Vertieft verständnisorientierte Übungsaufgaben aus der Analysis

Lösungen

AUFGABE 1 Gegeben ist eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion g und eine Funktion h mit $h(x) = g(x)^2 - g(x^2)$ und $D_h = D_g = I$.

a) Sei g eine lineare, nicht konstante Funktion.

Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Funktion h ebenfalls eine lineare nicht konstante Funktion ist.

Es gilt $g(x) = m \cdot x + c$ mit $m \neq 0$.

➔ $h(x) = g(x)^2 - g(x^2) = (m \cdot x + c)^2 - (m \cdot x^2 + c) = m^2x^2 + 2mcx + c^2 - mx^2 - c$

$h(x) = (m^2 - m) \cdot x^2 + 2mcx + c^2 - c$

h ist genau dann eine lineare Funktion, die nicht konstant ist falls gilt:

$m^2 - m = 0$ und $2mc \neq 0$

$m^2 - m = m \cdot (m - 1) = 0$ ➔ $m = 1$

➔ $2mc = 2c \neq 0$ ➔ $c \neq 0$ ➔ $h(x) = 2cx + c^2 - c$

h ist genau dann eine lineare nicht konstante Funktion, falls gilt:

$g(x) = x + c$ mit $c \neq 0$

b) Sei G_g der Graph von g und G_h der Graph von h. Es gilt: $g(x) = x + c$ mit $c \neq 0$

Für ein c schneiden sich G_g und G_h senkrecht in S.

Bestimmen Sie c und zudem die Koordinaten von S.

$h(x) = g(x)^2 - g(x^2) = (x + c)^2 - (x^2 + c) = x^2 + 2cx + c^2 - x^2 - c = 2cx + c^2 - c$

(1) $g(x) = h(x)$ ➔ $x + c = 2cx + c^2 - c$

(2) $g'(x) \cdot h'(x) = -1$ ➔ $1 \cdot 2c = -1$ ➔ $c = -\frac{1}{2}$

Einsetzen in (1) liefert: $x - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ ➔ $2x = \frac{5}{4}$ ➔ $x = \frac{5}{8}$ ➔ $y = g\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{8}$

Koordinaten von S: $S\left(\frac{5}{8} \mid \frac{1}{8}\right)$

c) Es gilt $h(0) = 2$.

Bestimmen Sie alle möglichen Werte von $g(0)$.

$h(0) = g(0)^2 - g(0^2) = g(0)^2 - g(0) = 2$ ➔ $g(0)^2 - g(0) - 2 = 0$

Vieta: $(g(0) - 2) \cdot (g(0) + 1) = 0$ ➔ $g(0) = 2$ oder $g(0) = -1$

d) Sei $\mathrm{G_h}$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass für $I = [0; \infty[$ alle Funktionswerte von g nicht negativ sind.

Es gilt $\mathrm{h(-x) = g(-x)^2 - g((-x)^2) = -h(x)}$ für alle $x \in I$.

Mit $\mathrm{-h(x) = -g(x)^2 + g(x^2)}$ und $\mathrm{g((-x)^2) = g(x^2)}$ folgt:

$\mathrm{g(-x)^2 - g(x^2) \ = -g(x)^2 + g(x^2)}$ ➔ $\mathrm{g(-x)^2 + g(x)^2 = 2g(x^2)}$

Aus $\mathrm{g(-x)^2 \geq 0}$ und $\mathrm{g(x)^2 \geq 0}$ folgt $\mathrm{2g(x^2) \geq 0}$ ➔ $\mathrm{g(x^2) \geq 0}$

Jedes $u \in I$ kann als Quadrat eines $x \in I$ interpretiert werden.

➔ $g(u) = \mathrm{g(x^2) \geq 0}$

e) Sei $\mathrm{h'(1) = g'(1) = 2}$.

Bestimmen Sie $\mathrm{g(1)}$ und $\mathrm{h(1)}$.

$\mathrm{h'(x) = 2g(x) \cdot g'(x) - g'(x^2) \cdot 2x}$ ➔ $\mathrm{h'(1) = 2g(1) \cdot g'(1) - g'(1) \cdot 2 = 2}$

➔ $\mathrm{g'(1) \cdot (g(1) - 1) = 1}$ ➔ $\mathrm{2 \cdot (g(1) - 1) = 1}$ ➔ $\mathrm{g(1) - 1 = \frac{1}{2}}$ ➔ $\mathrm{g(1) = \frac{3}{2}}$

$h(1) = \mathrm{g(1)^2 - g(1^2) = g(1)^2 - g(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}}$

f) Begründen Sie, dass gilt: Aus $\mathrm{h(1) = h(-1)}$ folgt $\mathrm{|g(1)| = |g(-1)|}$.

$h(1) = \mathrm{g(1)^2 - g(1^2) = g(1)^2 - g(1)}$

$h(-1) = \mathrm{g(-1)^2 - g((-1)^2) = g(-1)^2 - g(1)}$

Aus $\mathrm{h(1) = h(-1)}$ folgt: $\mathrm{g(1)^2 - g(1) = g(-1)^2 - g(1)}$ ➔$\mathrm{g(1)^2 = g(-1)^2}$

Da $\mathrm{g(1)}$ und $\mathrm{g(-1)}$ das gleiche Quadrat besitzen, müssen sie den gleichen Betrag haben.

g) Sei h streng monoton wachsend und $\mathrm{h(1) < 0}$, zudem sei $x_1 = 1$ eine innere Stelle von I, die keine Wendestelle von h ist.

Untersuchen Sie, ob g ebenfalls streng monoton wachsend sein kann.

Aus $\mathrm{h(1) < 0}$ folgt $\mathrm{g(1)^2 - g(1) = g(1) \cdot (g(1) - 1) < 0}$

Da genau einer der beiden Faktoren positiv und der andere negativ sein muss, gilt:

$\mathrm{0 < g(1) < 1}$

$\mathrm{h'(x) = 2g(x) \cdot g'(x) - g'(x^2) \cdot 2x}$

➔ $\mathrm{h'(1) = 2g(1) \cdot g'(1) - g'(1) \cdot 2 = 2g'(1) \cdot (g(1) - 1)}$

Mit $\mathrm{0 < g(1) < 1}$ folgt $\mathrm{g(1) - 1 < 0}$

Da h streng monoton wachsend ist, gilt $\mathrm{h'(1) > 0}$.

Somit folgt $\mathrm{g'(1) < 0}$ ➔ g ist auf I nicht streng monoton wachsend.

AUFGABE 2 Gegeben sind die auf dem gleichen Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktionen f und g.
Zudem die auf I definierte Funktion h mit $\mathrm{h(x) = g(-f(x))}$.

a) Seien f und g jeweils lineare Funktionen.

Zeigen Sie, dass dann auch h eine lineare Funktion ist.

Es gilt $f(x) = m_f \cdot x + c_f$ bzw. $g(x) = m_g \cdot x + c_g$.

➔ $h(x) = g\big(-f(x)\big) = m_g \cdot \big(-(m_f \cdot x + c_f)\big) + c_g = -m_g \cdot m_f \cdot x + c_g - m_g \cdot c_f$

Mit $-m_g \cdot m_f = m_h$ und $c_g - m_g \cdot c_f = c_h$ folgt: $h(x) = m_h \cdot x + c_h$

Also ist h eine lineare Funktion.

b) Die Graphen der beiden linearen Funktionen f und g schneiden sich senkrecht auf der positiven y- Achse im Punkt S.

Untersuchen Sie, ob der Graph von h ebenfalls durch den Punkt S verlaufen kann.

Da sich $\mathrm{G_f}$ und $\mathrm{G_g}$ auf der positiven y- Achse schneiden, gilt: $c_f = c_g = c > 0$

Für den Schnittpunkt gilt: $S(0\,|c)$

Aus $\mathrm{G_f \perp G_g}$ folgt zudem $m_g \cdot m_f = -1$ (I)

Funktionsgleichung von h: $h(x) = -m_g \cdot m_f \cdot x + c_g - m_g \cdot c_f = x + c \cdot (1 - m_g)$

Punktprobe für S: $h(0) = c \cdot (1 - m_g)$ ➔ $c \cdot \big(1 - m_g\big) = c$

Mit $c > 0$ folgt $\big(1 - m_g\big) = 1$ bzw. $m_g = 0$ ➔ Widerspruch zu (I)

➔ S kann nicht auf dem Graphen von h liegen.

c) Der Graph $\mathrm{G_f}$ von f ist symmetrisch zur y- Achse.

Untersuchen Sie, ob der Graph $\mathrm{G_h}$ von h ebenfalls eine einfache Symmetrie besitzt.

Es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

➔ $h(-x) = g\big(-f(-x)\big) = g\big(-f(x)\big) = h(x)$ für alle $x \in I$.

Somit ist auch der Graph von h symmetrisch zur y- Achse.

d) Der Graph $\mathrm{G_h}$ ist symmetrisch zur y- Achse.

Untersuchen Sie, ob dann auch $\mathrm{G_f}$ und $\mathrm{G_g}$ symmetrisch zur y- Achse sein müssen.

Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$; $g(x) = x + 1$ ➔ $h(x) = g\big(-f(x)\big) = -x^2 + 1$

Der Graph von h ist offensichtlich symmetrisch zur y- Achse. Allerdings ist der Graph von g nicht symmetrisch zur y- Achse.

e) G_f hat den Hochpunkt $H(0 \mid 1)$.

Untersuchen Sie unter welchen Bedingungen h an der inneren Stelle $x_1 = 0$ ebenfalls ein lokales Maximum besitzt.

Es gilt: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$

$h'(x) = g'(-f(x)) \cdot (-f'(x))$ ➔ $h'(0) = g'(-f(0)) \cdot (-f'(0)) = g'(-1) \cdot 0 = 0$

$h''(x) = g''(-f(x)) \cdot (-f'(x)) \cdot (-f'(x)) + g'(-f(x)) \cdot (-f''(x))$

➔ $h''(0) = g''(-f(0)) \cdot (-f'(0)) \cdot (-f'(0)) + g'(-f(0)) \cdot (-f''(0))$

➔ $h''(0) = g''(-1) \cdot (0) \cdot (0) + g'(-1) \cdot (-f''(0)) = -g'(-1) \cdot f''(0)$

Damit ein lokales Maximum vorliegt, muss gelten: $h''(0) < 0$

➔ $g'(-1) \cdot f''(0) > 0$

Wegen $f''(0) < 0$ muss $g'(-1) < 0$ sein.

AUFGABE 3 Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion f und eine Funktion g mit $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ und $D_f = D_g = I$.

a) Sei f eine lineare, nicht konstante Funktion.

Zeigen Sie, dass f und g die gleichen Nullstellen besitzen.

Aus $f(x_1) = 0$ folgt $g(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_1) = 0 \cdot f'(x_1) = 0$ ➔ x_1 ist Nullstelle von g

b) Zeigen Sie, dass g ebenfalls eine lineare Funktion ist.

$f(x) = mx + c$ mit $m \neq 0$ ➔ $f'(x) = m$

$g(x) = (mx + c) \cdot m = m^2x + c \cdot m$; somit ist auch g eine lineare Funktion

c) Sei f eine Potenzfunktion mit $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathrm{IR}\setminus\{0\}$.

Bestimmen Sie r so, dass g eine konstante Funktion ist.

$f(x) = x^r$ ➔ $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$ ➔ $g(x) = x^r \cdot r \cdot x^{r-1} = r \cdot x^{2r-1}$

g ist genau dann eine konstante Funktion, falls gilt: $2r - 1 = 0$ ➔ $r = \frac{1}{2}$

d) Sei g streng monoton wachsend.

Untersuchen Sie, ob dann auch f streng monoton wachsend sein muss.

Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$ ➔ $f'(x) = 2x$ ➔ $g(x) = x^2 \cdot 2x = 2x^3$

g ist streng monoton wachsend auf ganz IR, aber f nicht.

AUFGABE 4 Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens dreimal differenzierbare Funktion f und eine Funktion g mit $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{f(x)}$ und $\mathrm{D_f} = \mathrm{D_g} = I$.

a) Der Graph von g ist symmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y- Achse ist.

Es gilt $\mathrm{g(-x)} = -\mathrm{g(x)}$ für alle $x \in I$.

$\mathrm{g(-x)} = -\mathrm{x} \cdot \mathrm{f(-x)}$; $-\mathrm{g(x)} = -\mathrm{x} \cdot \mathrm{f(x)}$ ➔ $-\mathrm{x} \cdot \mathrm{f(-x)} = -\mathrm{x} \cdot \mathrm{f(x)}$ ➔ Da der Fall $x = 0$ nicht relevant ist $(\mathrm{f(-0)} = \mathrm{f(0)})$ gilt: $\mathrm{f(-x)} = \mathrm{f(x)}$ für alle $x \in I$.

Also ist der Graph von f symmetrisch zur y- Achse.

b) $x_1 = 1$ ist eine innere Stelle von I. Der Graph von g hat den Tiefpunkt $T(1|0)$.

Zeigen sie, dass auch der Graph von f den Tiefpunkt T besitzt.

$\mathrm{g(1)} = 0$ ➔ $\mathrm{g(1)} = 1 \cdot \mathrm{f(1)} = 0$ ➔ $\mathrm{f(1)} = 0$ ➔ T liegt auf dem Graphen von f.

Da T Tiefpunkt des Graphen von g ist und $\mathrm{g(1)} = 0$ gilt, wechselt g bei $x_1 = 1$ das Vorzeichen nicht. Das Vorzeichen von g ist auf einer Umgebung von x_1 positiv.

Aus $x_1 = 1 > 0$ und $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{f(x)}$ folgt: Auch f ist auf einer Umgebung von x_1 positiv. Somit ist $\mathrm{f(1)}$ auf einer Umgebung von $x_1 = 1$ der kleinste Funktionswert, also ein lokales Minimum.

Somit ist T ebenfalls ein Tiefpunkt des Graphen von f.

c) Die Graphen von f und g schneiden sich im Punkt $S(1|-2)$ senkrecht.

Zeigen sie, dass die Tangente in S an den Graphen von f parallel zur 1.Winkelhalbierenden ist.

Es gilt: $\mathrm{g(1)} = \mathrm{f(1)} = -2$; $\mathrm{g'(1)} \cdot \mathrm{f'(1)} = -1$

Mit $\mathrm{g'(1)} = \mathrm{f(1)} + 1 \cdot \mathrm{f'(1)} = -2 + \mathrm{f'(1)}$ folgt: $\left(-2 + \mathrm{f'(1)}\right) \cdot \mathrm{f'(1)} = -1$

➔ $\left(\mathrm{f'(1)}\right)^2 - 2\mathrm{f'(1)} + 1 = 0$ ➔ $(\mathrm{f'(1)} - 1)^2 = 0$ ➔ $\mathrm{f'(1)} = 1$

Somit hat die Tangente in S an den Graphen von f die Steigung 1 und ist parallel zur 1.Winkelhalbierenden.

d) f hat die innere Extremstelle $x_1 = 0$.

Zeigen Sie, dass g die innere Wendestelle $x_1 = 0$ besitzt.

Es gilt: $\mathrm{f'(0)} = 0$ und $\mathrm{f'}$ hat bei $\mathrm{x_1} = 0$ einen Vorzeichenwechsel.

$\mathrm{g''(x)} = \mathrm{f'(x)} + 1 \cdot \mathrm{f'(x)} + \mathrm{x} \cdot \mathrm{f''(x)} = 2 \cdot \mathrm{f'(x)} + \mathrm{x} \cdot \mathrm{f''(x)}$

➔ $\mathrm{g''(0)} = 2 \cdot \mathrm{f'(0)} + 0 \cdot \mathrm{f''(0)} = 0 + 0 = 0$

Da $\mathrm{f'}$ bei $\mathrm{x_1} = 0$ einen Vorzeichenwechsel hat, kann f " bei $\mathrm{x_1} = 0$ keinen Vor-Zeichenwechsel haben.

Da $\mathrm{f'}$ und $\mathrm{x} \cdot \mathrm{f''}$ bei $\mathrm{x_1} = 0$ den gleichen Vorzeichenwechsel haben, hat auch $\mathrm{g''}$ einen Vorzeichenwechsel bei $\mathrm{x_1} = 0$. Also ist $\mathrm{x_1} = 0$ eine Wendestelle von g.

e) Es gilt $(g(2) - f(2)) \cdot (g(3) - f(3)) < 0$

Begründen Sie, dass f auf dem Intervall $]2;3[$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

$g(2) = 2 \cdot f(2)$ ➔ $g(2) - f(2) = 2 \cdot f(2) - f(2) = f(2)$

$g(3) = 3 \cdot f(3)$ ➔ $g(3) - f(3) = 3 \cdot f(3) - f(3) = 2f(3)$

➔ $f(2) \cdot 2f(3) < 0$ ➔ Somit haben $f(2)$ und $f(3)$ verschiedene Vorzeichen.

Da f stetig ist, muss f im Intervall $]2;3[$ mindestens eine Nullstelle besitzen.

AUFGABE 5 Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion f und eine Funktion g mit $g(x) = \int_0^x f(t)dt + f(x)$ und $D_f = D_g = I$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f und der Graph von g mindestens einen Punkt gemeinsam haben.

Es gilt: $g(0) = \int_0^0 f(t)dt + f(0) = 0 + f(0) = f(0)$

➔ $S(0|f(0))$ liegt auf beiden Graphen

b) Entscheiden sie, ob folgende Aussage wahr oder falsch ist (Begründen Sie!)

„Wenn für $x > 0$ alle Funktionswerte von f positiv sind, dann gilt $g(x) > f(x)$ für alle $x > 0$."

Es gilt: $g(x) - f(x) = \int_0^x f(t)dt$. Aus $f(x) > 0$ folgt, dass der Graph von f für $x > 0$ oberhalb der x-Achse liegt und damit der Wert des Integrals positiv ist.

➔ $g(x) - f(x) > 0$ ➔ $g(x) > f(x)$ für alle $x > 0$ ➔ Die Aussage ist wahr.

c) Es gilt $f(2) = 0$. Sei t die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(2|0)$ und t* die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(2|g(2))$.

Zeigen Sie, dass t und t* parallel zueinander sind.

Mit $\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$ folgt: $g'(x) = f(x) + f'(x)$

$g'(2) = f(2) + f'(2) = 0 + f'(2) = f'(2)$

Somit haben die beiden Tangenten t und t* die gleiche Steigung und sind demnach parallel zueinander.

d) Sei f eine periodische Funktion mit der Periode p, deren Mittelwert über eine Periode 0 ist.

Zeigen Sie, dass die Funktion g ebenfalls eine periodische Funktion ist.

Es gilt: $f(x + p) = f(x)$

Da der Mittelwert über eine Periode 0 ist, gilt: $\frac{1}{p} \cdot \int_x^{x+p} f(t)dt = 0$ ➔ $\int_x^{x+p} f(t)dt = 0$

➔ $g(x + p) = \int_0^{x+p} f(t)dt + f(x + p) = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+p} f(t)dt + f(x + p)$

➔ $g(x + p) = \int_0^x f(t)dt + 0 + f(x) = g(x)$ ➔ g ist eine periodische Funktion.

AUFGABE 6 Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion f, die auf I umkehrbar ist und die Funktion g mit $g(x) = \frac{f(x)-\overline{f}(x)}{2}$.

a) Der Graph von f hat im Punkt $P(0|1)$ eine Tangente t mit der Steigung 0,5.
Der Graph von $\overline{f}$ hat im Punkt $Q(1|0)$ eine Tangente t*.

Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente t*.

Da der Graph von $\overline{f}$ durch Spiegelung des Graphen von f an der 1.Winkelhalbierenden entsteht, entsteht auch t* durch Spiegelung von t an der 1.Winkelhalbierenden. Somit beträgt deren Steigung $\frac{1}{0{,}5} = 2$.

b) Es gilt $\overline{f} \neq f$. Die Graphen von f und $\overline{f}$ berühren sich im Punkt $B(a|a)$.

Bestimmen Sie die Steigung der gemeinsamen Tangente im Punkt B.

Es gilt $\overline{f}(a) = f(a) = a$ und $\overline{f}'(a) = f'(a)$. Zudem gilt $\overline{f}'(x) = \frac{1}{f'(\overline{f}(x))}$.

➔ $\overline{f}'(a) = \frac{1}{f'(\overline{f}(a))} = \frac{1}{f'(a)}$ ➔ $\overline{f}'(a) \cdot f'(a) = 1$ ➔ $f'(a) \cdot f'(a) = \left(f'(a)\right)^2 = 1$
Die Steigung beträgt also $f'(a) = 1$ oder $f'(a) = -1$.

c) Es gilt $f(4) = 4$.

Begründen Sie, das g die Nullstelle 4 besitzt.

Es gilt: $\overline{f}(4) = 4$ ➔ $g(4) = \frac{f(4)-\overline{f}(4)}{2} = \frac{4-4}{2} = 0$; Also ist 4 eine Nullstelle von g.

d) Sei f eine lineare Funktion mit $f(x) \neq x$ und $f(x) \neq -x + c$.

Begründen Sie, dass g höchstens eine Nullstelle besitzen kann.

$f(x) = mx + c$ mit (m ; c) ≠ (1 ; 0) und m ≠ – 1. Da f umkehrbar ist, gilt $m \neq 0$.

$\overline{f}(x) = \frac{1}{m} \cdot (x - c) = \frac{1}{m} \cdot x - \frac{c}{m}$ ➔ $g(x) = \frac{mx+c-\left(\frac{1}{m} \cdot x - \frac{c}{m}\right)}{2} = \frac{mx+c-\frac{1}{m} \cdot x+\frac{c}{m}}{2}$

➔ $g(x) = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right) \cdot x + \frac{1}{2}\left(c + \frac{c}{m}\right)$.

Fall1: m = 1 ; c ≠ 0 ➔ $g(x) = c$ ➔ g hat keine Nullstelle.

Fall 2: m ≠ ± 1, $\left(m - \frac{1}{m}\right) \neq 0$ ➔ g hat genau eine Nullstelle.

Alternative Begründung:

Fall 1: $f(x) = x + c$ mit c ≠ 0

Der Graph von f ist parallel zur 1.Winkelhalbierenden ➔ Die Graphen von f und $\overline{f}$ schneiden sich nicht ➔ $\overline{f}(x) \neq f(x)$ für alle $x \in I$ ➔ g hat keine Nullstelle.

Fall 2: $f(x) = m \cdot x + c$ mit m ≠ ±1

Der Graph von f ist weder parallel noch senkrecht zur 1.Winkelhalbierenden
➔ Die Graphen von f und $\overline{f}$ schneiden sich genau im Punkt $S(x_1|x_1)$ auf der 1.Winkelhalbierenden.
➔ $\overline{f}(x_1) = f(x_1) = x_1$ ➔ $g(x_1) = 0$ ➔ g hat genau die Nullstelle x_1.