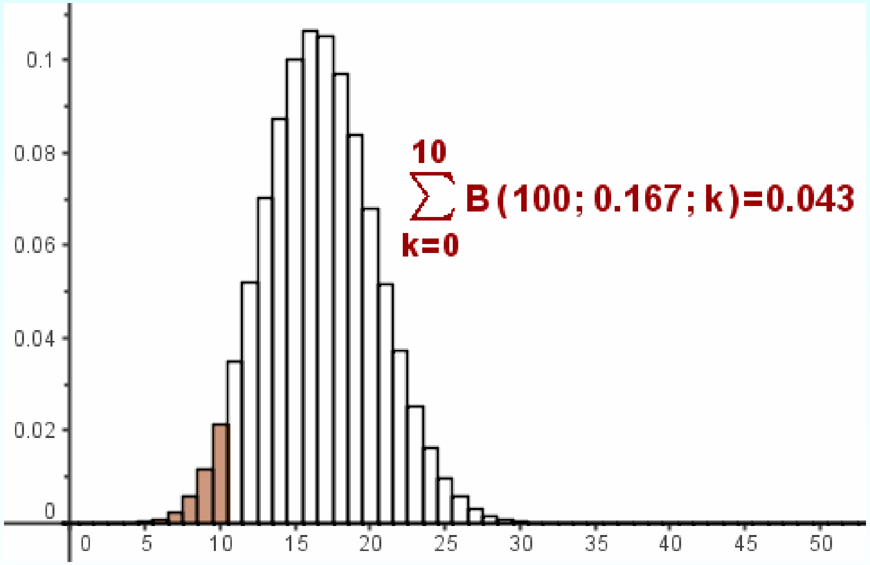
Linksseitiger Test
- Anhand der Binomialverteilung -



- Ein ehemaliger Mitarbeiter eines Casinos behauptet, die Würfel im Casino seien gefälscht, die Wahrscheinlichkeit für eine 6 sei geringer als 1/6.
- Der Kommissar überprüft daraufhin einen Würfel und erhält bei 100 Würfen 10 mal die 6.
- Kann er nun davon ausgehen, dass der Würfel gefälscht ist ?

Anschauliche Argumentation

- Es gilt die **Unschuldsvermutung**:
  - Dann ist die Anzahl der Sechsen $B_{100;1/6}$ –verteilt:



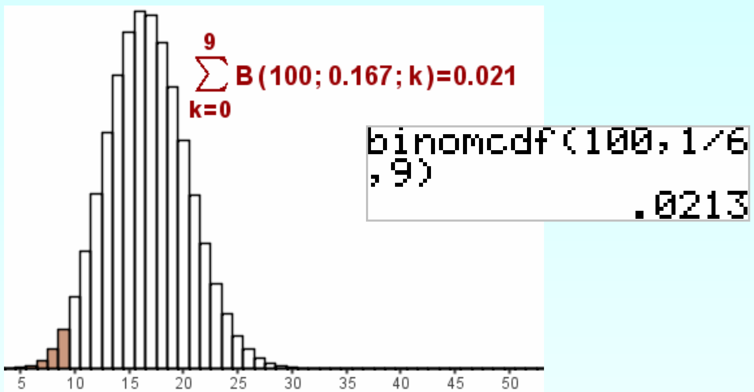
Java-Applet

  - Ein solches Würfelergebnis tritt also nur sehr selten auf.
- **Entscheidung**: Ich lehne die Unschuldsvermutung ab.
  - Eine Anzahl von 10 oder weniger Sechsen tritt nur in 4,3 % aller Fälle auf.
  - Die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung beträgt 4,3 %.
- Die Fälschung ist damit nicht nachgewiesen (, aber es wird weiterermittelt).

Der Kommissar: „Bin ich zu streng ?“

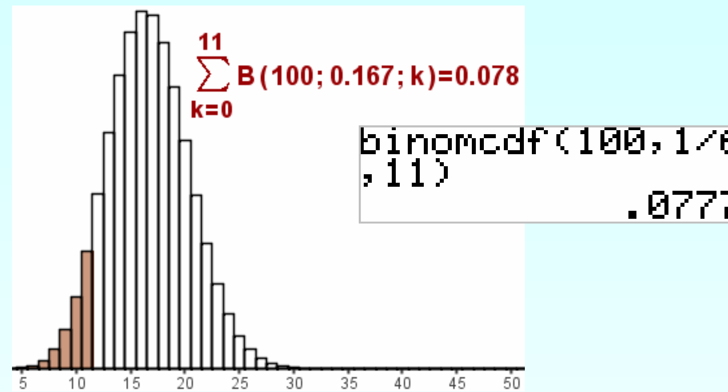
Gefordertes Stichprobenergebnis („kritischer Wert“):

- **9 oder weniger Sechsen**
  bei 100 Würfen (weniger streng)



  - Irrtumswahrscheinlichkeit: **2,1%**
  - Mehr Verdächtige entkommen.
  - Weniger Unschuldige geraten in Verdacht.

- **11 oder weniger Sechsen**
  bei 100 Würfen (strenger)



  - Irrtumswahrscheinlichkeit: **7,8%**
  - Mehr Unschuldige geraten in Verdacht.
  - Mehr Verdächtige werden erfasst.

Praxis: Obere Schranke für Irrtumswahrscheinlichkeit α wird vorgegeben !
Gebräuchliche Werte: **α = 1%** oder **α = 5 %** (**Signifikanzniveau**).

Formale Argumentation, linksseitiger Test

1. **Treffer bedeutet**: Es fällt eine 6.

   Vorgegebenes **Signifikanzniveau**: $\alpha = 5\%$.

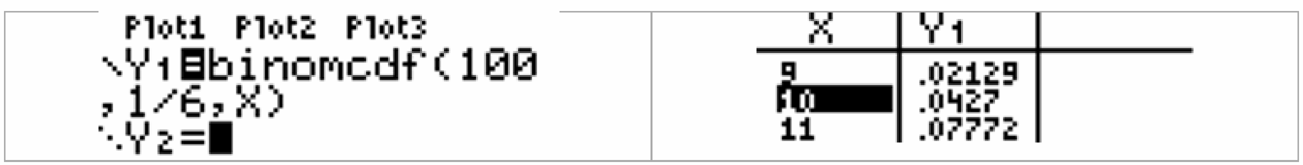
   Nullhypothese: $H_0 : \ p = \frac{1}{6}$, **sei wahr**; **Alternativhypothese**: $H_1 : \ p < \frac{1}{6}$;

2. **Stichprobenumfang**: $n = 100$; **Anzahl der Treffer** in der Stichprobe: 10 .

3. X : Anzahl der Treffer. X ist bei **wahrer Nullhypothese** $B_{100;\,1/6}$ - verteilt .

   Da kleine Werte von X gegen H_0 sprechen, handelt es sich um einen **linksseitigen Test**.

5. **Ablehnungsbereich bestimmen**: Gesucht ist die größte Trefferzahl k mit $P(X \le k) \le 5\%$.

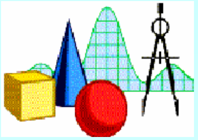


   Für den Ablehnungsbereich ergibt sich damit: $\{0;1;\ldots;10\}$.

Java-Applet

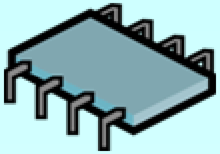
6. **Entscheidung**: Da 10 im Ablehnungsbereich liegt, wird H_0 verworfen.

   Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 4,3 % ist der Würfel gefälscht.



Linksseitiger Test

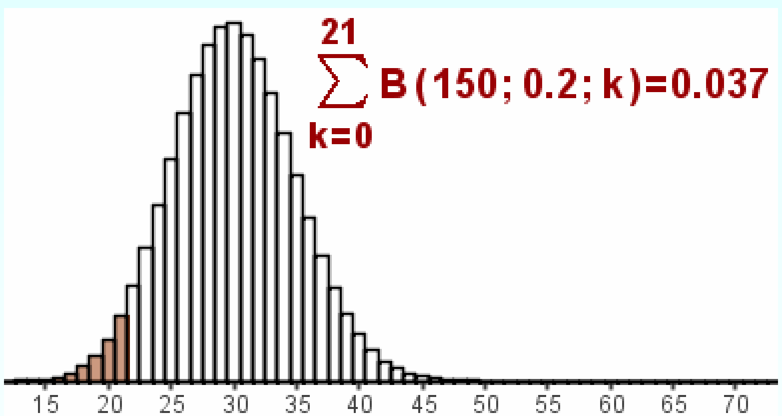
- Bestimmung des Ablehnungsbereichs -



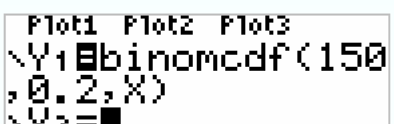
- In einer Fabrik werden Speicherchips für Computer hergestellt. Erfahrungsgemäß sind 20 % aller Chips defekt. Nach einer Veränderung im Produktionsprozess hat der Hersteller die Vermutung, dass sich die Qualität verbessert hat.
- Die Nullhypothese H_0: $p = 0,2$ soll bei einem Stichprobenumfang von 150 Chips auf einem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt werden.
- Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich.

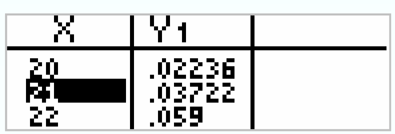
Bestimmung des Ablehnungsbereichs

- Bisher waren 20 % aller Chips defekt:
  - Die Anzahl der defekten Chips ist dann $B_{150;0,2}$ – verteilt:



Java-Applet





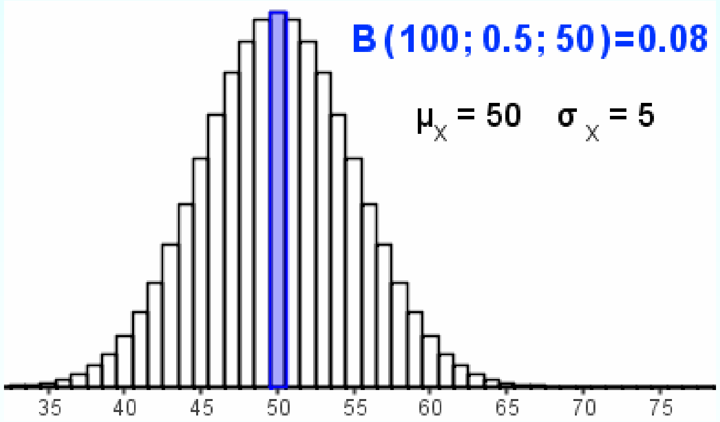
  - Das (erhoffte) Stichprobenergebnis soll dann in höchstens 5 % aller Fälle auftreten.
  - Dies ist der Fall, wenn die Stichprobe höchstens 21 defekte Chips enthält.

- Enthält die Stichprobe höchstens 21 defekte Chips, dann kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 3,7 % von einer Verbesserung des Produktionsprozesses ausgegangen werden.

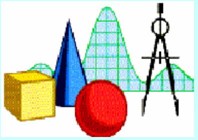
Anmerkung zur Bestimmung des Ablehnungsbereichs

- Warum rechnet man nicht mit $P(\mathbf{X} = \mathbf{k}) \leq \alpha$, sondern mit $P(\mathbf{X} \leq \mathbf{k}) \leq \alpha$?
  - Aus anwendungspraktischen Gründen (vgl. Bsp. oben)
  - Bei großen Stichprobenumfängen n streben die Wahrscheinlichkeiten für ein Einzelereignis gegen 0:

n	p	$\mu = n \cdot p$	$P(X = \mu)$
50	0,5	25	**0,11**
100	0,5	50	**0,08**
10 000	0,5	5 000	**0,008**



  - Somit würden sich für große Werte von n immer verdächtig kleine Wahrscheinlichkeiten ergeben.



Rechtsseitiger Test

- Zusammengesetzte Nullhypothese -

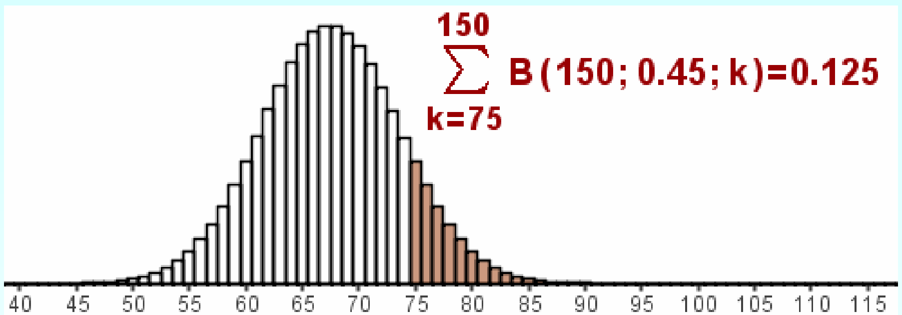
- Die Schulleitung war bisher davon ausgegangen, dass höchstens 45 % der Oberstufenschüler regelmäßig die Mensa besuchen.
  Inzwischen wurde der Speiseplan umgestellt und nach Meinung des Betreibers attraktiver gestaltet, so dass der Betreiber der Mensa die Vermutung hat, dass sich der Anteil der Oberstufenschüler vergrößert hat.
- An einem beliebigen Tag besucht die Hälfte der 150 Oberstufenschüler die Mensa. Der Betreiber möchte mit diesem Stichprobenergebnis die Hypothese der Schulleitung widerlegen.
- Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit ?

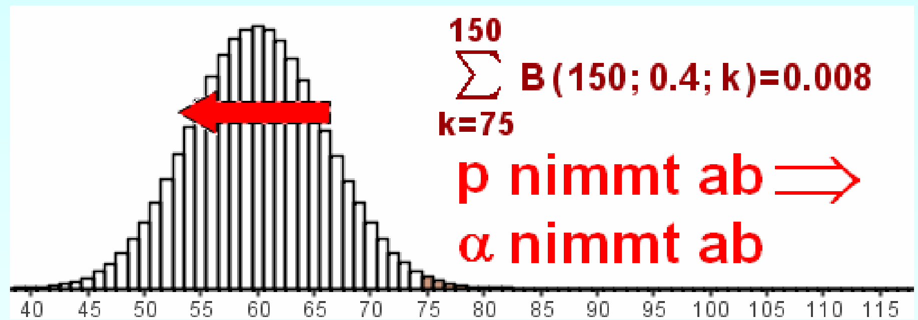
Zusammengesetzte Nullhypothese

- rechtsseitiger Test -

Zusammengesetzte Nullhypothese H_0 : $\mathbf{p \leq 0{,}45}$

Fester Ablehnungsbereich **{75; 76; …; 150}** !





p = 0,45 liefert $\boldsymbol{\alpha}$ **= 12,5 %**

Java-Applet

p = 0,40 liefert $\boldsymbol{\alpha}$ **= 0,8 %**

Die Irrtumswahrscheinlichkeit nimmt mit abnehmenden p ebenfalls ab.
Es genügt also, den **Extremfall** p = 0,45 zu betrachten.
Die **maximale Irrtumswahrscheinlichkeit** für $\mathbf{p \leq 0{,}45}$ beträgt **12,5 %**.
(Gilt für einen linksseitigen Test entsprechend.)

Formale Argumentation, rechtsseitiger Test

1. Treffer bedeutet: Ein Schüler besucht die Mensa.

   Nullhypothese: $H_0: \; p \leq 0{,}45$, **sei wahr**; **Alternativhypothese**: $H_1: \; p > 0{,}45$;

2. **Stichprobenumfang**: $n = 150$; **Anzahl der Treffer** in der Stichprobe: $k = 75$.

3. X: Anzahl der Treffer. X ist bei wahrer Nullhypothese im Extremfall $B_{150;\,0,45}$ - verteilt.

   Da große Werte von X gegen H_0 sprechen, handelt es sich um einen **rechtsseitigen Test**.

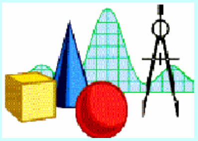
4. Der **Ablehnungsbereich** ist bekannt: $\{75; 76; \ldots; 150\}$.

   Gesucht ist die Trefferwahrscheinlichkeit α, so dass gilt $P(X \geq 75) \leq \alpha$.

   Es gilt $P(X \geq 75) = 1 - P(X \leq 74) \approx 0{,}1254$.

```
1-binomcdf(150,0
.45,74)
               .1254
```

5. Die **maximale Irrtumswahrscheinlichkeit** beträgt etwa 12,5 %.



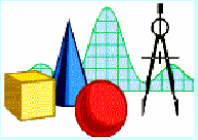
Übungsphase

- Lösen Sie die Aufgaben
  - durch anschauliches Argumentieren mit Hilfe des Java-Applets und
  - formal.

Beispielaufgaben mit Lösungen: Satz 1, Satz 2, Musteraufgaben zum Abitur 2013

Beispiel für eine mögliche Schülerlösung

Impressum

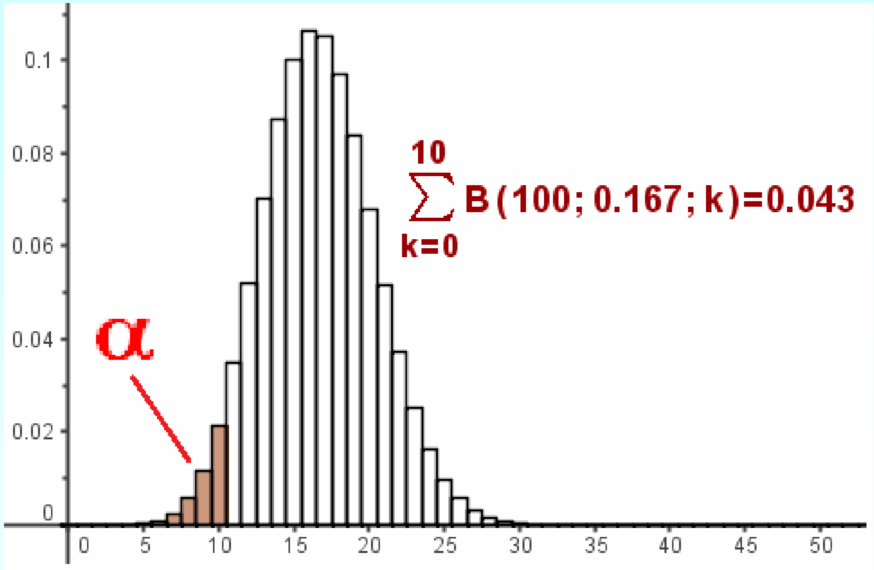


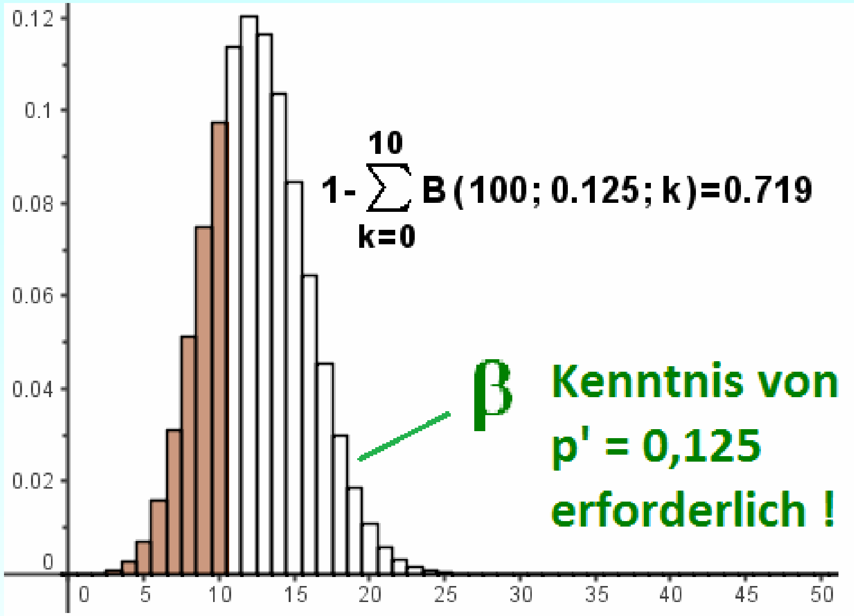
Mögliche Fehler beim Testen

- Der ehemalige Mitarbeiter verrät dem Kommissar nun, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 6 sogar nur 1/8 beträgt.
- Der Kommissar kommt ins Grübeln, **bisheriges Ergebnis**:
  - *Signifikanzniveau: 5 %; Stichprobenumfang: 100; Annahme: p = 1/6*
  - *Ablehnungsbereich: {0; 1; ...; 10}; Stichprobenergebnis: 10 Sechsen*
  - *Entscheidung: Ich halte den Würfel für gefälscht, α = 4,3 %.*
- ***Wie groß war die Gefahr, dass ich solch einen gefälschten Würfel nicht entdecke ?***
  - *Nicht entdeckt hätte ich den gefälschten Würfel bei einem Stichproben-ergebnis mit **11; 12;…; 100** Sechsen.*
  - *Die Anzahl der Sechsen ist **bei dem gefälschten Würfel** $B_{100;1/8}$-verteilt.*

Mögliche Fehler beim Testen

Fester Ablehnungsbereich **{0; 1; …; 10} !**





Verteilung gemäß Nullhypothese mit p = 1/6 **Tatsächliche Verteilung** mit p‘ = 1/8

Java-Applet

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 72 % wird ein gefälschter Würfel nicht entdeckt !
- Mit einer Wahrscheinlichkeit von β ≈ 72 % wird die Nullhypothese nicht abgelehnt, obwohl sie falsch ist ! (**Fehler 2. Art**)

Rechnerische Bestimmung des Fehlers 2. Art

Nullhypothese H_0: Der Würfel ist in Ordnung.

Alternativhypothese H_1: Der Würfel ist gefälscht.

Es gelte die Annahme $p' = \frac{1}{8}$.

Gesucht:

Die Wahrscheinlichkeit β dafür, dass H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl H_0 falsch ist.

X': Anzahl der Sechsen beim gefälschten Würfel. X' ist $B_{100;1/8}$-verteilt.

$\beta = P(X' > 10)$ mit $p' = \frac{1}{8}$.

$\beta = P(X' > 10) = 1 - P(X' \leq 10) \approx 0{,}719$.

```
1-binomcdf(100,1
/8,10)
           .7190
```

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 72 % wird ein gefälschter Würfel nicht entdeckt.

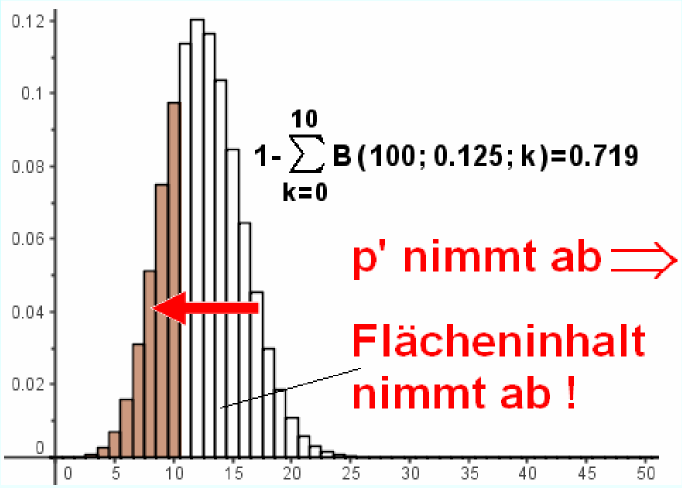
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 72 % wird also die Nullhypothese nicht verworfen, obwohl sie falsch ist. Der Fehler 2. Art beträgt 72 %

Fehler 2. Art

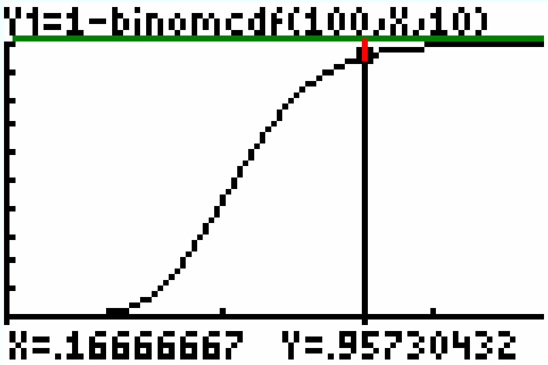
- Einfluss der tatsächlichen Trefferwahrscheinlichkeit -

- Ein stärker verfälschter Würfel müsste zuverlässiger entdeckt werden !
- Nimmt die **tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit p‘** ab, dann nimmt auch β ab.
- Linksseitiger Test:
  - Für p‘ → 0 gilt: β → 0.
  - Für p‘→ 1/6 gilt: β → 1 – α.
- Bestimmung von β(p‘) mit Hilfe des GTR:

$$\beta(p') = 1 - \sum_{k=0}^{10} \mathrm{B}\left(100, p', k\right)$$
$$= 1 - \mathrm{binomcdf}(100, X, 10)$$



Fester Ablehnungsbereich !

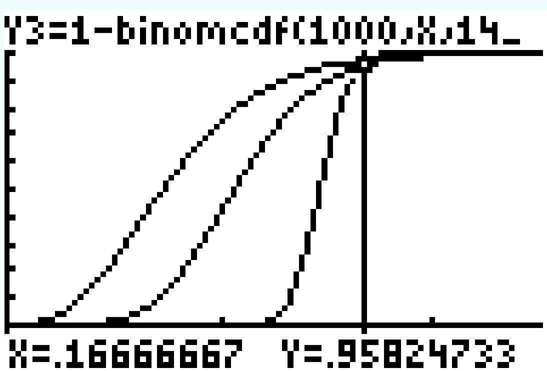


Fehler 2. Art

- Einfluss des Stichprobenumfangs -

p = 1/6;   tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit p‘ = 1/8

Stichproben-umfang n	Signifikanz-niveau	Ablehnungs-bereich	α	β
50	5 %	{0; 1; 2; 3}	2,4 %	**88,6 %**
100	5 %	{0; 1; …; 10}	4,3 %	**71,9 %**
1000	5 %	{0; 1; …; 146}	4,2 %	**2,2 %**

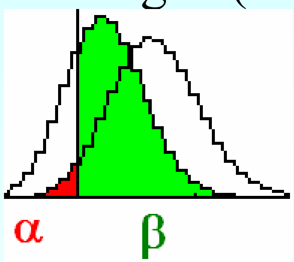


Fehler 2. Art in Abhängigkeit von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit p‘ für n = 50; 100; 1000 (v.l.n.r.) bei einem Signifikanzniveau von 5 %

Fehler 2. Art

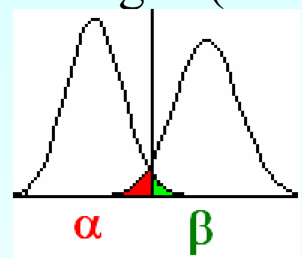
- Einfluss des Stichprobenumfangs -

- **n = 100**; p = 1/6; p‘ = 1/8
  - Ablehnungsbereich:
    {0; 1; …; 10}
  - Verteilungen (GTR):



  - α = 4,3 %; **β = 72 %**
    Geringe Teststärke
  - Für p = 1/6 gilt:
    μ = 16,7; σ = 3,7
    (starke Streuung um den Erwartungswert).

- **n = 1000**; p = 1/6; p‘ = 1/8
  - Ablehnungsbereich:
    {0; 1; …; 146}
  - Verteilungen (GTR):



  - α = 4,2 %; **β = 2 %**
    Hohe Teststärke
  - Für p = 1/6 gilt:
    μ = 167 ; σ = 11,8
    (schwache Streuung um den Erwartungswert).

(Es gilt: $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$; d.h. $\boldsymbol{\mu}$ $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ $\sqrt{\boldsymbol{n}}$)

Mögliche Fehler beim Testen
- Zusammenfassung -

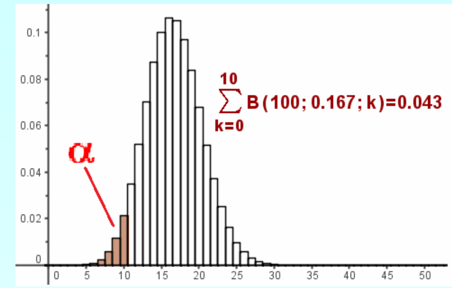
- **Fehler 1. Art (Irrtumswahrscheinlichkeit α):**
  - **Die Nullhypothese wird verworfen, obwohl sie zutrifft.**
    „*Wir haben uns blamiert, weil wir etwas Wahres abgelehnt haben.*“
  - Dieser Fehler ist kontrollierbar.
  - **Signifikanzniveau**:
    Obere Schranke für die Irrtumswahrscheinlichkeit.
  - „***Statistische Signifikanz****:*
    In der Statistik heißen Unterschiede oder Zusammenhänge ***signifikant****, wenn die Wahrscheinlichkeit gering ist, dass sie durch Zufall zustande gekommen sind.*“

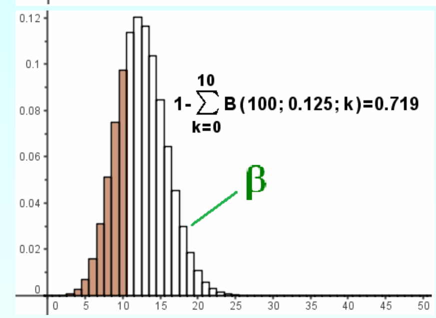
Mögliche Fehler beim Testen
- Zusammenfassung -

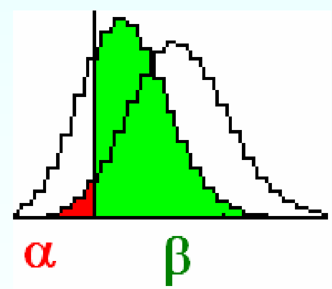
- **Fehler 2. Art (β):**
  - **Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt, obwohl sie falsch ist.**
    „*Wir sind reingefallen, weil wir etwa Falsches akzeptiert haben.*“
  - β hängt ab von **α**, von **p‘** und vom Stichprobenumfang **n**.
    - Dieser Fehler ist i.A. **nicht kontrollierbar**.
  - Eine Beibehaltung der Nullhypothese kann mit einem sehr hohen Fehler behaftet sein.
    - **Die Tatsache, dass eine Nullhypothese nicht abgelehnt wird, kann also nicht als Beleg für deren Gültigkeit angesehen werden !**
      („*Freispruch aus Mangel an Beweisen*“)
  - Aber: **Aus einer Annahme über p‘ kann β abgeschätzt werden**.
    Mit Hilfe des Fehlers 2. Art kann dann entschieden werden, ob ein Test sinnvoll ist (Teststärke).
    (Auch aus diesem Grund ist die Alternativhypothese erforderlich.)

Mögliche Fehler beim Testen
- Zusammenfassung -

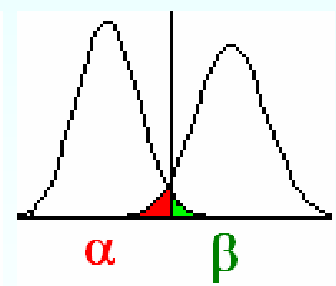
- **Ein Fehler ist also immer möglich !**
  - Bei festem Stichprobenumfang bewirkt eine Verkleinerung von α eine Vergrößerung von β und umgekehrt.
  - Ein Verkleinerung der Summe $\alpha + \beta$ kann nur durch Vergrößern des Stichprobenumfangs n erreicht werden.







n = 100



n = 1000

Mögliche Fehler beim Testen

- Zusammenfassung -

- Nur die Kenntnis **beider Fehler** erlaubt eine Einschätzung der Konsequenzen bei einer Fehlentscheidung !
  - Auswirkungen auf die Wahl der Nullhypothese (s.u.)
  - Aus Wikipedia:

> Für Wirksamkeitsstudien medizinischer Behandlungen schlägt Cohen (1969) für β einen 4-mal so hohen Wert vor wie für das Signifikanzniveau α. Wenn α = 5% ist, sollte das β-Fehler-Niveau also 20 % betragen. Liegt in einer Untersuchung die β-Fehler-Wahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art) unter dieser 20 %-Grenze, so ist die Teststärke (1-β) damit größer als 80 %.

http://de.wikipedia.org/wiki/Teststärke

Wahl der Nullhypothese

- Praktische Durchführung eines Tests -

- Zuerst Signifikanzniveau und Hypothesen festlegen,
- dann erst die Stichprobe erheben !
  - Gefahr der Manipulation der Hypothesen
  - „Mit Statistik lässt sich alles beweisen.“

Testen von Hypothesen

- Grundkonstruktion -

6. Die Aussage wird abgelehnt.

7. Irrtumswahrscheinlichkeit: 2,6 %.

1.
Aussage über die Grundgesamtheit:
*Die Anzahl der Taxen beträgt **3000**.*

2.
Stichprobe

3.
Stichprobenergebnis:
*Unter 4 Taxen besitzen alle eine Nummer **kleiner gleich 1200**.*

5.
Erwartet:
*Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt **nur 2,6 %**.*

4. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgrund des Stichprobenergebnisses kann also eine Aussage über die Grundgesamtheit (Nullhypothese) **als unwahrscheinlich abgelehnt** werden.

Testen von Hypothesen

- Was nun ? -

1.
Aussage über die Grundgesamtheit:
Die Anzahl der Taxen beträgt ***3000***.

2.
Stichprobe

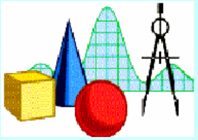
3.
Stichprobenergebnis:
Unter 4 Taxen besitzen alle eine Nummer ***kleiner gleich 2000***.

4. Wahrscheinlichkeitsrechnung

5.
Erwartet:
Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt ***immerhin 20 %***.

Die Aussage des Taxifahrers kann **nicht abgelehnt** werden,
sie wird durch das Stichprobenergebnis **aber auch nicht bestätigt** !

Aufgrund des Stichprobenergebnisses kann also eine Aussage über die Grundgesamtheit (Nullhypothese) **als unwahrscheinlich abgelehnt** werden. Mehr nicht !



Wahl der Nullhypothese

- Beispiel 1 -

- Die Verwaltung einer Stadt plant ein kommunales Projekt und behauptet, dass mindestens etwa 70 % der Bürger für dieses Projekt sind.
  Eine Bürgerinitiative glaubt dagegen, dass der tatsächliche Prozentsatz geringer ist.
- Sowohl die Bürgerinitiative als auch die Stadtverwaltung möchten ihre Behauptung mit Hilfe eines Tests belegen.

Wahl der Nullhypothese - Beispiel 1

• Die Bürgerinitiative plant einen Test.	• Die Stadtverwaltung plant einen Test.
• Zu bestätigen: **Prozentsatz ist geringer.**	• Zu bestätigen: **Prozentsatz ist höher.**
• Nachzuweisen: Hoher Prozentsatz ist unwahr-scheinlich.	• Nachzuweisen: Niedriger Prozentsatz ist unwahr-scheinlich.
• H_0: $p \geq 0{,}7$ **H_1: $p < 0{,}7$**	• H_0: $p \leq 0{,}7$ **H_1: $p > 0{,}7$**

Diejenige Aussage, die bestätigt werden soll, gehört in die Alternativ-hypothese, d.h.:
Die Nullhypothese ist oft die Negation der zu bestätigenden Aussage.

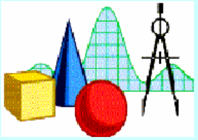
Wahl der Nullhypothese - Beispiel 2

- Ein pharmazeutisches Unternehmen hat ein neues Medikament entwickelt, das angeblich in weniger als 10 % der Anwendungen schädliche Nebenwirkungen zeigt.
- Sowohl das Pharmaunternehmen als auch die Zulassungs-behörde planen einen Test.

Wahl der Nullhypothese - Beispiel 2

• Das Unternehmen plant einen Test:	• Die Zulassungsbehörde plant einen Test:
• Zu bestätigen: **Prozentsatz ist geringer.**	• Zu bestätigen: **Prozentsatz ist höher.**
• Nachzuweisen: Hoher Prozentsatz ist unwahrscheinlich.	• Nachzuweisen: Niedriger Prozentsatz ist unwahrscheinlich.
• H_0: $p \geq 0{,}1$ **H_1: $p < 0{,}1$**	• H_0: $p \leq 0{,}1$ **H_1: $p > 0{,}1$**

Wie schlimm ist es, wenn es zu einer Fehlentscheidung kommt ?



Wahl der Nullhypothese - Beispiel 2

Test führt zur Ablehnung der Nullhypothese

Wie schlimm ist eine Fehlentscheidung ? (**Fehler 1. Art**)

• Unternehmen: H_0: $p \geq 0{,}1$ **H_1: $p < 0{,}1$** (Fehler !) • Das Medikament wird als unschädlich eingestuft, ist aber schädlich ! • **Dieser Fehler ist kon-trollierbar und kann klein gehalten werden.**	• Zulassungsbehörde: H_0: $p \leq 0{,}1$ **H_1: $p > 0{,}1$** (Fehler !) • Das Medikament wird als schädlich eingestuft, ist aber unschädlich.

Wahl der Nullhypothese - Beispiel 2

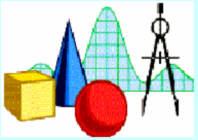
Test führt nicht zur Ablehnung der Nullhypothese.

Wie schlimm ist eine Fehlentscheidung ? (**Fehler 2. Art**)

• Unternehmen: **H_0: $p \geq 0{,}1$** (Fehler !) H_1: $p < 0{,}1$	• Zulassungsbehörde: **H_0: $p \leq 0{,}1$** (Fehler !) H_1: $p > 0{,}1$
• Das Medikament wird als schädlich eingestuft, ist aber unschädlich.	• Das Medikament wird als unschädlich eingestuft, ist aber schädlich !
• Dieser Fehler ist i. A. nicht kontrollierbar.	• **Dieser Fehler ist i. A. nicht kontrollierbar !**

Sinnvolle Wahl der Hypothesen: H_0: $p \geq 0{,}1$ und H_1: $p < 0{,}1$

Bei der Wahl der Nullhypothese sind die Konsequenzen einer Fehlentscheidung zu berücksichtigen !



Didaktische Anmerkungen

- **Lernvoraussetzungen:**
  Sicherer Umgang mit der Binomialverteilung
  – in **theoretischer Hinsicht**
  – in der **praktischen Handhabung**:
  Bestimmung von Einzelwahrscheinlichkeiten
  mit dem GTR,
  Bestimmung von Summenwahrscheinlichkeiten
  mit dem GTR.

Didaktische Anmerkungen

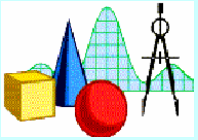
- **Problemfelder:**
  - **Begrifflichkeit:**
    Vielzahl (schwieriger) Begriffe

  - **Argumentationsmuster:**
    - bedingte Wahrscheinlichkeit,
    - indirekte Argumentation !
      Analogie zum indirekten Beweis:
      - *Indirekter Beweis liefert Sicherheit*
      - *Testen liefert eine Wahrscheinlichkeitsaussage*
  - **Interpretation der Ergebnisse und Fehler:** häufig nicht trivial
  - **Hoher Realitätsbezug:** macht die Problemsituation eher schwieriger

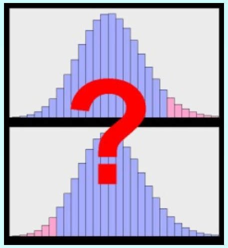
➢ Testen wird deshalb oft als unverstandenes Rezept übernommen.

Didaktische Anmerkungen

- **Prinzipien für den Unterricht:**
  - **Entschleunigung der Begriffbildung**, ggf. Arbeiten mit vorläufigen Begriffen
  - **Betonung des inhaltlich-anschaulichen Arbeitens und Verstehens** gegenüber formaler Elemente
    - Nahezu alle Fragestellungen im Zusammenhang mit Hypothesentesten lassen sich durch Betrachtungen von Summenwahrscheinlichkeiten anschaulich bearbeiten (vgl. Java-Applets).
    - Vermeiden rezeptartigen Arbeitens; Problemlösetechniken: z.B. Skizze anfertigen, Beispiel für eine mögliche Schülerlösung
    - Verwenden der heuristischen und explorativen Möglichkeiten neuer Medien: Tabellenkalkulation, GTR, dynamische Systeme
    - Variieren von Parametern unter Einsatz dynamischer Systeme !



Didaktische Anmerkungen



- **Bedeutung des Verfahrens:**
  - Weit verbreitete Methode der beurteilenden Statistik
  - Spiegelt eine Arbeitsweise der empirisch arbeitenden Wissenschaften wider:
    - Aufstellen und Verwerfen von Hypothesen nach rationalen Kriterien
  - Verständnis und Reflexion im Umgang damit ist wichtiger als unverstandenes Abarbeiten eines Schemas !

Danke schön für die Teilnahme und viel Spaß beim Testen !

Literaturangaben

Stochastik; Engel, Arthur; Klett Studienbücher

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik; Engel, Arthur; Klett Studienbücher

Stochastik III, Beurteilende Statistik; Eggs, Herbert; Diesterweg

Stochastik, Hinweise zum Unterricht; Richter, Gerhard; Klett

Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht (ISTRON 0); Blum, Werner; Franzbecker

Mathematik Lehren 153; Friedrich-Verlag

Mathematik Lehren 54; Friedrich-Verlag

Praxis der Mathematik August 2005; Aulis Verlag Deubner

Einführung in die beurteilende Statistik; Strick, Heinz-Klaus; Schroedel

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Leistungskurs; Feuerpfeil, Heigel; bsv

Stochastik Leistungskurs; Barth, Haller; Ehrenwirth

Stochastik Leistungskurs; Lambacher, Schweizer; Klett

Wahrscheinlichkeiten im Alltag; Sedlmeier, Köhlers; Westermann

http://de.wikipedia.org/wiki/Hypothese_(Statistik) (letzter Zugriff: 4.1.2010)

http://de.wikipedia.org/wiki/Teststärke (letzter Zugriff: 4.1.2010)

http://de.wikipedia.org/wiki/Benfordsches_Gesetz (letzter Zugriff: 4.1.2010)