Stochastik

1 Grundlagen

S 1.1

Beim *Mensch-ärgere-dich-nicht* darf zu Beginn bis zu dreimal gewürfelt werden, um eine Sechs zu bekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt dies?

S 1.2

Für einen Flug stehen zwei Flugzeuge zur Verfügung, der zweimotorige „Adler“ und die viermotorige „Juhu“. Der „Adler“ fliegt auch noch, wenn nur ein Motor intakt ist. Die „Juhu“ braucht mindestens zwei intakte Motoren.

p ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Motor während des gesamten Fluges einwandfrei arbeitet.

a) Welches Flugzeug ist sicherer, wenn p = 0,95 gilt?
b) Für welche Werte von p ist der „Adler“ sicherer als die „Juhu“?

S 1.3[1]

In einer kleinen Gummibärchen-Packung befinden sich 6 rote, 3 grüne und 1 weißes Gummibärchen. Ulli und Silke haben fünf solcher Packungen. Nachdem beide zwei bekommen haben, wollen sie um die letzte Packung knobeln.

Silke: „Wir machen folgendes: Du ziehst aus jeder deiner Packungen blind ein Gummibärchen. Wenn beide die gleiche Farbe haben, bekommst du die fünfte Packung.“

Ulli: „Nein, da mache ich nicht mit. Aber ich wette, dass bei den beiden gezogenen Gummibärchen mindestens ein grünes dabei ist.“

Begründe, welcher der beiden Vorschläge für Ulli der Günstigere ist?

S 1.4

Eine ganzrationale Funktion f hat die Funktionsgleichung $f(x) = 2x^A - 5x^B + 3$.
Die Exponenten A und B sollen mit Hilfe eines fairen Würfels bestimmt werden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Schaubild von f punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. achsensymmetrisch zur y-Achse ist?

[1](http://www.rp-karlsruhe.de/servlet/PB/show/1323418/rps-75-mathematik-2013-muster.pdf)

2 Zufallsvariable und Erwartungswert

S 2.1

Beim Würfeln mit zwei Würfeln beschreibt die Zufallsvariable *X* die Summe der gefallenen Augenzahlen.

Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert von X.

S 2.2

An einer Heimatfestbude wird folgendes Spiel angeboten:
Man würfelt 2-mal und berechnet das Produkt der Augenzahlen.
Ist das Produkt 6 oder 12, so gewinnt man 3€, bei 36 gewinnt man 10€. Der Einsatz beträgt 1€ pro Spiel.

Welcher Gewinn bzw. Verlust ist durchschnittlich zu erwarten?

S 2.3

Bei einer Wohltätigkeitslotterie gewinnt man bei 15% der Lose einen Büchergutschein im Wert von 10 €, bei 20% der Lose einen Gutschein im Wert von 5 €. Ein Los kostet 2,50 €.

Ist dieser Gewinnplan fair?

S 2.4

Bei einem Fest überlegt ein cleverer Schüler, ob er an einem Glücksrad spielen soll. Zunächst stellt er folgende Rechnung auf:

$$x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \; x_3 \cdot P(x_3) = 1€ \cdot \frac{1}{3} - 3€ \cdot \frac{1}{2} + 4€ \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}€\text{-}$$

a) Welche Information erhält er durch diese Rechnung?
b) Wie könnte das verwendete Glücksrad aussehen und die Gewinnregel lauten? Beschreibe möglichst genau.

S 2.5

In einer Urne liegen fünf Kugeln, die mit Zahlen beschriftet sind:
Drei Kugeln mit der Zahl 1, eine Kugel mit der Zahl 2, eine Kugel mit der Zahl 3. Für vier Euro Einsatz darf man ohne Zurücklegen blind zwei Kugeln ziehen und erhält die Summe der gezogenen Zahlen als Auszahlung (in €).

a) Erstelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die möglichen Auszahlungen.
b) Weise nach, dass dieses Spiel nicht fair ist.
c) Mit welcher Zahl (statt 3) müsste die fünfte Kugel beschriftet sein, damit das Spiel fair ist?

3 Bernoulliformel

S 3.1

Berechne $\binom{5}{3}$ und $\binom{11}{1}$.

S 3.2

a) Erkläre die Begriffe Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette der Länge n.
b) Gib sowohl ein Beispiel als auch ein Gegenbeispiel für ein Bernoulli-Experiment an.

S 3.3

Gegeben ist die folgende Berechnungsformel für eine Wahrscheinlichkeit:

$$\binom{10}{3} \cdot (0{,}7)^3 \cdot (0{,}3)^7.$$

a) Beschreibe genau ein Experiment (mit Fachbegriffen) und das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit hier berechnet wird. Erläutere dabei auch die einzelnen Faktoren in der Formel.

b) Gib den Erwartungswert für die Trefferzahl bei diesem Experiment an und skizziere den Graphen der Wahrscheinlichkeitsverteilung für alle möglichen Trefferzahlen

S 3.4

In der Schweiz gibt es ein Lotto „6 aus 45“. Man erhält auch für „drei Richtige“ einen kleinen Gewinn. Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten sechs der 45 Kugeln zu ziehen.

S 3.5

Notiere für eine Bernoulli-Kette der Länge fünf die Formel für die Wahrscheinlichkeit für genau zwei Treffer bei einer Trefferwahrscheinlichkeit von zehn Prozent und berechne diesen Wert genau.

S 3.6

Ein Würfel wird 10 Mal geworfen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint nie die 6?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint genau 3 Mal die 6?

S 3.7

Vier faire Würfel werden gleichzeitig geworfen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Sechs.

S 3.8

Ein Schütze trifft stets mit 60% Wahrscheinlichkeit ins Schwarze und schießt 5-mal. Gib eine Formel zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeiten an (ohne sie zu berechnen):

a) Er trifft genau dreimal ins Schwarze.
b) Er trifft mindestens einmal ins Schwarze.

S 3.9

Ein Würfel wird viermal geworfen und es wird jeweils die Anzahl der gefallenen Sechser notiert.

a) Erläutere, warum es sich hierbei um ein Bernoulli-Experiment handelt. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable ,,Anzahl der Sechser".

b) Das Experiment wird als Glücksspiel eingesetzt. Man zahlt 1 Euro Einsatz und erhält nach dem Spiel folgende Auszahlungen:

- 0 Euro bei 0 Sechser
- 1 Euro bei 1 Sechser
- 3 Euro bei 2 Sechser
- 10 Euro bei 3 Sechser
- 100 Euro bei 4 Sechser

Bestimme den Erwartungswert dieses Glückspiels und interpretiere ihn.

c) Die beiden Höchstauszahlungen (für 3 und 4 Sechser) sollen - bei sonst gleichen Bedingungen - so verändert werden, dass das Spiel fair ist. Dabei sollen diese Höchstauszahlungen weiterhin im Verhältnis 1 zu 10 stehen.
Berechne die neuen (auf Cent gerundeten) Höchstauszahlungen.

S 3. 10[2]

Ein Basketballspieler übt Freiwürfe. Erfahrungsgemäß trifft er bei 80% seiner Würfe.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mit den ersten beiden Würfen zweimal?
b) Gib ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:
$P(A) = 0{,}2^{10}$ und $P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}8^{40} \cdot 0{,}2^{10}$.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei 40 Würfen mehr als 35 Mal?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei 25 Würfen höchstens 21 Mal?
e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei 30 Würfen mindestens 20 und höchstens 25 Mal?

4 Binomialverteilung

S 4.1

Eine Zufallsvariable X ist $B_{20;0,4}$ – verteilt.

a) Bestimme $P(X = 3)$.
b) Bestimme $P(X \leq 5)$.
c) Bestimme $P(X > 10)$.
d) Bestimme $P(7 \leq X \leq 12)$).

S 4.2

Eine Studie ergab, dass ein Medikament bei 75% aller Patienten eine Besserung herbeiführt. Nun behandelt ein Spezialist insgesamt 160 Patienten mit diesem Medikament.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei weniger als 110 Patienten die gewünschte Wirkung eintritt?
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für mehr als 115, aber weniger als 130 erfolgreich Behandelte!
c) Wie wahrscheinlich ist es, dass es mehr als 120 Patienten besser geht?

S 4.3

Die Ausschusswahrscheinlichkeit bei Schrauben, die man bei einem Baumarkt kauft, beträgt 3%. Was ist am wahrscheinlichsten? Berechne.

A: Es sind keine unbrauchbaren Schrauben in einer Dutzendpackung.
B: Es ist wenigstens eine unbrauchbare Schraube in einer Zwanzigerpackung.
C: Es ist mehr als eine unbrauchbare Schraube in einer Fünfzigerpackung.

S 4.4[2]

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,6.

a) Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X? Begründe deine Entscheidung.
b) Bestimme mit Hilfe der richtigen Abb. näherungsweise P(4 < X < 7) und P(X ≠ 5).

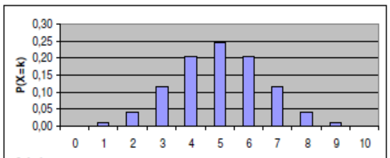


Abb. 1

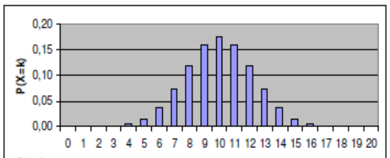


Abb. 2

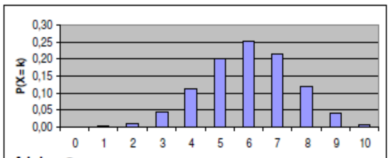


Abb. 3

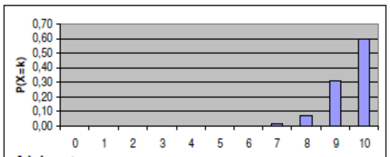


Abb. 4

S 4.5[2]

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 10. Der Erwartungswert der Zufallsvariable X ist ganzzahlig.

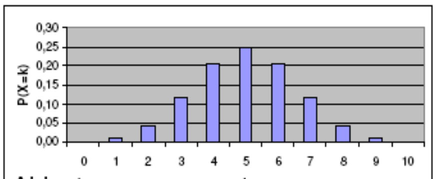


Abb. 1

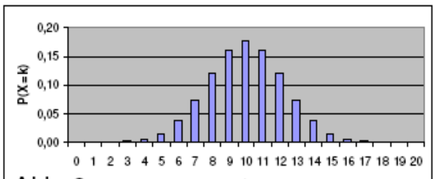


Abb. 2

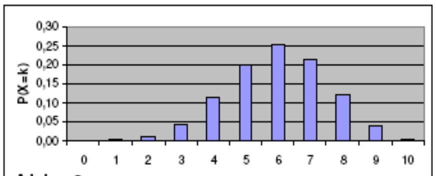


Abb. 3

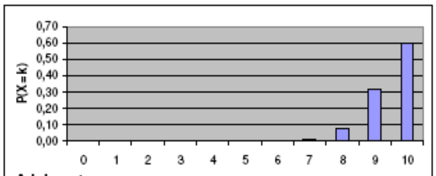


Abb. 4

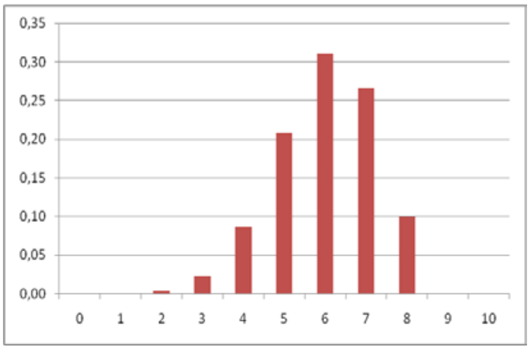
a) Welche der Abb. zeigt eine mögliche Verteilung von X? Begründe Deine Entscheidung.

b) Berechne in diesem Fall bzw. in diesen Fällen die Wahr-scheinlichkeit p der zum jeweiligen Schaubild gehörenden Bernoullikette.

S 4.6

Die Abbildung zeigt das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße X.

Erkläre, welche Länge und welche Trefferwahrscheinlichkeit die zugehörige Bernoulli-Kette haben könnte.



S 4.7

Eine Fluggesellschaft rechnet aufgrund ihrer Statistik damit, dass nur 95% der Personen, die einen Flug gebucht haben, diesen auch tatsächlich antreten. Daher überbucht sie ihre Flüge. Für einen Flug, für den es tatsächlich maximal 220 Plätze gibt, verkauft die Fluggesellschaft 225 Tickets.

a) Modelliere die Situation mithilfe einer geeigneten Binomialverteilung.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fluggäste, die ihren Flug tatsächlich antreten wollen, eine Bordkarte erhalten?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Fluggast keine Bordkarte erhält?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Fluggast keine Bordkarte erhält?

2(http://www.rp-karlsruhe.de/servlet/PB/show/1323417/rps-75-mathematik-2013-fundus.pdf)

S 4.8

Ein biologisches Experiment gelingt in 40% aller Durchführungen. Bei einem großflächigen Projekt werden gleichzeitig viele Experimente durchgeführt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment bei 160 Durchführungen mehr als 100-mal gelingt?
Berechne den Erwartungswert für das Gelingen der Experimente, bei 160 Durchführungen.

b) Wie viele Experimente müsste man mindestens durchführen, wenn man möchte, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens drei Experimente gelingen?

S 4.9

Eine Airline verkauft 130 Tickets für 125 Plätze, da erfahrungsgemäß ca. 5% aller Ticketinhaber nicht erscheinen. Falls mehr Passagiere kommen, als es Plätze gibt (Flugzeug ist „überbucht"), zahlt die Airline denjenigen, die nicht mitfliegen können, eine Entschädigung von 250 Euro.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mehr als ein Platz im Flugzeug frei?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Plätze besetzt?

c) Die Airline hat das Ziel, dass durchschnittlich höchstens 10% aller Flüge überbucht sind. Wie viele Tickets darf sie dann bei 125 Plätzen höchstens verkaufen?

S 4.10

Ein Elektronikhersteller bezieht von seinem Lieferanten Transistoren. Erfahrungsgemäß sind 6 % der Transistoren defekt.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 500 Transistoren mindestens 460 nicht defekt?

b) Wie hoch müsste die Wahrscheinlichkeit für einen nicht defekten Transistor mindestens sein, damit von 150 Transistoren mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit höchstens 4 defekt sind?

c) Die Transistoren, die zu 6 % defekt sind, werden in Einheiten zu je 5 Transistoren geliefert. Ab welcher Anzahl dieser Einheiten muss mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % damit gerechnet werden, dass bei mindestens drei Einheiten mindestens ein Transistor defekt ist?

S 4.11

Ein Sportschütze schießt beim Training 10 Mal auf eine Zielscheibe.
Wie groß muss seine Trefferwahrscheinlichkeit p mindestens sein, damit er bei diesem Training mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90%, mindestens 5 Mal trifft?

S 4.12

Wie oft muss man aus einem Skatspiel eine Karte mit Zurücklegen ziehen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70% mindestens dreimal Herz zieht?

S 4.13

Welchen Winkel muss der Sektor für die Zahl 1 bei einem Glücksrad mindestens haben, damit man bei 50 Drehungen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 6 Mal die Zahl 1 erhält?

S 4.14

Bei einem Multiple-Choice-Test gibt es 20 Fragen mit jeweils 4 Antwortmöglichkeiten.

a) Zunächst wird jeweils eine Antwort zufällig angekreuzt. Wie hoch ist der Erwartungswert für die Anzahl richtiger Antworten?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man
- genau 8 Antworten richtig?
- mindestens 8 Antworten richtig?

b) Wie viele Antworten muss man mindestens richtig haben, damit man mit mindestens 95 %-iger Wahrscheinlichkeit davon ausgehen kann, dass die Antworten nicht zufällig angekreuzt wurden?

S 4.15

Wir betrachten einen vereinfachten Känguru-Wettbewerb mit 30 Aufgaben, bei denen es sich ausschließlich um 4-Punkte-Aufgaben handelt (fünf Ankreuzmöglichkeiten, eine ist richtig, bei richtiger Lösung 4 Punkte, bei falscher Lösung -1 Punkt) und gehen davon aus, dass immer eine Lösungsmöglichkeit angekreuzt wird. Zu Beginn des Wettbewerbs erhält man 30 Punkte gut geschrieben.

a) Bestimme für zufälliges Ankreuzen die Wahrscheinlichkeit für
- genau 12 richtige Kreuze
- höchstens 10 richtige Kreuze
- mindestens 8 richtige Kreuze

b) Bestimme für zufälliges Ankreuzen
- den Erwartungswert für die Punktzahl
- die Wahrscheinlichkeit mindestens 40 und höchstens 50 Punkte zu erreichen.

c) Wie viele richtige Kreuze muss man mindestens haben, um mit mindestens 90 %-iger Wahrscheinlichkeit sagen zu können, dass sie nicht zufällig angekreuzt wurden?

d) Mehmet behauptet, dass man mindestens 10 richtige Kreuze schafft, wenn man immer nur C ankreuzt, weil C wahrscheinlicher ist, als die anderen Lösungsmöglichkeiten.
Wie hoch muss die Wahrscheinlichkeit für C mindestens sein, damit Mehmet mit mindestens 95 %-iger Wahrscheinlichkeit Recht hat.