Aufgabenpool B-Teil – bemerkenswerte Teilaufgaben – Stochastik

Konzeptionsgruppe Abitur 2024

Überblick

- Wiederkehrende Aufgabentypen (WAu)
- Aufgaben mit Inhalten aus der Sekundarstufe I
- (noch) für Baden-Württemberg ungewohnte Aufgaben
- Aufgaben mit Modellierungsaspekt (K3)

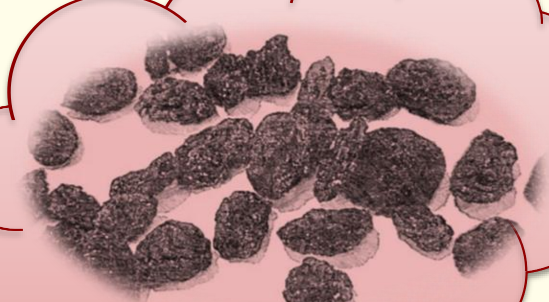


Foto: Thilo Höfer

Piktogramm: MS Powerpoint 2019

Mögliches Fazit aus der Gruppenarbeit

- Anteile (Prozent) aus der Mittelstufe 1d
- Grundwert berechnen (Mittelstufe) 1f
- ungewöhnlich 1f erneut AB I (Progression)
- 1g fast alle Kompetenzen erfasst (Statistik: Mittelstufe)
- Binomialverteilung und Normalverteilung in einer Aufgabe (in den „Corona- Abituren“ ausgeschlossen)
- 2b Normalverteilung „rückwärts“ bisher unüblich in BW, aber nicht schwer
- …

2019 WTR 2 1c

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Gleichungen aufstellen

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff.

1 Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.

c Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen.

Erwartungshorizont:

Bezeichnet man die Anzahl der an der Fahrt teilnehmenden Kinder mit k, so ist die Anzahl der Kinder, die ein Eis essen, $\frac{3}{4}k$, die Anzahl der Erwachsenen, die ein Eis essen, $\frac{1}{3}\cdot(60-k)$. Damit: $\frac{3}{4}k+\frac{1}{3}\cdot(60-k)=30 \Leftrightarrow \frac{5}{12}k=10 \Leftrightarrow k=24$	3

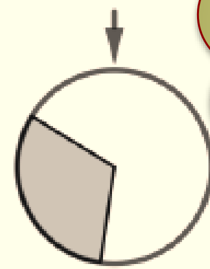
K2 K5 K6
AB II

2020 WTR 1 3b

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Gleichungen aufstellen

3 Bei der Jubiläumsfeier können die CDs sowohl zu einem Preis von 9 Euro pro Stück gekauft als auch bei einem Spiel gewonnen werden. Für das Spiel wird ein Glücksrad mit einem grauen und einem weißen Sektor verwendet (vgl. Abbildung). Für einen Einsatz von einem Euro wird das Glücksrad dreimal gedreht. Nur wenn dabei genau zweimal der grau markierte Sektor getroffen wird, erhält man eine CD. Die Größe des Öffnungswinkels des grauen Sektors im Bogenmaß wird mit b bezeichnet.



a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel eine CD zu erhalten, mithilfe des Terms $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$ berechnet werden kann.

b Es gibt Werte von b, für die die Bigband bei vielfacher Durchführung des Spiels im Mittel pro CD die gleichen Einnahmen erwarten könnte wie beim Verkauf der CD. Geben Sie eine Gleichung an, mit der diese Werte von b berechnet werden könnten.

Erwartungshorizont:

$\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3 = \frac{1}{9}$	3

K2 K3 K5
AB II

2020 WTR 1 2a https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Testen von Hypothesen

Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mindestens 5 % aller Hüllen fehlerhaft sind. Sie planten deshalb die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 10 % und der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hüllen ist kleiner als 5 %." Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisnachlass verlangen.

a Geben Sie eine Überlegung an, die zur Wahl der Nullhypothese geführt haben

Erwartungshorizont:

a	Es soll vermieden werden, dass ein Preisnachlass verlangt wird, obwohl der Anteil der fehlerhaften Hüllen kleiner als 5 % ist. Begründung: Durch die gewählte Nullhypothese wird das Risiko für den Fehler, der vermieden werden soll, begrenzt.	3

K1 K3 K6
AB III

MAThe matik

2020 WTR 1 2c https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Testen von Hypothesen

Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mindestens 5 % aller Hüllen fehlerhaft sind. Sie planten deshalb die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 10 % und der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hüllen ist kleiner als 5 %." Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisnachlass verlangen.

c Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von 250 CDs durchführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn mindestens 18 Hüllen fehlerhaft sind. Ermitteln Sie den Bereich, in dem der tatsächliche Anteil fehlerhafter Hüllen liegen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als 25 % ist.

Erwartungshorizont:

c	$P_{0,081}^{250}(Y \leq 17) \approx 0,26$ $P_{0,082}^{250}(Y \leq 17) \approx 0,24997$ Da die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art mit steigendem Anteil fehlerhafter Hüllen abnimmt, ergibt sich für den gesuchten Bereich näherungsweise $[0,082;1]$.	4

K1 K2 K3 K5 K6
AB III

ZSL

Mathematik

2021 WTR f https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Testen von Hypothesen

Aufgrund zunehmender Reklamationen wird vermutet, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln auf über 4 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu prüfen, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Kugeln beträgt höchstens 4 %." auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Kugeln getestet werden. Wenn das Ergebnis des Tests die Vermutung nicht entkräftet, soll die Produktion unterbrochen werden, um die Maschinen zu warten. Das Risiko, die Produktion irrtümlich zu unterbrechen, soll höchstens 3 % betragen.

f Für den beschriebenen Test wird der Ablehnungsbereich betrachtet. Eine der beiden Grenzen dieses Ablehnungsbereichs ist größer als 0 und kleiner als 500; diese Grenze wird mit k bezeichnet. Zur Bestimmung des Werts von k soll die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0{,}04$ verwendet werden. Begründen Sie, dass keine der beiden Ungleichungen I und II den korrekten Wert von k liefert.

I $P(Y \leq k) \leq 0{,}03$ II $P(Y \leq k) \geq 0{,}97$ *

Erwartungshorizont:

f	Unter der Annahme, dass die Nullhypothese zutrifft, soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl fehlerhafter Kugeln mindestens k beträgt, höchstens 3 % betragen bzw. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl fehlerhafter Kugeln kleiner als k ist, mindestens 97 %. Damit müsste in der Ungleichung I „ $Y \geq k$ " anstelle von „ $Y \leq k$ " und in der Ungleichung II „ $Y < k$ " anstelle von „ $Y \leq k$ " stehen.	4

K1 K3 K4 K5 **K6**
AB III

2021 WTR f

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Testen von Hypothesen

III.1 Beispielsatz

Aufgrund zunehmender Reklamationen wird vermutet, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln auf über 4 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu prüfen, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Kugeln beträgt höchstens 4 %." auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Kugeln getestet werden. Wenn das Ergebnis des Tests die Vermutung nicht entkräftet, soll die Produktion unterbrochen werden, um die Maschinen zu warten. Das Risiko, die Produktion irrtümlich zu unterbrechen, soll höchstens 3 % betragen.

f Für den beschriebenen Test wird der Ablehnungsbereich betrachtet. Eine der beiden Grenzen dieses Ablehnungsbereichs ist größer als 0 und kleiner als 500; diese Grenze wird mit k bezeichnet. Zur Bestimmung des Werts von k soll die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0{,}04$ verwendet werden. Begründen Sie, dass keine der beiden Ungleichungen I und II den korrekten Wert von k liefert.

I $P(Y \le k) \le 0{,}03$ II $P(Y \le k) \ge 0{,}97$ *

Erwartungshorizont:

f	Unter der Annahme, dass die Nullhypothese zutrifft, soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl fehlerhafter Kugeln mindestens k beträgt, höchstens 3 % betragen bzw. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl fehlerhafter Kugeln kleiner als k ist, mindestens 97 %. Damit müsste in der Ungleichung I „ $Y \ge k$ " anstelle von „ $Y \le k$ " und in der Ungleichung II „ $Y < k$ " anstelle von „ $Y \le k$ " stehen.	4

K1 K3 K4 K5 **K6**
AB III

ZSL

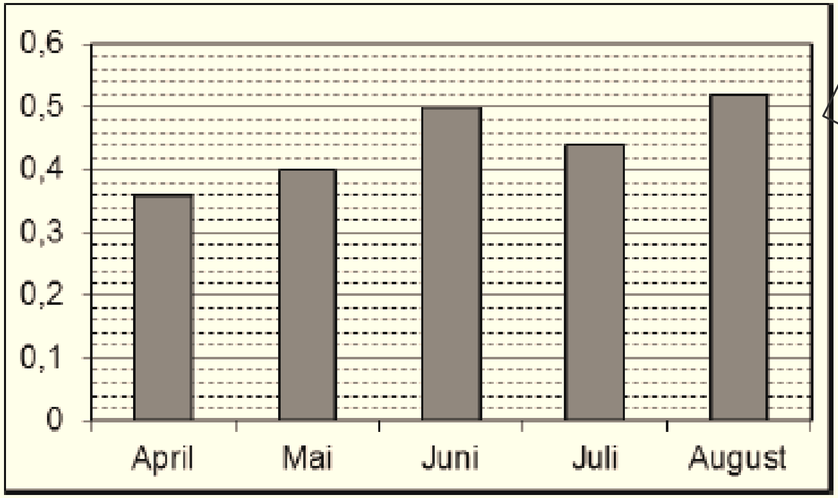
2020 WTR 2 1f https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Umgang mit Diagrammen

III 2 Beispielsatz

Ein Fahrradhändler hat festgestellt, dass es sich bei 40 % aller von ihm verkauften Fahrräder um Mountainbikes handelt. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl verkaufter Fahrräder die Anzahl der Mountainbikes binomialverteilt ist.

Die Abbildung zeigt für einige Monate des Jahres 2019 jeweils den Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern.



f Im April wurden 810 Mountainbikes verkauft. Bestimmen Sie für diesen Monat die Anzahl aller verkauften Fahrräder.

K4 K5
AB I

Erwartungshorizont: $\frac{810}{0{,}36} = 2250$ | 2

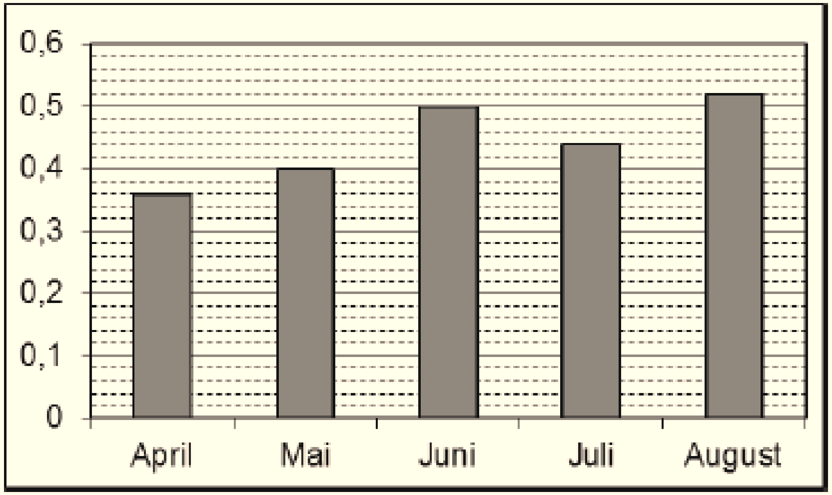
ZSL

2020 WTR 2 1g

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Umgang mit Diagrammen

Die Abbildung zeigt für einige Monate des Jahres 2019 jeweils den Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern.



g Der Anteil der Mountainbikes lag im Mai und Juni insgesamt bei 46 %; im Juli war er größer als im Mai und im August größer als im Juni. Entscheiden Sie, ob es dennoch möglich ist, dass der Anteil der Mountainbikes im Juli und August insgesamt kleiner war als insgesamt im Mai und Juni. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Erwartungshorizont:

Es ist möglich. Wurden beispielsweise im Juli 10 000 Fahrräder verkauft und im August 1000, so ergibt sich für diese beiden Monate insgesamt für den Anteil der verkauften Mountainbikes $\frac{0{,}44 \cdot 10000 + 0{,}52 \cdot 1000}{11000} < 0{,}46$.	3

K1 K2 K4 K5 K6
AB III

ZSL

2019 WTR 2 2a https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Binomial-verteilung

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.
Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

a Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

Erwartungshorizont:

Das Erscheinen bzw. Nichterscheinen erfolgt in der Regel für einige Personen mit Reservierung (z. B. befreundete Personen) nicht unabhängig voneinander.	1

K1 K3 K6
AB I

MAThematik

2021 WTR g https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Binomial-verteilung

III 1 Beispielsatz

Die Kugeln werden in Packungen verkauft. Ein Teil der verkauften Packungen wird zurückgegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine verkaufte Packung zurückgegeben wird, beträgt 3 %. Dem Unternehmen entsteht pro Packung, die zurückgegeben wird, ein Verlust von 5,80 Euro; pro Packung, die nicht zurückgegeben wird, erzielt das Unternehmen einen Gewinn von 8,30 Euro. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Unternehmen bei einem Verkauf von 200 Packungen einen Gesamtgewinn von mindestens 1500 Euro erzielt.

Erwartungshorizont:

Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl z der zurückgegebenen Packungen. $(200-z)\cdot 8{,}3 - z\cdot 5{,}8 \geq 1500 \Leftrightarrow 14{,}1z \leq 160 \Leftrightarrow z \leq 11$ Damit: $P_{0,03}^{200}(Z \leq 11) \approx 98\,\%$	4

K2 K3 K5 K6
AB III

ZSL

MAThe matik

2019 WTR 2 2c

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Binomial-verteilung p bestimmen

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

c Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau.

Erwartungshorizont:

$P_{0,14}^{64}(X \leq 3) \approx 1{,}6\,\%$, $P_{0,15}^{64}(X \leq 3) \approx 0{,}9\,\%$ Die Wahrscheinlichkeit müsste mindestens 15 % betragen.	4

K1 **K2** K5
AB III

ZSL

2015 WTR 1 3b

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Varianz allgemein

b Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X bzw. Y.

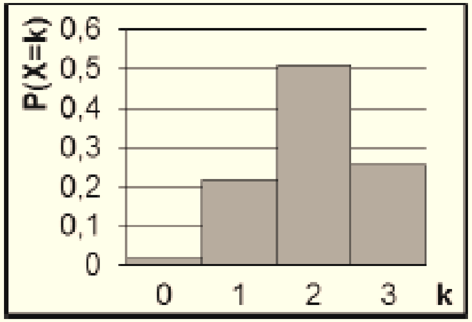


Abb. 1

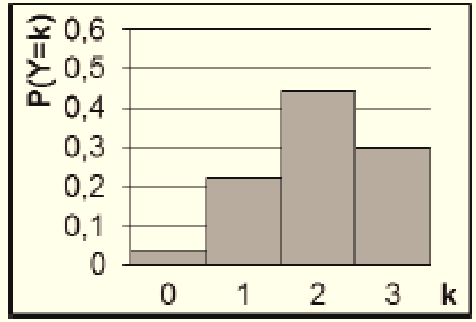


Abb. 2

Die Zufallsgröße X besitzt den Erwartungswert 2 und die Varianz $\frac{6}{11}$. Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit den Parametern $n=3$ und $p=\frac{2}{3}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass Y den gleichen Erwartungswert wie die Zufallsgröße X, aber eine größere Varianz als X besitzt. Beschreiben Sie, woran man an den Abbildungen 1 und 2 erkennen kann, dass $\mathrm{Var}(Y) > \mathrm{Var}(X)$ gilt.

Erwartungshorizont:

$E(Y)=3\cdot\frac{2}{3}=2$, $\mathrm{Var}(Y)=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ Beschreibung: Die Wahrscheinlichkeiten für die drei Werte, die nicht mit dem Erwartungswert übereinstimmen, sind für den Wert 1 bei beiden Zufallsgrößen etwa gleich groß und für die Werte 0 und 3 bei der Zufallsgröße Y deutlich größer als bei der Zufallsgröße X.	4

K1 K4 K5
AB III

ZSL

2019 WTR 1 1e

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Ereignis angeben

Für ein Schwimmbad besitzen 2000 Personen eine Jahreskarte. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.

e Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, das durch das abgebildete Baumdiagramm dargestellt wird. Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit $1-(r+s)$ beträgt.

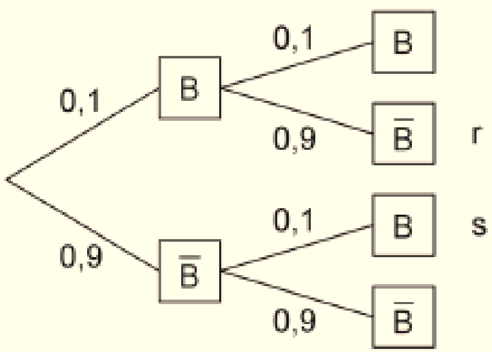


Abb. 1

Erwartungshorizont:

Zufallsexperiment: Zwei Jahreskartenbesitzer werden zufällig ausgewählt. Ereignis: „Am betrachteten Tag wird das Schwimmbad entweder von beiden ausgewählten Personen besucht oder von keiner der beiden."	2

K1 K3 K4
AB III

2019 WTR 1 2c https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Normalverteilung Intervallgrenzen

An einem bestimmten Tag ist das Schwimmbad zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Zeitpunkt, zu dem ein zufällig ausgewählter Badegast das Schwimmbad betritt, mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert 14,5 und der Standardabweichung 2 beschrieben werden kann. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der Abbildung 2 dargestellt; dabei ist t die seit 00:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden.

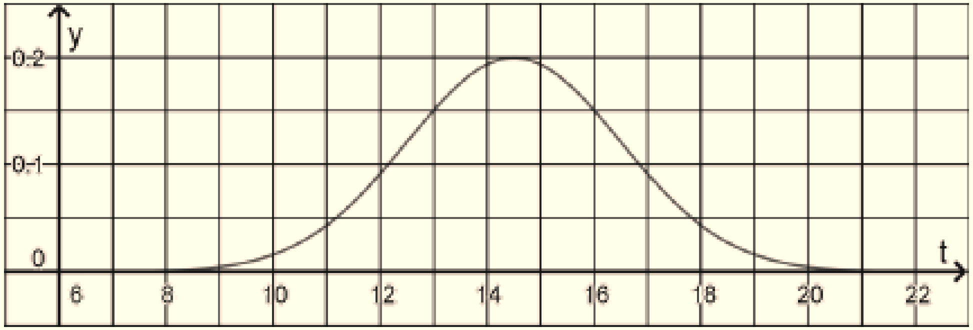


Abb. 2

c Am betrachteten Tag wird das Schwimmbad von 2500 Badegästen besucht. Ermitteln Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt mit dem Eintreffen des eintausendfünfhundertsten Badegasts zu rechnen ist.

Erwartungshorizont:

$P(7 \leq Y \leq k) = \frac{1500}{2500}$ liefert $k \approx 15$, d. h. mit dem Eintreffen des eintausendfünfhundertsten Badegasts ist etwa um 15:00 Uhr zu rechnen.	3

K2 K3 K5
AB III

ZSL

2020 WTR 2 2b

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Normalverteilung Intervallgrenzen

Zucker wird in unterschiedlich großen Packungen angeboten. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Packungsgröße die tatsächliche Masse des Zuckers durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

b Bei einer anderen Packungsgröße beträgt der Erwartungswert für die Masse des Zuckers 250 g, die Standardabweichung 5 g. Bestimmen Sie – auf 1 g genau – das kleinste Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % die tatsächliche Masse des Zuckers enthält und symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts ist.

Erwartungshorizont:

X: Masse des Zuckers in Gramm $P(239 \le X \le 261) \approx 97{,}2\%$ und $P(238 \le X \le 262) \approx 98{,}4\%$ liefern $[238;262]$.	3

K2 K3 K5 K6
AB II

ZSL

MATHEMATIK

2020 WTR 2 2b

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Normalverteilung Intervallgrenzen

Zucker wird in unterschiedlich großen Packungen angeboten. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Packungsgröße die tatsächliche Masse des Zuckers durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

b Bei einer anderen Packungsgröße beträgt der Erwartungswert für die Masse des Zuckers 250 g, die Standardabweichung 5 g. Bestimmen Sie – auf 1 g genau – das kleinste Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % die tatsächliche Masse des Zuckers enthält und symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts ist.

III 2 Beispielsatz

Erwartungshorizont:

X: Masse des Zuckers in Gramm $P(239 \le X \le 261) \approx 97{,}2\%$ und $P(238 \le X \le 262) \approx 98{,}4\%$ liefern $[238;262]$.	3

K2 K3 K5 K6
AB II

ZSL

2015 WTR 1 1a

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik

Baumdiagramm oder Vierfeldertafel

In einer Großstadt steht die Wahl des Oberbürgermeisters bevor. Vor Beginn des Wahlkampfs wird eine repräsentative Umfrage unter den Wahlberechtigten durchgeführt. Der Umfrage zufolge haben sich 44 % der befragten Wahlberechtigten bereits für einen Kandidaten entschieden; jeder Siebte derjenigen Befragten, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, ist Jungwähler, d. h. eine wahlberechtigte Person im Alter bis 24 Jahre. Der Anteil dieser Jungwähler unter den Wahlberechtigten beträgt 12 %.

a Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm oder eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

Erwartungshorizont:

J: „Die befragte Person ist Jungwähler."
K: „Die befragte Person hat sich bereits für einen Kandidaten entschieden." 4

	J	$\overline{J}$	
K	4 %	40 %	44 %
$\overline{K}$	8 %	48 %	56 %
	12 %	88 %	100 %

K3 K4 K6
AB II