Anwendungen zum Skalarprodukt / *Wege zum Üben*

	Kompetenz	ja / nein	Trainings-aufgaben	Ausgangs-aufgabe	weiterführende Aufgaben
Orthogonalität von Vektoren	Ich kann angeben, wann zwei Vektoren orthogonal sind.		INFO: S. 167 Satz 5.3 Beispiel 1 und 2 nachlesen	S. 171/26	W1a
	Ich kann die Orthogonalität von Vektoren überprüfen.		T1a (S. 169/5)		
	Ich kann zu einem gegebenen Vektor einen dazu orthogonalen Vektor angeben.		T1b (S. 169/10)		W1b (S. 172/30)
	Ich kann zu zwei gegebenen Vektoren einen dazu orthogonalen Vektor berechnen.		T1c (S. 170/17)		W1c (S. 172/32)

Verwendetes Schulbuch: Fokus Mathematik Kursstufe Gymn. BW (2010)

Hinweise:

- Beginnen Sie mit dem Lösen der Ausgangsaufgabe.
- Sollten Sie bei der Lösung dieser Aufgabe Schwierigkeiten haben, so stellen Sie zunächst fest, über welche Kompetenzen Sie bereits verfügen und welche Sie noch trainieren sollten. Lösen Sie dann die zugehörigen Trainingsaufgaben und anschließend die Ausgangsaufgabe.
- Wenn Sie die Ausgangsaufgabe lösen können, so arbeiten Sie an den weiterführenden Aufgaben Ihrer Wahl weiter.

Ausgangaufgabe

26 Die Punkte $A(0|0|0)$, $B(1|2|3)$, $C(0|2|2)$ und $D(1|0|1)$ liegen in einer Ebene. Zeigen Sie dies, indem Sie einen gemeinsamen Lotvektor $\vec{n}$ auf zwei der Viereckseiten $ABCD$ finden und seinen Winkel mit den anderen beiden Viereckseiten prüfen.

INFO

Satz 5.3 **Skalarprodukt und Orthogonalität von Vektoren**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$.

Mit diesem Satz werden Orthogonalitätsuntersuchungen sehr einfach.

Beispiele:

1) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 + 2 - 10 = 0$, also $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 + 2 - 10 = -14$, also $\vec{a} \not\perp \vec{b}$.

Trainingsaufgaben

T1a

5 Untersuchen Sie, ob $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander orthogonal sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0{,}16 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

T1b

10 Ergänzen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ ? \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ ? \\ -4 \end{pmatrix}$ so, dass sie zum Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal sind. Betrachten Sie alle diese Vektoren von einem gemeinsamen Punkt ausgehend und beschreiben Sie die Lage der Vektoren zueinander. Warum gibt es zu einem vorgegebenen Vektor beliebig viele Vektoren, die zu diesem orthogonal sind?

T1c

17 Bestimmen Sie zwei Vektoren, die sowohl auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$ als auch auf $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

Wahlaufgaben

W1
Es gibt weitere Lösungswege, um zu überprüfen, ob 4 Punkte in einer Ebene liegen. Beschreiben Sie diese an Hand von geeigneten Skizzen. Welchen Lösungsweg halten Sie für besonders geeignet. Begründen Sie!

W2

30 Zeigen Sie auf zwei Arten, dass die Diagonalen einer Raute senkrecht aufeinander stehen.

W3

32 Begründen Sie mithilfe von Vektoren: Liegt der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC auf $\overline{AB}$, dann ist $\gamma = \sphericalangle ACB = 90°$. Welcher Satz aus der Geometrie von Dreiecken wird hier bewiesen?