**Vertieft verständnisorientierte Übungsaufgaben aus der Analysis**

**Lösungen**

**AUFGABE 1** Gegeben ist eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion g und eine Funktion h mit und .

a) Sei g eine lineare, nicht konstante Funktion.

Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Funktion h ebenfalls eine lineare

nicht konstante Funktion ist.

Es gilt mit .

🡺

h ist genau dann eine lineare Funktion, die nicht konstant ist falls gilt:

und

🡺

🡺 🡺 🡺

h ist genau dann eine lineare nicht konstante Funktion, falls gilt:

mit

b) Sei der Graph von g und der Graph von h. Es gilt: mit

Für ein c schneiden sich und senkrecht in S.

Bestimmen Sie c und zudem die Koordinaten von S.

(1) 🡺

(2) 🡺 🡺

Einsetzen in (1) liefert: 🡺 🡺 🡺

Koordinaten von S:

c) Es gilt .

Bestimmen Sie alle möglichen Werte von.

🡺

Vieta: 🡺 oder

d) Sei punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass für alle Funktionswerte von g nicht negativ sind.

Es gilt für alle .

Mit und folgt:

🡺

Aus und folgt 🡺

Jedes kann als Quadrat eines interpretiert werden.

🡺

e) Sei .

Bestimmen Sie und .

🡺

🡺 🡺 🡺 🡺

f) Begründen Sie, dass gilt: Aus folgt .

Aus folgt: 🡺

Da und das gleiche Quadrat besitzen, müssen sie den gleichen Betrag

haben.

g) Sei h streng monoton wachsend und , zudem sei eine innere Stelle von I, die keine Wendestelle von h ist.

Untersuchen Sie, ob g ebenfalls streng monoton wachsend sein kann.

Aus folgt

Da genau einer der beiden Faktoren positiv und der andere negativ sein muss, gilt:

🡺

Mit folgt

Da h streng monoton wachsend ist, gilt .

Somit folgt 🡺 g ist auf I nicht streng monoton wachsend.

**AUFGABE 2** Gegeben sind die auf dem gleichen Intervall I mindestens zweimal

differenzierbare Funktionen f und g.

Zudem die auf I definierte Funktion h mit .

a) Seien f und g jeweils lineare Funktionen.

Zeigen Sie, dass dann auch h eine lineare Funktion ist.

Es gilt bzw. .

🡺

Mit und folgt:

Also ist h eine lineare Funktion.

b) Die Graphen der beiden linearen Funktionen f und g schneiden sich senkrecht auf

der positiven y- Achse im Punkt S.

Untersuchen Sie, ob der Graph von h ebenfalls durch den Punkt S verlaufen kann.

Da sich und auf der positiven y- Achse schneiden, gilt:

Für den Schnittpunkt gilt:

Aus folgt zudem (I)

Funktionsgleichung von h:

Punktprobe für S: 🡺

Mit folgt bzw. 🡺 Widerspruch zu (I)

🡺 S kann nicht auf dem Graphen von h liegen.

c) Der Graph von f ist symmetrisch zur y- Achse.

Untersuchen Sie, ob der Graph von h ebenfalls eine einfache Symmetrie

besitzt.

Es gilt für alle .

🡺 für alle .

Somit ist auch der Graph von h symmetrisch zur y- Achse.

d) Der Graph ist symmetrisch zur y- Achse.

Untersuchen Sie, ob dann auch und symmetrisch zur y- Achse sein müssen.

Gegenbeispiel: ; 🡺

Der Graph von h ist offensichtlich symmetrisch zur y- Achse. Allerdings ist der

Graph von g nicht symmetrisch zur y- Achse.

e) hat den Hochpunkt .

Untersuchen Sie unter welchen Bedingungen h an der inneren Stelle

ebenfalls ein lokales Maximum besitzt.

Es gilt: , und

🡺

🡺

🡺

Damit ein lokales Maximum vorliegt, muss gelten:

🡺

Wegen muss sein.

**AUFGABE 3** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Sei f eine lineare, nicht konstante Funktion.

Zeigen Sie, dass f und g die gleichen Nullstellen besitzen.

Aus folgt 🡺 ist Nullstelle von g

b) Zeigen Sie, dass g ebenfalls eine lineare Funktion ist.

mit 🡺

; somitist auch g eine lineare Funktion

c) Sei f eine Potenzfunktion mit mit .

Bestimmen Sie r so, dass g eine konstante Funktion ist.

🡺 🡺

g ist genau dann eine konstante Funktion, falls gilt: 🡺

d) Sei g streng monoton wachsend.

Untersuchen Sie, ob dann auch f streng monoton wachsend sein muss.

Gegenbeispiel: 🡺 🡺

g ist streng monoton wachsend auf ganz IR, aber f nicht.

**AUFGABE 4** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens dreimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Der Graph von g ist symmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y- Achse ist.

Es gilt für alle .

; 🡺 🡺 Da der Fall

nicht relevant ist () gilt: für alle .

Also ist der Graph von f symmetrisch zur y- Achse.

b) ist eine innere Stelle von I. Der Graph von g hat den Tiefpunkt .

Zeigen sie, dass auch der Graph von f den Tiefpunkt T besitzt.

🡺 🡺 🡺 T liegt auf dem Graphen von f.

Da T Tiefpunkt des Graphen von g ist und gilt, wechselt g bei das

Vorzeichen nicht. Das Vorzeichen von g ist auf einer Umgebung von x1 positiv.

Aus und folgt: Auch f ist auf einer Umgebung von x1

positiv. Somit ist auf einer Umgebung von der kleinste Funktionswert,

also ein lokales Minimum.

Somit ist T ebenfalls ein Tiefpunkt des Graphen von f.

c) Die Graphen von f und g schneiden sich im Punkt senkrecht.

Zeigen sie, dass die Tangente in S an den Graphen von f parallel zur 1.Winkel-

halbierenden ist.

Es gilt: ;

Mit folgt:

🡺 🡺 🡺

Somit hat die Tangente in S an den Graphen von f die Steigung 1 und ist parallel

zur 1.Winkelhalbierenden.

d) f hat die innere Extremstelle .

Zeigen Sie, dass g die innere Wendestelle besitzt.

Es gilt: und hat bei einen Vorzeichenwechsel.

🡺

Da bei einen Vorzeichenwechsel hat, kann f ‘‘ bei keinen Vor-

Zeichenwechsel haben.

Da und bei den gleichen Vorzeichenwechsel haben, hat auch

einen Vorzeichenwechsel bei . Also ist eine Wendestelle von g.

e) Es gilt

Begründen Sie, dass f auf dem Intervall mindestens eine Nullstelle besitzt.

🡺

🡺

🡺 🡺 Somit haben und verschiedene Vorzeichen.

Da f stetig ist, muss f im Intervall mindestens eine Nullstelle besitzen.

**AUFGABE 5** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f und der Graph von g mindestens einen Punkt

gemeinsam haben.

Es gilt:

🡺 liegt auf beiden Graphen

b) Entscheiden sie, ob folgende Aussage wahr oder falsch ist (Begründen Sie!)

„Wenn für alle Funktionswerte von f positiv sind, dann gilt

für alle .“

Es gilt: . Aus folgt, dass der Graph von f für

oberhalb der x-Achse liegt und damit der Wert des Integrals positiv ist.

🡺 🡺 für alle 🡺 Die Aussage ist wahr.

c) Es gilt . Sei t die Tangente an den Graphen von f im Punkt und t\*

die Tangente an den Graphen von g im Punkt .

Zeigen Sie, dass t und t\* parallel zueinander sind.

Mit folgt:

Somit haben die beiden Tangenten t und t\* die gleiche Steigung und sind dem-

nach parallel zueinander.

d) Sei f eine periodische Funktion mit der Periode p, deren Mittelwert über eine

Periode 0 ist.

Zeigen Sie, dass die Funktion g ebenfalls eine periodische Funktion ist.

Es gilt:

Da der Mittelwert über eine Periode 0 ist, gilt: 🡺

🡺

🡺 🡺 g ist eine periodische Funktion.

**AUFGABE 6** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal

differenzierbare Funktion f, die auf I umkehrbar ist und die Funktion g mit

.

a) Der Graph von f hat im Punkt eine Tangente t mit der Steigung 0,5.

Der Graph von hat im Punkt eine Tangente t\*.

Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente t\*.

Da der Graph von durch Spiegelung des Graphen von f an der 1.Winkelhalbier-

enden entsteht, entsteht auch t\* durch Spiegelung von t an der 1.Winkelhalbieren-

den. Somit beträgt deren Steigung .

b) Es gilt . Die Graphen von f und berühren sich im Punkt .

Bestimmen Sie die Steigung der gemeinsamen Tangente im Punkt B.

Es gilt und . Zudem gilt .

🡺 🡺 🡺

Die Steigung beträgt also oder .

c) Es gilt .

Begründen Sie, das g die Nullstelle 4 besitzt.

Es gilt: 🡺 ; Also ist 4 eine Nullstelle von g.

d) Sei f eine lineare Funktion mit und .

Begründen Sie, dass g höchstens eine Nullstelle besitzen kann.

mit ( m ; c ) ≠ ( 1 ; 0 ) und m ≠ – 1. Da f umkehrbar ist, gilt .

🡺

🡺 .

Fall1: m = 1 ; c ≠ 0 🡺 🡺 g hat keine Nullstelle.

Fall 2: m ≠ ± 1, 🡺 g hat genau eine Nullstelle.

Alternative Begründung:

Fall 1: mit c ≠ 0

Der Graph von f ist parallel zur 1.Winkelhalbierenden 🡺 Die Graphen von f und

schneiden sich nicht 🡺 für alle 🡺 g hat keine Nullstelle.

Fall 2: mit m ≠ ±1

Der Graph von f ist weder parallel noch senkrecht zur 1.Winkelhalbierenden

🡺 Die Graphen von f und schneiden sich genau im Punkt auf der

1.Winkelhalbierenden.

🡺 🡺 🡺 g hat genau die Nullstelle .