BINOMIALVERTEILUNG

Ein Zufalls-Experiment, das nur zwei Ergebnisse hat, nennt man ein **Bernoulli-Experiment.**

Bsp.: 1) Werfen einer Münze: Wappen oder Zahl
2) Würfeln: 6 oder keine 6

Ein Bernoulli-Experiment ist eine spezieller Zufallsversuch mit genau zwei Ausgängen:
T für Treffer und **N** für Niete mit den Wahrscheinlichkeiten p für Treffer und q für Niete.

Wird ein Bernoulli-Experiment **n mal unabhängig** wiederholt, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge n.

Die **Wahrscheinlichkeit P(X=k) für genau k Treffer bei n Wiederholungen** berechnet sich durch:

$$\mathbf{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot q^{n-k}}$$

Dabei beschreibt die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer.

Die Formel von Bernoulli:

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p lässt sich die Anzahl k der Treffer nach der Bernoulli-Formel berechnen:

$$\mathbf{P(X=k)=\underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{Anzahl}\\\text{derPfade}\\\text{mit } k\\\text{Erfolgen}}}\cdot\underbrace{p^{k}q^{n-k}}_{\substack{\text{WS für}\\\text{einenPfad}\\\text{mit k Erfolgen}\\\text{und (n-k)}\\\text{Misserfolgen}}}=B_{n;p}(k)}$$

Die zu einem n-stufigen Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p gehörige Verteilung heißt Binomialverteilung mit den Parametern n und p.
Die zugehörige Zufallsvariable X heißt binomialverteilt

Beispiel: WS für 17 mal 6 bei 50 Würfen: $P(X=17)=\binom{50}{17}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{17}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{33}=B_{50;\frac{1}{6}}(17)$

Mit dem TR: binompdf

Aufsummierte (kumulierte) Treffer-Wahrscheinlichkeiten (Mit dem TR: binomcdf**):**

$P(X<4) = P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)= P(X\le 3)$

$P(X\ge 7)=P(X=7)+P(X=8)+\ldots+P(X=n)=1-P(X\le 6)$

$P(3<x<15) =P(X=4)+P(X=5)+\ldots+P(X=14)= P(X\le 14)-P(X\le 3)$

Kronberger 2010

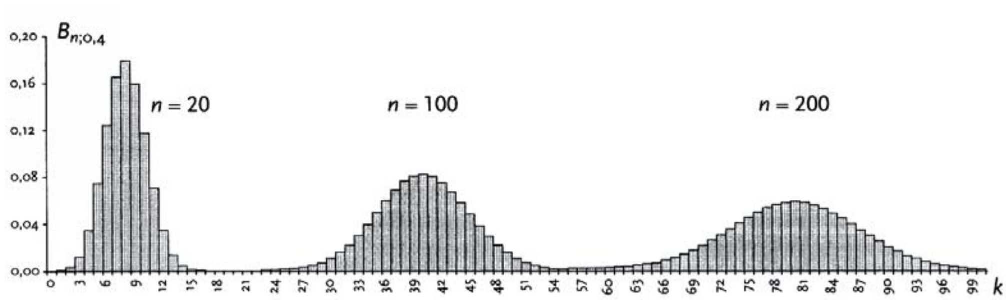
Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen:

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

(wobei n die Länge der Bernoulli-Kette und p die Trefferwahrscheinlichkeit angibt).

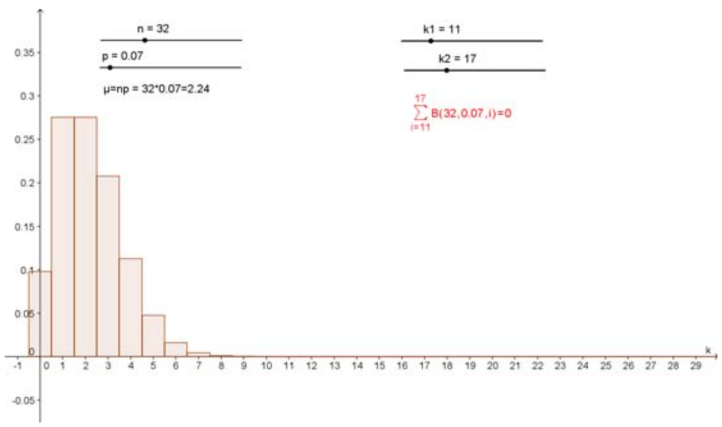
Kenntnis, wie die Werte einer Binomialverteilung verteilt sind:

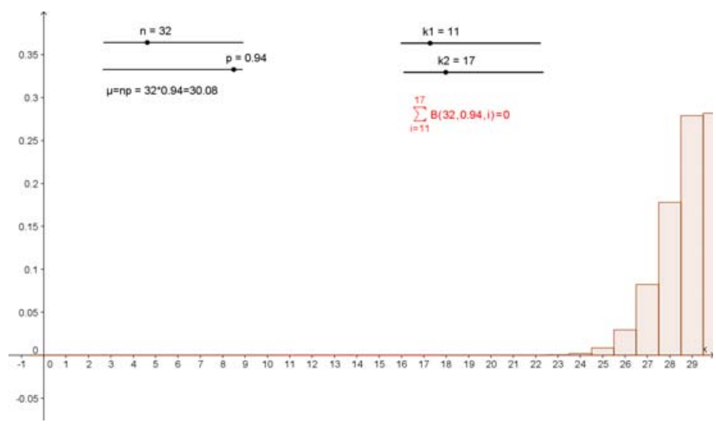
- Alle Graphen haben Glockenform
- Mit wachsendem n werden die Graphen immer breiter und zunehmend symmetrischer um den Erwartungswert $\mu = E(X)$. Die Histogramme werden mit zunehmender Verbreiterung der Histogramme flacher, d.h. die Einzelwahrscheinlichkeiten werden kleiner.



- Das Maximum der Graphen befindet sich bei der mittleren Stelle
- Für $p \to 1$ und $p \to 0$ werden die Graphen immer höher und schmaler
- Für $p = \frac{1}{2}$ sind die Graphen symmetrisch,

  für $p \to 1$ und $p \to 0$ ergibt sich eine leicht anwachsende Asymmetrie





Varianz und Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariablen:

Eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n, p und q=1-p hat die **Varianz** $\mathbf{V(x) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)}$ und

die **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{\mathbf{n \cdot p \cdot q}} = \sqrt{\mathbf{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

Ein zum Erwartungswert μ symmetrisches Intervall der Form $[\mu - k \cdot \sigma; \mu + k \cdot \sigma]$ bezeichnet man als **Sigma-Umgebung**.

Sigma-Regeln:

Man erhält folgende Näherungen:

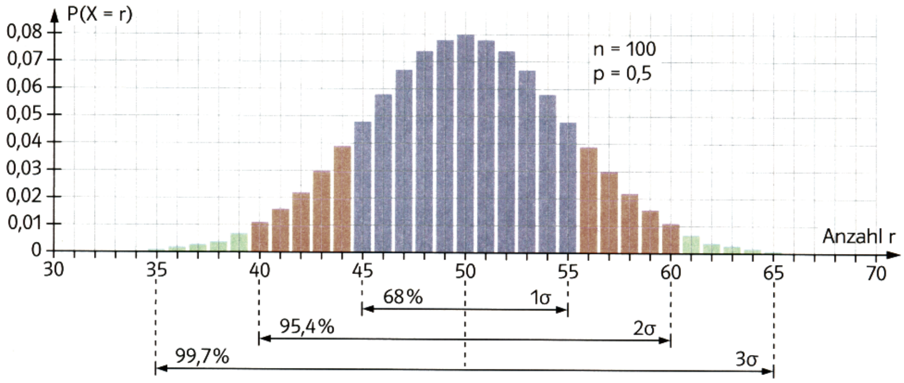
1. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,3\%$

   d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68,3% liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

2. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$

3. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,4\%$

Beispiel: n=100, p=0,5 $\Rightarrow \sigma = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5)} = 5$



$\mu = 50$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von

ca. 68,3% liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [45;55]
ca. 95,4% liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [40;60]
ca. 99,7% liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [35;65]

Kronberger 2010

Diese Näherung ist nach einer Faust-Regel nur brauchbar, wenn $\sigma > 3$ (Laplace-Regel).

Je größer n und je näher p bei 0,5 liegt (ja symmetrischer das Schaubild), desto besser ist i.a. die Näherung.