



Vorschlag für eine UE „Binomialverteilung und Testen“

(ca. 15 Stunden)

Teil 1: Das Experiment

(3 h)

1.– 3. Stunde	Projekt: Cola-Geschmackstest
Werkzeug	GTR, Simulation
Absicht/LZ	Ein Experiment (Cola-Geschmackstest) führt zu einer mathematischen Modellierung, bei der eine Bernoulli-Kette auftritt.
Inhalt/ Prozess	Mit einem Experiment soll festgestellt werden, ob die Klasse (als Gesamtheit) eine Cola-Schmecker-Klasse ist oder nicht. Der Test wird durchgeführt und es werden Fragestellungen für eine Auswertung des Tests entwickelt.
Ergebnis	Die Überlegungen führen zu einer mathematischen Modellierung, bei der Bernoulliketten, binomialverteilte Zufallsvariable und Grundfragen von Hypothesentests angesprochen werden. Die Diskussion möglicher Fehler bei einer Entscheidung erfordert die Entwicklung einer „Vergleichsverteilung“, die eine „Nix-Schmecker-Klasse“ („Rater“, „Unkundige“, ...) charakterisiert.
Materialien	Projekt : Cola-Geschmackstest
UF / M / SA	Experiment / GA / Präsentation / Unterrichtsgespräch
Hinweis	Zentraler Gedanke ist, in einem Einstiegsbeispiel Bernoulliketten, die Binomialverteilung und die Fragestellungen der Hypothesentests gemeinsam anzusprechen. Dabei können Kenntnisse aus vorhergehenden Unterrichtseinheiten der Stochastik wieder aufgegriffen werden. Während des Unterrichtsgangs erweist sich die Binomialverteilung als notwendiges Werkzeug zur Beantwortung entstehender Fragen. Eine getrennte, aufeinanderfolgende Behandlung von Bernoulliketten und Hypothesentests ist selbstverständlich auch möglich. Das ganzheitliche Vorgehen vermeidet ein Lernen auf Vorrat; das Modellieren als mathematisches Verfahren steht im Vordergrund.
ÜB/HA	Simulation einer Klasse mit „Nix-Schmeckern“

Teil 2: Erarbeitung der Binomialverteilung

(3 h)

4. Stunde	Untersuchung einer „Nix-Schmecker-Klasse“
Werkzeug	Baumdiagramm, Tabelle, Schaubild (GTR)
Absicht/LZ	Erarbeitung der Formel von Bernoulli
Inhalt/ Prozess	Jeder Schüler ermittelt (unter verschiedenen Voraussetzungen) für „seinen“ Test (4 Versuche) die Einzelwahrscheinlichkeiten, 0, 1, 2, 3, 4 Treffer zu erzielen („Nix-Schmecker“: $p = \frac{1}{3}$; Schmecker $p = ?$; ...) → Wie kann man Verteilungen bei größeren Versuchsanzahlen beschreiben?
Ergebnis/ Produkt	Wahrscheinlichkeitsverteilungen: <ul style="list-style-type: none"> • Systematisches Abzählen • Erkennen von Symmetrien • Baumdiagramm, Pfadregeln • Überprüfen der Ergebnisse (z.B. Summenbildung)
Materialien	Stundenentwurf
UF / M / SA	Einzelarbeit / Präsentation / Unterrichtsgespräch
Hinweis	Es ist notwendig, die Anzahl der Einzeltests zunächst auf 4 zu reduzieren (ein Schüler der Klasse), um eine Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregel zu ermöglichen. So können die aus vorhergehenden Unterrichtseinheiten bekannten Möglichkeiten des Baumdiagramms genutzt werden.
ÜB/HA	Wh.: Variation der Durchführungsanzahl n und der Trefferwahrscheinlichkeit p .



5. u. 6. Stunde	Die Formel von Bernoulli
Werkzeug	GTR, Tabelle, Schaubild
Absicht/LZ	Im Mittelpunkt dieser Stunde steht die Formel von Bernoulli. Die konkreten Vorüberlegungen machen klar, dass die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Pfade mit jeweils k Treffern gleich groß sind: $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Die „rechentechische Schwierigkeit“ besteht nur noch darin, die Anzahl dieser Pfade zu bestimmen.
Inhalt/ Prozess	Die Erarbeitung kann rekursiv mit Hilfe von Beispielen am Pascalschen Dreieck erarbeitet werden. Das Abzählen der Pfade im Baumdiagramm ist für $n > 5$ nicht übersichtlich und daher wenig sinnvoll. Die Schritte von 6 nach 7, 7 nach 8,, 19 nach 20, usw. werden nicht mehr einzeln durchgeführt, sondern die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten erfolgt über die gefundene „Formel“ für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ und wird dann dem GTR überlassen.
Ergebnis	Die Formel von Bernoulli
Materialien	Stundenentwurf
UF / M / SA	-
Hinweis	Im Zusammenhang mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ verzichten wir auf eingehendere Untersuchungen. Ein „Ausflug“ in die Kombinatorik würde den Blick von der Stochastik und der Modellbildung weg lenken.
ÜB/HA	Arbeitsblatt mit Übungsaufgaben

Teil 3: Hypothesentests und Fehlerwahrscheinlichkeiten

(ca. 3 h)

7. – 9. Stunde	Auswertung des Experimentes „Cola-Geschmackstest“
Werkzeug	GTR
Absicht/LZ	Am Beispiel des Cola-Geschmackstest wird der Aufbau eines Hypothesentests thematisiert.
Inhalt/ Prozess	Der Vergleich mit den „gefühlsmäßig“ festgelegten Entscheidungskriterien führt zu der beim Testen von Hypothesen entscheidenden Frage: Wann ist eine Klasse besser als eine „Nix-Schmecker-Klasse“? Die Festlegung eines „Schmeckerbereiches“ muss mit den Schülerinnen und Schülern erörtert werden. Es stellt sich die Frage, wie sicher dieser Bereich ist: Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine „Nixschmecker-Klasse“ fälschlicherweise als „Schmecker-Klasse“ eingestuft? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine „Schmecker-Klasse“ fälschlicherweise als „Nix-Schmecker-Klasse“ betrachtet? Fehlerberechnungen in beide Richtungen sollten anschließend durchgeführt werden.
Ergebnis	Die Formel von Bernoulli ermöglicht eine quantifizierbare Entscheidung bei dem Experiment „Cola-Geschmackstest“.
Materialien	Stundenentwurf
UF / M / SA	-
Hinweis	Diskussionsbedarf: die Festlegung des „Schmeckerbereiches“ ist, ebenso wie die Festlegung der Trefferwahrscheinlichkeit für eine „Schmecker-Klasse“, eine willkürliche Entscheidung.

**Teil 4: Übungen und Vertiefungen****(6 h)**

- Vergleich verschiedener Binomialverteilungen, Variation der Parameter.
- Durchführung weiterer Experimente (Eignungstests, Quiz in einer unbekannt Fremdsprache,..)
- Variation der durchgeführten Experimente
 - Variation des Produktes
 - Variation der Kostprobenzahl
 - Variation der Produktanzahl
- Qualitätskontrolle
- Medizinische Tests
- Variante – klassischer Aufbau:
 - Wege in einem Baumdiagramm
 - Bernoullikette, Formel von Bernoulli
 - Testen von Hypothesen (Cola-Geschmackstest)