Vertiefte verständnisorientierte Übungsaufgaben (vvü-Aufgaben)

Konzeptionsgruppe Abitur 2024

vvü-Aufgaben

Mit Hilfe von sogenannten „vvü- Aufgaben“ soll das Verständnis der Schülerinnen und Schüler für die erarbeiteten Themen gestärkt werden.

Zur Lösung dieser Aufgaben sind nicht langwierige, komplexe algebraische Umformungen und Rechnungen notwendig, sondern es wird ein grundlegendes Verständnis des Gelernten vorausgesetzt.

vvü-Aufgaben

Die Aufgaben der folgenden Aufgabensammlung sind **nicht** als Beispiele für „zukünftige“ Abituraufgaben zu sehen.

Es handelt sich um **Übungsaufgaben** für den Unterricht der Kursstufe.
Diese sollen zum einen aufzeigen, inwieweit die Schülerinnen und Schüler die Themen verstanden haben und zum anderen gewisse Begriffe aus der Mittelstufe wiederholen.

vvü-Aufgaben

In diese Aufgabensammlung wurden bewusst auch Grundkenntnisse aus der Mittelstufe integriert, da diese bei Aufgaben aus den gemeinsamen Abituraufgaben-pools der Länder (gAdL) stärker auftreten, als bei den bisherigen Abituraufgaben in BW.

Hier sind insbesondere die Mittelstufengeometrie als auch der Umgang mit Daten (Statistik) zu nennen.

vvü-Aufgaben

Alle Aufgaben umfassen mehrere Teilaufgaben, wobei oft auch das Prinzip der „Aufgabenvariation“ verwendet wurde.

Zu allen Aufgaben wurden auch Lösungsvorschläge erstellt.

Aufgabensammlung für den Unterricht

In dieser Aufgabensammlung befinden sich:

- 6 Aufgaben aus der Analysis
- 5 Aufgaben aus der analytischen Geometrie
- 6 Aufgaben aus der Stochastik (bzw. Statistik)

Aufgaben aus dem Bereich Analysis

- Bei allen Aufgaben wird eine neue Funktion g mithilfe einer gegebenen Funktion f definiert.
- Dabei ist zunächst die Funktionsgleichungen der gegebenen Funktionen f unbekannt.
- In den Aufgaben 1 bis 3 wird in den ersten Teilaufgaben der Sonderfall der linearen Funktionen betrachtet.

Aufgaben aus dem Bereich Analysis

Beispiele für Themen, die in den Aufgaben vorkommen:

- Symmetrie von Graphen (A1, A2 und A4)
- Monotonie von Funktionen (A1 und A3)
- Aussagen über Funktionswerte (A1 und A5)
- Nullstellen von Funktionen (A3, A4 und A6)
- Ableitungen; Extremstellen (A1, A2, A4, A5 und A6)
- Umkehrfunktion (A6)
- Integralfunktion (A5)

Aufgaben aus dem Bereich Geometrie

Beispiele für Mittelstufenthemen in den Aufgaben:

- Drachenviereck (A1 und A3)
- „Mittelsenkrechte“ (A2)
- Winkelhalbierende (A4)
- Streckenverhältnisse (A5)

Aufgaben aus dem Bereich Stochastik

Beispiele für Mittelstufenthemen in den Aufgaben:

- Statistik (A1 und A3)
- Kombinatorik (A4 und A5)
- Bedingte Wahrscheinlichkeit (A2)
- Ziehen ohne Zurücklegen (A6)

Arbeitsauftrag

Lösen Sie die folgenden Aufgaben aus der Analysis:

- Aufgabe 4
- Aufgabe 6

Arbeitszeit: 15 Minuten

Beispiel (Analysis A4)

AUFGABE 4 Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens dreimal differenzierbare Funktion f und eine Funktion g mit $g(x) = x \cdot f(x)$ und $D_f = D_g = I$.

a) Der Graph von g ist symmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y- Achse ist.

b) $x_1 = 1$ ist eine innere Stelle von I. Der Graph von g hat den Tiefpunkt $T(1|0)$.

Zeigen sie, dass auch der Graph von f den Tiefpunkt T besitzt.

c) Die Graphen von f und g schneiden sich im Punkt $S(1|-2)$ senkrecht.

Zeigen sie, dass die Tangente in S an den Graphen von f parallel zur 1.Winkelhalbierenden ist.

d) f hat die innere Extremstelle $x_1 = 0$.

Zeigen Sie, dass g die innere Wendestelle $x_1 = 0$ besitzt.

e) Es gilt $(g(2) - f(2)) \cdot (g(3) - f(3)) < 0$

Begründen Sie, dass f auf dem Intervall $]2; 3[$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

Beispiel (Analysis A4d) Lösung

d) f hat die innere Extremstelle $x_1 = 0$.

Zeigen Sie, dass g die innere Wendestelle $x_1 = 0$ besitzt.

Es gilt: $f'(0) = 0$ und f' hat bei $x_1 = 0$ einen Vorzeichenwechsel.

$g''(x) = f'(x) + 1 \cdot f'(x) + x \cdot f''(x) = 2 \cdot f'(x) + x \cdot f''(x)$

➔ $g''(0) = 2 \cdot f'(0) + 0 \cdot f''(0) = 0 + 0 = 0$

Da f' bei $x_1 = 0$ einen Vorzeichenwechsel hat, kann f " bei $x_1 = 0$ keinen Vor-Zeichenwechsel haben.

Da f' und $x \cdot f''$ bei $x_1 = 0$ den gleichen Vorzeichenwechsel haben, hat auch g'' einen Vorzeichenwechsel bei $x_1 = 0$. Also ist $x_1 = 0$ eine Wendestelle von g.

Beispiel (Analysis A4e) Lösung

e) Es gilt $(g(2) - f(2)) \cdot (g(3) - f(3)) < 0$

Begründen Sie, dass f auf dem Intervall $]2;3[$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

$g(2) = 2 \cdot f(2) \Rightarrow g(2) - f(2) = 2 \cdot f(2) - f(2) = f(2)$

$g(3) = 3 \cdot f(3) \Rightarrow g(3) - f(3) = 3 \cdot f(3) - f(3) = 2f(3)$

$\Rightarrow f(2) \cdot 2f(3) < 0 \Rightarrow$ Somit haben $f(2)$ und $f(3)$ verschiedene Vorzeichen.

Da f stetig ist, muss f im Intervall $]2;3[$ mindestens eine Nullstelle besitzen.

Beispiel (Analysis A6)

AUFGABE 6 Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion f, die auf I umkehrbar ist und die Funktion g mit $g(x) = \frac{f(x) - \overline{f}(x)}{2}$.

a) Der Graph von f hat im Punkt $P(0|1)$ eine Tangente mit der Steigung 0,5.
Der Graph von $\overline{f}$ hat im Punkt $Q(1|0)$ eine Tangente.
Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

b) Die Graphen von f und $\overline{f}$ berühren sich im Punkt B.
Bestimmen Sie die Steigung der gemeinsamen Tangente im Punkt B.

c) Es gilt $f(4) = 4$.
Begründen Sie, das g die Nullstelle 4 besitzt.

d) Sei f eine lineare Funktion mit $f(x) \neq x$ und $f(x) \neq -x + c$.
Begründen Sie, dass g höchstens eine Nullstelle besitzen kann.

Beispiel (Analysis A6d) Lösung

d) Sei f eine lineare Funktion mit $f(x) \neq x$ und $f(x) \neq -x + c$.

Begründen Sie, dass g höchstens eine Nullstelle besitzen kann.

$f(x) = mx + c$ mit (m ; c) ≠ (1 ; 0) und m ≠ − 1. Da f umkehrbar ist, gilt $m \neq 0$.

$\overline{f}(x) = \frac{1}{m} \cdot (x - c) = \frac{1}{m} \cdot x - \frac{c}{m}$ ➔ $g(x) = \frac{mx+c-\left(\frac{1}{m} \cdot x - \frac{c}{m}\right)}{2} = \frac{mx+c-\frac{1}{m} \cdot x+\frac{c}{m}}{2}$

➔ $g(x) = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right) \cdot x + \frac{1}{2}\left(c + \frac{c}{m}\right)$.

Fall1: m = 1 ; c ≠ 0 ➔ $g(x) = c$ ➔ g hat keine Nullstelle.

Fall 2: m ≠ ± 1, $\left(m - \frac{1}{m}\right) \neq 0$ ➔ g hat genau eine Nullstelle.

Beispiel (Analysis A6d) Lösung

Alternative Begründung:

Fall 1: $f(x) = x + c$ mit $c \neq 0$

Der Graph von f ist parallel zur 1.Winkelhalbierenden ➔ Die Graphen von f und $\overline{f}$ schneiden sich nicht ➔ $\overline{f}(x) \neq f(x)$ für alle $x \in I$ ➔ g hat keine Nullstelle.

Fall 2: $f(x) = m \cdot x + c$ mit $m \neq \pm 1$

Der Graph von f ist weder parallel noch senkrecht zur 1.Winkelhalbierenden
➔ Die Graphen von f und $\overline{f}$ schneiden sich genau im Punkt $S(x_1|x_1)$ auf der 1.Winkelhalbierenden.
➔ $\overline{f}(x_1) = f(x_1) = x_1$ ➔ $g(x_1) = 0$ ➔ g hat genau die Nullstelle x_1.

Beispiel (Geometrie A1)

AUFGABE 1 Gegeben sind die Punkte $A(4 \mid -2 \mid 1)$, $B(3 \mid 5 \mid 3)$ und $C(-2 \mid 4 \mid 4)$.

a) Begründen Sie, dass das Dreieck ABC nicht zu einer Raute ABCD ergänzt werden kann.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Drachenvierecks.

d) Für den Punkt $D(-3 \mid -1 \mid 3)$ ist das Viereck ABCD ein Drachenviereck.
Auf der Geraden AC gibt es einen Punkt E so, dass das Viereck ABED eine Raute ist.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E.

Beispiel (Geometrie A1b) Lösung

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.

Gesucht ist ein Punkt D in der Ebene ABC mit der Eigenschaft, dass B und D achsensymmetrisch zur Diagonalen AC liegen.

Sei P ein beliebiger Punkt auf AC, dann gilt: $\vec{p} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Also $P(4 - 6r \mid -2 + 6r \mid 1 + 3r)$. Es muss gelten: $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 - 6r \\ -7 + 6r \\ -2 + 3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -6 + 36r - 42 + 36r - 6 + 9r = 81r - 54 = 0$$

➔ $r = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$ ➔ $P(0 \mid 2 \mid 3)$

P ist die Mitte der Strecke BD ➔ $\vec{d} = \vec{b} + 2 \cdot \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

➔ $D(-3 \mid -1 \mid 3)$

Beispiel (Stochastik A1)

AUFGABE 1 Gegeben sind die Anteile dreier Typen von PKW unter den Neuzulassungen in einem Land in den Jahren 2018, 2019 und 2020.
Im Jahr 2018 wurden in diesem Land 300 000 PKW neu zugelassen.

Jahr	2018	2019	2020
Diesel	50%	40%	30%
Benzin	43%	50%	52%
Elektro/Hybrid	7%	10%	18%

a) In einer Zeitung steht folgende Aussage: „Der Anteil der neuzugelassenen Diesel-PKW in den Jahren 2018 und 2019 insgesamt ist größer als der Anteil der neuzugelassenen Benzin- PKW im gleichen Zeitraum."
Entscheiden Sie ob, diese Aussage wahr sein kann und begründen Sie ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie die Mindestanzahl an PKW, die in diesem Land im Jahr 2019 neu zugelassen worden sind, wenn die Aussage aus a) falsch ist.

c) Im Jahr 2019 wurden in diesem Land 240 000 PKW neu zugelassen.
Der Anteil der Elektro/Hybrid- PKW die insgesamt in den drei Jahren neu zugelassen worden sind beträgt 12%.

Bestimmen Sie den prozentualen Anstieg der Anzahl der Elektro/Hybrid- PKW vom Jahr 2019 zum Jahr 2020.

Beispiel (Stochastik A1a) Lösung

a) In einer Zeitung steht folgende Aussage: „Der Anteil der neuzugelassenen Diesel-PKW in den Jahren 2018 und 2019 insgesamt ist größer als der Anteil der neuzugelassenen Benzin- PKW im gleichen Zeitraum."
Entscheiden Sie ob, diese Aussage wahr sein kann und begründen Sie ihre Entscheidung.

Die Aussage kann wahr sein.

Beispiel: Im Jahr 2019 wurden insgesamt 200 000 PKW neu zugelassen.

Anzahl der Diesel- PKW 2018: $0{,}5 \cdot 300\,000 = 150\,000$

Anzahl der Diesel- PKW 2019: $0{,}4 \cdot 200\,000 = 80\,000$

Anzahl der Diesel- PKW insgesamt: $150\,000 + 80\,000 = 230\,000$

Anzahl der Benzin- PKW 2018: $0{,}43 \cdot 300\,000 = 129\,000$

Anzahl der Benzin- PKW 2019: $0{,}5 \cdot 200\,000 = 100\,000$

Anzahl der Benzin- PKW insgesamt: $129\,000 + 100\,000 = 229\,000$

Da die absolute Anzahl der Diesel-PKW größer als die der Benzin-PKW ist, gilt dies auch für deren Anteile (da der Grundwert derselbe ist)