Ein möglicher Unterrichtsgang

1. **Wiederholung: Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung**
   Da der sichere Umgang mit der Binomialverteilung, auch der Umgang mit dem GTR und den Diagrammen, eine notwendige Voraussetzung für das Testen von Hypothesen ist, sollte zu Beginn der Unterrichtseinheit eine intensive Wiederholung aller Fragen und Probleme rund um die Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung stehen.

2. **Einstieg**
   Problematisierung des Problems theoretischer Wahrscheinlichkeitsbegriff – stochastische Praxis:
   Es wird behauptet, ein Würfel sei gezinkt, die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen seine unterschiedlich, also nicht jeweils $\frac{1}{6}$*.*
   Um diese Vermutung zu überprüfen, könnte man den Würfel sehr oft (2000mal) werfen. Damit ließe sich eine Entscheidung über die relativen Häufigkeiten fällen. Solch ein Verfahren ist jedoch sehr aufwendig und die ermittelte relative Häufigkeit trotz großem Stichprobenumfang auch nur ein Näherungswert.
   Gesucht ist ein rechnerisches Verfahren, das auf kürzerem Weg (also beispielsweise 50mal würfeln) eine Entscheidungshilfe gibt, ob der Würfel ideal ist oder nicht.

   Ein solches Verfahren nennt man Testen von Hypothesen.

3. **Einführung in das Verfahren**
   Zunächst wird die Behauptung aufgestellt, die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu werfen sei nicht $\frac{1}{6}$. *(Mögliche Einbindung in eine Geschichte mit einem Kommissar in einem Casino…)*
   Es stehen zwei Alternativen im Raum: Entweder ist der Würfel ist ideal oder gezinkt. Welche der beiden Möglichkeiten bietet sich als Arbeithypothese an?

   Ziel des sich anschließenden Unterrichtsgesprächs:

   Da man die WS für eine 6 bei einem idealen Würfel kennt, während die WS bei einem gezinkten Würfel unbekannt ist, wählt man als Arbeitshypothese die „Unschuldsvermutung" $p = \frac{1}{6}$. Das Verhalten des idealen Würfels dient somit als Vergleichs- und Wertemaßstab für die Beurteilung der zu überprüfenden Würfels.

Begriffsfestlegung:

Nullhypothese: $H_0\colon\ p_0 = \frac{1}{6}$

Gegenhypothese: $H_1\colon\ p_1 \neq \frac{1}{6}$, also $p_1 < \frac{1}{6}$ oder $p_1 > \frac{1}{6}$

H_1 ist eine **zusammengesetzte** Hypothese,
es liegt ein zweiseitiger Test vor

Prüfvariable X: Zur Überprüfung wird der Würfel 50mal geworfen.
Die Zufallsvariable X ,auch **Prüfvariable** genannt, gibt

die Anzahl der 6en an. Sie ist binomialverteilt mit n=100

und bei wahrer Nullhypothese $p_0 = \frac{1}{6}$.

Sie ist $B_{100;\frac{1}{6}}$ – verteilt und hat den Erwartungswert

$\mu = E(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{6}$, der eine Vergleichsgröße

darstellt.

Durchführung des Experiments Signifikanztest**:** in mehreren Gruppen, möglichst mit idealen und gezinkten Würfeln
Das Ergebnis wird mit dem Erwartungswert verglichen und bewertet: Der Würfel ist (k)ein idealer Würfel.

Die Entscheidungsregel: Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn der Stichprobenwert in einem gewissen Maß (um mindestens eine Zahl c rechts oder links) vom Erwartungswert abweicht. Diese Zahl wird festgelegt (Schüler probieren lassen: c=10,…) und ergibt eine linke und eine rechte Grenze **des Ablehnungsbereichs:**

$A = \{0,1,2,\ldots,\mu - c\} \cup \{\mu + c,\ldots.,n\}$

An dieser Stelle sollte nochmals auf den Begriff des zweiseitigen Tests eingegangen werden.

Graphische Darstellung des Ablehnungsbereichs:

Diskussion über das Histogramm (bzw. mehrere Histogramme zu verschiedenen Ablehnungsbereichen) mit dem möglichen Fazit:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der 6en beim 100maligen Würfeln eine idealen Würfels in dem festgelegten Ablehnungsbereich liegt, ist klein, also wird der Würfe als idealer Würfel abgelehnt.

An dieser Stelle kann der Begriff **Signifikanztest (signifikante Abweichung)** erläutert werden.

Wahrscheinlichkeit für den Ablehnungsbereich:

$$B_{100;\frac{1}{6}}(X \le \mu - c) + B_{100;\frac{1}{6}}(X \ge \mu + c)$$

Ist die WS klein, dass ein idealer Würfel den festgelegten Grad der Abweichung zeigt, dass die Prüfvariable Werte annimmt, die im Ablehnungsbereich liegen, wird man die Nullhypothese ablehnen.
Doch „mit welcher Sicherheit“ kann man in diesem Fall die Nullhypothese ablehnen?

Irrtumswahrscheinlichkeit α bzw. Risiko 1. Art (Fehler 1.Art)

Die WS $\alpha = B_{100;\frac{1}{6}}(X \le \mu - c) + B_{100;\frac{1}{6}}(X \ge \mu + c)$, mit der die Werte der Zufallsvariablen im Ablehnungsbereich liegen, ist größer als Null!! Die festgelegte Abweichung vom Erwartungswert ist also nicht unwahrscheinlich.
Man lehnt also die Nullhypothese mit der WS α fälschlicherweise ab **(Fehler 1. Art)**, da auch bei wahrer Nullhypothese Werte der Prüfvariablen mit der WS α im Ablehnungsbereich liegen.
Die WS, einen Fehler 1. Art zu begehen ist **die Irrtums-WS α bzw. das Risiko 1. Art.**

An dieser Stelle muss nun durch Übung das Testverfahren des zweiseitigen Signifikanztests gefestigt werden (mit entsprechenden vielfältigen und interessanten Aufgaben mit unterschiedlichen Fragestellungen): Festlegung der Nullhypothese, die zugrunde liegende Binomialverteilung $B_{n;p}$, die Festlegung des Ablehnungsbereichs und die Bestimmung der Irrtums-WS.

4. **Weiteres Vorgehen:**

Fehler 2. Art, β =WS für einen Fehler 2. Art = Risiko 2. Art

Das Risiko zweiter Art ist die WS, dass man die Nullhypothese H_0: $p_0 = \frac{1}{6}$

nicht ablehnt, obwohl sie falsch ist .
Der Würfel ist also nicht ideal, man nimmt aber an, er sei ideal.
Angenommen, die **wahre Wahrscheinlichkeit** für eine 6 bei dem nicht idealen Würfel beträgt p=0,2 (oder p=0,3). Dann ist die zuständige Zufallsvariable $B_{100;0,2}$-verteilt (bzw. $B_{100;0,3}$ –verteilt).
Die Anzahl der 6en beim 100maligen Werfen dieses Würfels sind dann die Werte der wahren Variablen.
Dann ist das Risiko zweiter Art die WS, dass diese Werte im Annahmebereich der Nullhypothese liegen wie folgt zu berechnen:

$$\beta(0,2) = B_{100;0,2}(\overline{A}) = B_{100;0,2}(\mu - c + 1 \le X \le \mu + c - 1)$$ bzw.

$$\beta(0,3) = B_{100;0,3}(\overline{A}) = B_{100;0,3}(\mu - c + 1 \le X \le \mu + c - 1)$$

Mit dieser WS lehnt man die Nullhypothese nicht ab, obwohl sie falsch ist.

Visualisierung:

Betrachtet man die Histogramme der WS-Verteilungen der $B_{100;\frac{1}{6}} -$ verteilten und der

$B_{100;0,2} -$ verteilten und der $B_{100;0,3} -$ verteilten Zufallsvariablen mit dem o.g. Ablehnungsbereich $A = \{0,1,2,...,\mu - c\} \cup \{\mu + c,....,n\}$, kann man die durch Rechnung erhaltenen Ergebnisse für das Risiko zweiter Art durch Vergleich der Rechtecksflächen qualitativ bewerten:
Je weniger die wahre WS (p=0,2 oder p=0,3) von der hypothetischen WS ($p_0 = \frac{1}{6}$)bei falscher Annahme der Nullhypothese abweicht, desto größer ist das Risiko zweiter Art.

Vergleich der Risiken 1. Und 2. Art:
Die Irrtumwahrscheinlichkeit bzw. das Risiko 1. Art ist als Summe der Rechtecksflächen des Ablehnungsbereichs zu sehen.. Wird diese Summe verkleinert, wird der Ablehnungsbereich kleiner, da dessen Grenzen weiter nach links bzw. rechts

rücken. Eine Minimierung des Risikos 1. Art hat eine Vergrößerung des Risikos 2. Art zur Folge.

An dieser Stelle muss nun durch Übung der Umgang mit dem zweiseitigen Signifikanztest mit allen Begriffen und möglichen Interpretationen gefestigt werden (mit entsprechenden vielfältigen und interessanten Aufgaben mit unterschiedlichen Fragestellungen):

- ***Zweiseitiger Signifikanztest bei vorgegebenem Ablehnungsbereich***
- ***Zweiseitiger Signifikanztest bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit*** α

5. **Weiteres Vorgehen:**

   Rechts- und linksseitige Signifikanztests

   Zusammengesetzte Nullhypothese

   Der Alternativtest

   Der Einfluss des Stichprobenumfangs

6. **Integrale Näherung der Binomialverteilung nach Moivre-Laplace:**

   (1) Standardisierung einer binomialverteilten Zufallsvariablen
   (2)Die integrale Näherung der Summenwahrscheinlichkeit $B_{n;p}(X \leq k)$

7. **Stetige Zufallsvariable**

   (1) Diskrete und stetige Zufallsvariable
   (2) Dichte- und Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen
   (3) Normalverteilte Zufallsvariable

   (zu5,6,7 siehe Skript)