

## Fehler bei Aufgaben

Beim Thema Testen stellt sich immer wieder die Frage nach der didaktischen Reduktion und der Auswahl der Aufgaben.

Wie weit kann man von der formalen Betrachtung mit exakter Fachsprache abweichen, um den Schülern das Thema Testen zu erleichtern?

Inwieweit genügt eine inhaltlich-anschauliche Argumentation oder wie stark ist eine formale Argumentation notwendig?

Beispiel:

Der Vertreter einer Kaffeemarke behauptet, dass mindestens 70 % aller Kunden, die Kaffee kaufen, die von ihm vertriebene Marke wählen.

Bei einer Überprüfung wählen von 100 Kaffeehäusern nur 62 die Marke des Vertreters.

a) Lässt sich hieraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 10 % ein Widerspruch gegen die Behauptung des Vertreters herleiten ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Behauptung des Vertreters fälschlicherweise angenommen, wenn in Wirklichkeit nur 60 % aller Kaffeehäuser die von ihm vertriebene Marke kaufen ?

Inhaltlich-anschauliche Argumentation	Formale Argumentation								
<p>a) Trifft die Behauptung des Vertreters zu, dann ist die Anzahl der Kaffeehäuser, die die von dem Vertreter vertriebene Marke wählt, <math>B_{100;0,7}</math> - verteilt :</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass 62 oder weniger Kaffeehäuser diese Marke wählen, beträgt dann nur etwa 5 %.</p> <p>Dass nur 62 von 100 Kaffeehäusern diese Marke wählen, ist also ein Indiz gegen die Aussage des Vertreters.</p> <p>Damit lässt sich mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von deutlich weniger als 10 % ein Widerspruch gegen die Behauptung des Vertreters herleiten.</p>	<p><b>Linksseitiger Signifikanztest:</b></p> <p>a) 1. Treffer bedeutet: Das Kaffeehaus wählt die Marke des Vertreters. Vorgegebenes Signifikanzniveau: <math>\alpha = 10\%</math> . Die Hypothesen lauten: <math>H_0: p \geq 0,7</math> (sei wahr) und <math>H_1: p &lt; 0,7</math> .</p> <p>2. Stichprobenumfang : <math>n = 100</math> ; Anzahl der Treffer in der Stichprobe: 62.</p> <p>3. <math>X</math> : Anzahl der Treffer. <math>X</math> ist bei wahrer Nullhypothese im Extremfall <math>B_{100;0,7}</math> - verteilt .</p> <p>Da sehr kleine Werte von <math>X</math> gegen <math>H_0</math> sprechen, handelt es sich um einen linksseitigen Test.</p> <p>4. Bestimmung des Ablehnungsbereichs: Gesucht ist die größte Trefferzahl <math>k</math> mit <math>P(X \leq k) \leq 10\%</math> . Der GTR liefert:</p> <p>Plot1 Plot2 Plot3  <math>\text{Y1} = \text{binomcdf}(100, 0.7, X)</math>  <math>\text{Y2} =</math></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>Y1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>62.000</td> <td>.05305</td> </tr> <tr> <td>63.000</td> <td>.07988</td> </tr> <tr> <td>64.000</td> <td>.11608</td> </tr> </tbody> </table> <p>Für den Ablehnungsbereich ergibt sich damit: <math>\{0; 1; \dots; 63\}</math>.</p> <p>5. Da 62 im Ablehnungsbereich liegt, wird <math>H_0</math> verworfen.</p> <p>Die Irrtumswahrscheinlichkeit liegt bei etwa 8 %.</p>	X	Y1	62.000	.05305	63.000	.07988	64.000	.11608
X	Y1								
62.000	.05305								
63.000	.07988								
64.000	.11608								

	Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von weniger als 10 % lässt sich ein Widerspruch zur Behauptung des Vertreters herleiten.
<p>b) Die Anzahl der Kaffeehäuser, die die von dem Vertreter vertriebene Marke wählt, ist nun <math>B_{100;0,6}</math> - verteilt :</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass 63 oder mehr Kaffeehäuser die Marke des Vertreters wählen, beträgt dann etwa 31 %.</p> <p>Somit wird die Behauptung des Vertreters mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 31 % fälschlicherweise angenommen</p>	<p><b>Bestimmung der Fehlers 2. Art:</b></p> <p>b) Treffer bedeutet: Das Kaffeehaus wählt die Marke des Vertreters.</p> <p><math>X'</math>: Anzahl der Treffer.</p> <p>Die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit beträgt <math>p' = 0,6</math>.</p> <p><math>X'</math> ist <math>B_{100;0,6}</math> - verteilt .</p> <p>Mit <math>p' = 0,6</math> gilt für den Fehler 2. Art:</p> $\beta = P(X' \geq 63) = 1 - P(X' \leq 62).$ <p>Der GTR liefert:</p> $1 - \text{binomcdf}(100, 0.6, 62) = 0.3068$ <p>Der Fehler zweiter Art beträgt <math>\beta \approx 0,31 = 31\%</math> .</p> <p>Die Behauptung des Vertreters wird mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 31 % fälschlicherweise angenommen.</p>

Dr. Siegfried Mumm hat dazu einen Artikel in MNU 63/4 S.198-199 ([www.mnu.de](http://www.mnu.de)) mit dem Thema „Signifikanztests im Rahmen des Abiturs“ verfasst, in dem es neben der didaktischen Reduktion auch um Fehler in Aufgaben geht. Er zeigt einige Beispiele auf, die zu Verwirrungen bei der Fragestellung führen oder zu Fragestellungen führen, bei denen keine Wahrscheinlichkeitsaussage mehr gemacht werden kann.

Ein Beispiel:

Die Nullhypothese ist  $p=0,3$ .

Mit derselben Stichprobe wird zur Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  von zwei verschiedenen Parteien sowohl die Hypothese  $p<0,3$  als auch  $p>0,3$  getestet. Jede Partei behauptet, die Irrtumswahrscheinlichkeit für ihre Entscheidung sei höchstens  $\alpha$ .

Die Entscheidungsregel lautet: Falls  $X < k_{\text{linke Grenze}}$  wird für  $p<0,3$  entschieden und falls  $X > k_{\text{rechte Grenze}}$  wird für  $p>0,3$  entschieden. Die Entscheidung ist falsch, wenn  $p=0,3$  und dennoch entschieden wird.

Die WS dafür beträgt

$$P_{0,3}(X < k_{\text{linke Grenze}} \text{ oder } X > k_{\text{rechte Grenze}}) = P_{0,3}(X < k_{\text{linke Grenze}}) + P_{0,3}(X > k_{\text{rechte Grenze}}) \leq 2\alpha$$

Mit der Formulierung „zwei verschiedene Parteien“ wird davon abgelenkt, dass es sich hier um einen zweiseitigen Test handelt.

Auf jeden Fall sind die Schüler sind bei diesem Thema genügend gefordert, die Sachverhalte zu verstehen und anzuwenden. Man sollte die Testtheorie daher in ihrer Überschaubarkeit möglichst klar strukturieren und insbesondere bei der Auswahl der Aufgaben auf ihre Qualität achten,

insbesondere darauf, dass diese nicht verwirrend gestellt sind, um bei den Schülern die größtmögliche Klarheit zu erreichen.